

資料

B-spline による補間スプラインの算法*

秦 野 和 郎** 二 宮 市 三***

Abstract

The algorithms for the computation of interpolating splines with various end conditions are presented. Local basis (Normalized B-splines) are used in the representation of the interpolating splines.

Numerical stability of the above scheme in the case of equi-spaced knots are also discussed.

1. ま え が き

計算機の高速度大容量化に伴い、数値計算も大型化し高精度計算が要求されつつある。

ある区間で関数 $f(x)$ が定義されているとする。任意の点での $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ などが必要なとき、もし $f(x)$ が簡単な式で与えられていれば問題はないが、その評価に大量の計算を必要とすることがしばしばある。このような場合に通常とられる手段は、まず離散点で関数値を計算しそれらを使って多項式補間をすることである。しかし、たとえば関数値を等間隔で与え、高精度を期待して多項式の次数を上げるとかえって誤差が大きくなることはよく知られている。これを避けるために比較的低位の多項式を区分的に接続する手法がとられるが、このようにすると接続点で導関数に不連続点が生ずるので $f'(x)$, $f''(x)$ の近似は好ましくない。

最近この種の目的にスプライン補間が注目されてきており、2次導関数まで連続な3次スプラインがよく使われる。しかし3次スプラインは $f''(x)$ の近似には好ましくない(折線近似になる)。この場合にはより次数の高いスプラインの適用が望ましい。また、スプラインの次数を高くして、より少ない補間点数で3次スプラインと同程度の近似ができれば、計算全体として有利になることは十分に考えられる。

一方、高精度を期待して補間スプラインの次数を上げた場合、当然その数値的安定性が問題になる。一般に次数を高くすれば、数値的安定性は悪くなると思われるのでこの面での検討が必要である。

3次を超える次数の補間スプラインの算法を実用的な立場から議論している文献はほとんどない^{1), 9), 10), 11), 12)}。その中で例外的に Lyche-Schumaker⁶⁾ の算法は実用性がある。しかしその算法は自然スプラインによる補間(本論文では文献¹⁾にならって Type-II' スプラインと呼んでいる)のみに限定されており、また、3種類の基底関数(Greville¹³⁾の基底)を必要とすることから、いく分計算が面倒である。また、自然スプラインによる補間は一般に打ち切り誤差が大きい¹⁵⁾。

ここでは、いくつかの条件のもとで定義される補間スプラインを、局所的でしかも数値的に安定な算法の知られている B-spline を使って構成する手法を示し、補間点が等間隔のときの算法の安定性について議論する。また、この算法を使って計算したいいくつかの計算例を示す。

2. 補間スプライン

$I=[a, b]$ を実軸上の有界閉区間とし

$$D: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = a \quad (2.1)$$

をその分割とする。 $D \equiv d/dx$ として

$$\begin{cases} D \text{ の各部分開区間 } (x_i, x_{i+1}) \text{ で } D^{2m} S(x) = 0 \\ S(x) \in C^{2m-2}[a, b] \end{cases} \quad (2.2)$$

をみたす実関数 $S(x)$ を D の上で定義される $2m-1$ 次のスプライン関数と定義し、 $S_d(x)$ と書く。また、 $x_i: 0 \leq i \leq n$ を $S_d(x)$ の節点と呼ぶ。すなわち $S_d(x)$

* The Algorithms for the Computation of Interpolating Splines by Means of B-splines by Kazuo HATANO (Nagoya University Computation Center) and Ichizo NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

** 名古屋大学大型計算機センター (現在、福井大学工学部)

*** 名古屋大学工学部情報工学科

はそれぞれの部分開区間 (x_i, x_{i+1}) で区分的に定義される $2m-1$ 次多項式で全区間 $[a, b]$ では $2m-2$ 次導関数まで連続な関数である。

$f(x) \in C^{2m}[a, b]$ を実関数として、

$$S_{\Delta}(x_i) = f(x_i) = f_i : 0 \leq i \leq n \quad (2.3)$$

をみたす $S_{\Delta}(x)$ を $f(x)$ に対する $2m-1$ 次の補間スプラインと定義し、 $S_{\Delta}(f; x)$ と書く。さらに、

$$(i) \begin{cases} D^l S_{\Delta}(f; x_0) = f^{(l)}(x_0) = f_0^{(l)} \\ D^l S_{\Delta}(f; x_n) = f^{(l)}(x_n) = f_n^{(l)} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$1 \leq l \leq m-1$$

をみたす $S_{\Delta}(f; x)$ を Type-I スプライン¹⁾、

$$(ii) \begin{cases} D^l S_{\Delta}(f; x_0) = f^{(l)}(x_0) = f_0^{(l)} \\ D^l S_{\Delta}(f; x_n) = f^{(l)}(x_n) = f_n^{(l)} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$m \leq l \leq 2m-2$$

をみたす $S_{\Delta}(f; x)$ を Type-II スプライン¹⁾、

$$(iii) \begin{cases} D^l S_{\Delta}(f; x_0) = D^l S_{\Delta}(f; x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$m \leq l \leq 2m-2$$

をみたす $S_{\Delta}(f; x)$ を Type-II' スプライン¹⁾、

(iv) I の部分区間 $[x_0, x_1], [x_{n-1}, x_n]$ をさらに細分した分割を、

$$\Delta_{III} : a = x_0 < x_{0(1)} < x_{0(2)} < \cdots < x_{0(m-1)} < x_1 < \cdots$$

$$< x_{n-1} < x_{n(1)} < x_{n(2)} < \cdots < x_{n(m-1)} < x_n = b$$

として、

$$\begin{cases} S_{\Delta}(f; x_{0(j)}) = f(x_{0(j)}) = f_{0(j)} \\ S_{\Delta}(f; x_{n(j)}) = f(x_{n(j)}) = f_{n(j)} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$1 \leq j \leq m-1$$

をみたす $S_{\Delta}(f; x)$ を Type-III スプライン、

$$(v) \begin{cases} f(x) \text{ が周期 } b-a \text{ の周期関数であるとき,} \\ D^l S_{\Delta}(f; x_0) = D^l S_{\Delta}(f; x_n) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$0 \leq l \leq 2m-2$$

をみたす $S_{\Delta}(f; x)$ を周期スプライン¹⁾と定義する。

Type-I, 周期スプラインは $n \geq 1$, Type-II, II' スプラインは $n \geq m-1$ であれば一意的に存在する¹⁾。Type-III スプラインは $n \geq 2$ であれば一意的に存在する⁸⁾。

3. 補間スプラインの算法

本章では 2. で定義された補間スプラインを、正規化された B-spline を使って構成する手法を示す。

スプライン関数 $S_{\Delta}(x)$ はよく知られるように、適当に定義された B-spline の線型結合で与えられる。従って B-spline の線型結合に補間条件を適用し、得られる連立一次方程式を解いてその解、すなわちそれ

ぞれの B-spline にかかる係数を得れば、任意の点での補間値を計算することができる。

B-spline の線型結合および、その導関数を計算する手法は、すでに Carl de Boor²⁾ らが与えており、数値的に極めて安定に計算することができる。従ってここで問題になるのは補間条件を適用して得られる連立一次方程式についてである。B-spline をどのように定義するかによって連立一次方程式の解き易さ、数値的安定性が変わってくる。以下では補間スプラインの型に応じて、2つの場合に分け、それぞれの場合で B-spline を定義し、得られる連立一次方程式がどのような形になるかを示す。

3.1 Type-I, II, II', III スプライン

これらの補間スプラインを構成するのに有利な B-spline を定義するために、分割 Δ に関連して、

$$\begin{cases} t_j = x_0 : -2m+1 \leq j \leq -1 \\ t_j = x_j : 0 \leq j \leq n \\ t_j = x_n : n+1 \leq j \leq n+2m-1 \end{cases} \quad (3.1)$$

なる $t_j : -2m+1 \leq j \leq n+2m-1$ を考える。

$$Q_{2m}(t; x) = (t-x)_+^{2m-1} = \begin{cases} (t-x)^{2m-1} : t \geq x \\ 0 : t < x \end{cases} \quad (3.2)$$

の $t = t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+2m}$ における $2m$ 次差商の定数倍

$$N_{j, 2m}(x) = (t_{j+2m} - t_j) Q_{2m}[t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+2m}; x] \quad (3.3)$$

を正規化された B-spline と定義する²⁾ (以下、簡単のために単に B-spline と呼び、 $N_j(x)$ と書く)。これを使って式(2.2)をみたす任意の $S_{\Delta}(x)$ は $c_j : -2m+1 \leq j \leq n-1$ を定数として

$$S_{\Delta}(x) = \sum_{j=-2m+1}^{n-1} c_j N_j(x) \quad (3.4)$$

と表現される²⁾。 $N_j(x)$ にはさらに次の性質がある。まず

$$\sum_{j=-2m+1}^{n-1} N_j(x) = 1 : x \in [x_0, x_n] \quad (3.5)$$

である²⁾。次に $x \in (x_i, x_{i+1}) : 0 \leq i \leq n-1$ に対して

$$N_j(x) \begin{cases} > 0 : i-2m+1 \leq j \leq i \\ = 0 : j \leq i-2m, j \geq i+1 \end{cases} \quad (3.6)$$

である (局所性と呼ばれる)。また、 $x = x_i : 1 \leq i \leq n-1$ で

$$N_j(x_i) \begin{cases} > 0 : i-2m+1 \leq j \leq i-1 \\ = 0 : j \leq i-2m, j \geq i \end{cases} \quad (3.7)$$

である。特に $x = x_0, x_n$ では、

$$D^l N_j(x_0) \begin{cases} \neq 0 : -2m+1 \leq j \leq l-2m+1 \\ = 0 : j \geq l-2m+2 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$D^l N_j(x_n) \begin{cases} \neq 0: n-1-l \leq j \leq n-1 \\ = 0: j \leq n-2-l \end{cases} \quad (3.9)$$

なる性質がある⁷⁾.

さて、上の性質を使って式(3.4)に Type-I スプラインの補間条件、式(2.3), (2.4)を適用すると、

$$\begin{cases} \sum_{j=-2m+1}^{l-2m+1} c_j N_j^{(l)}(x_0) = f^{(l)}(x_0): l=0, 1, \dots, m-1 \\ \sum_{j=i-2m+1}^{i-1} c_j N_j(x_i) = f(x_i) : i=1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{j=n-1-l}^{n-1} c_j N_j^{(l)}(x_n) = f^{(l)}(x_n) \\ \quad : l=m-1, m-2, \dots, 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

なる方程式が得られる。ここで

$$\begin{cases} \bar{c}_j = c_{j-2m}: 1 \leq j \leq n+2m-1 \\ \bar{f}_i = \begin{cases} f^{(i-1)}(x_0) & : 1 \leq i \leq m \\ f(x_{i-m}) & : m+1 \leq i \leq n+m-1 \\ f^{(n+2m-1-i)}(x_n) & : n+m \leq i \leq n+2m-1 \end{cases} \end{cases} \quad (3.11)$$

とおき、 $1 \leq j \leq n+2m-1$ として

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} N_{j-2m}^{(i-1)}(x_0) & : 1 \leq i \leq m \\ N_{j-2m}(x_{i-m}) & : m+1 \leq i \leq n+m-1 \\ N_{j-2m}^{(n+2m-1-i)}(x_n) & : n+m \leq i \leq n+2m-1 \end{cases} \quad (3.12)$$

とおく。 $\phi_{i,j}$ を要素とする $n+2m-1$ 元の正方行列を Φ 、すなわち $\Phi = (\phi_{i,j})$ とし、

$$\begin{cases} \bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{n+2m-1})^T \\ \bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{n+2m-1})^T \end{cases} \quad (3.13)$$

とおくと、式(3.10)は

$$\Phi \bar{c} = \bar{f} \quad (3.14)$$

となる。ここで Φ は Type-I スプラインの一意性から正則である。連立一次方程式(3.14)を解き $c_j: -2m+1 \leq j \leq n-1$ を得て、式(3.4)に代入し、Carl de Boor の算法²⁾を適用すれば任意の点における補間値を得ることができる。

Φ の非零要素の形状を $m=3, n=7$ の場合について、Fig. 1 に示す。式(3.8), (3.9), (3.10) からわかるように一般に、式(3.14)を解くには、三角行列を係数行列とする m 元の連立一次方程式を 2 種類と $2m-1$ 重対角の係数行列をもつ $n-1$ 元の連立一次方程式を解けばよい。

Type-II, II', III スプラインについても、式(3.4)にそれぞれの補間条件を適用することにより、式(3.14)の形の連立一次方程式を導くことができる。このときの係数行列の非零要素の形状を $m=3, n=7$ の場合に

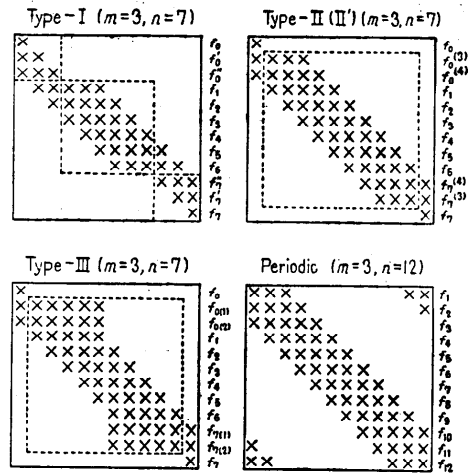


Fig. 1 Non zero elements in coefficient matrices associated with Type-I, II(II'), III and Periodic splines.

ついて Fig. 1 を示す。

3.2 周期スプライン

分割 Δ に関連して

$$t_j = \begin{cases} x_{n+j} - (b-a): -2m+1 \leq j \leq -1 \\ x_j & : 0 \leq j \leq n \\ x_{j-n} + (b-a): n+1 \leq j \leq n+2m-1 \end{cases} \quad (3.15)$$

なる $t_j: -2m+1 \leq j \leq n+2m-1$ を考えて、3.1 のときと同じようにして $N_j(x)$ を定義する。このようにしても式(2.2)をみたす $S_\Delta(x)$ は、式(3.4)と同じ形で与えられる。式(3.5), (3.6)もそのまま成り立つ。また、 $x=x_i: 0 \leq i \leq n$ に対して式(3.7)が成り立つ。

さて、

$$S_\Delta(x) = \sum_{j=-2m+1}^{n-1} c_j N_j(x) \quad (3.16)$$

において $c_j: -m+1 \leq j \leq n-m$ が与えられており、残りのパラメータについて

$$\begin{cases} c_j = c_{j+n}: -2m+1 \leq j \leq -m \\ c_j = c_{j-n}: n-m+1 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad (3.17)$$

が満足されているとする。このとき、式(3.16)は、

$$\begin{aligned} S_\Delta(x) = & \sum_{j=-m+1}^{-1} c_j \{N_j(x) + N_{j+n}(x)\} \\ & + \sum_{j=0}^{n-2m} c_j N_j(x) \\ & + \sum_{j=n-2m+1}^{n-m} c_j \{N_{j-n}(x) + N_j(x)\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

と書き改められる。この式で与えられる $S_\Delta(x)$ は次の性質をもつ。すなわち

$$D^l S_\Delta(a) = D^l S_\Delta(b): 0 \leq l \leq 2m-2 \quad (3.19)$$

が成り立つ。この意味で $S_A(x)$ は $b-a$ を周期とし $x \in [a, b]$ で定義される周期関数とみなすことができる。

式(3.18)で与えられる $S_A(x)$ に式(3.19), (2.8)を考慮して, 補間条件, 式(2.3)を適用する。

$$S_A(f; x_i) = f(x_i); \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

から連立一次方程式 $\Phi c = f$ を導くことができる。ただし, ここで $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ で $c_j = c_{j-m}$; $1 \leq j \leq n$ である。 $m=3, n=12$ の場合で Φ の非零要素の形状を Fig. 1 に示す。一般に Φ は n 元の $2m-1$ 重対角行列の右上端, 左下端にそれぞれ上三角, 下三角の $m-1$ 元行列をつけ加えた形になる。

4. 算法における数値的安定性

3. で提案された手法が数値的にどの程度安定であるかを一般的に議論することは困難である。しかし分割 Δ (または Δ_{III}) が等間隔の場合は, 数値的な手段によりある程度一般的な結論を得ることができる。

さて, Carl de Boor²⁾ の算法によれば $N_i(x)$ は極めて安定に計算される。de Boor は式(3.4)で与えられる $S_A(x)$ の計算における丸め誤差の絶対値は $2m=80$ のときでも c_j の丸め誤差の程度であると述べている。通常使用する m はこれに比較して十分小さいので $N_i(x)$ の計算における丸め誤差は無視しようと仮定できる。

c_j の誤差を Δc_j とし, それによる $S_A(x)$ の誤差を $\Delta S(x)$ とする。式(3.4)から

$$|\Delta S(x)| \leq \left| \sum_{j=-2m+1}^{n-1} \Delta c_j N_j(x) \right|$$

であるが, 式(3.5), (3.6)から

$$|\Delta S(x)| \leq \sum_{j=-2m+1}^{n-1} |\Delta c_j| \cdot N_j(x) \leq \max_j |\Delta c_j| \quad (4.1)$$

である。すなわち $S(x)$ の誤差, $\Delta S(x)$ の絶対値は Δc_j の最大絶対値を越えない。

補間スプラインにおける c_j は 3. で述べたように連立一次方程式

$$\Phi c = f \quad (4.2)$$

の解として与えられる。従って補間スプライン $S_A(f; x)$ を安定に計算しうかどうかは連立一次方程式(4.2)を安定に計算しうかどうかにかかっている。

分割 Δ または Δ_{III} が等間隔のとき, 算法の安定性の一つの尺度として連立一次方程式(4.2)の係数行列,

または以下に述べるように適当にスケーリングした行列の条件数をいくつかの場合について算出した。行列のノルムとしては一様ノルムを採用している。Type-III, 周期スプラインについては, 式(3.5)から $\|\Phi\|_\infty = 1$ である。その他の場合については Φ の各行の絶対値和を 1 となるようにスケーリングした行列 Φ' について条件数を算出した。

$n=8, 16, 32, 64, 128$ (Type-III については $n+2m-2=8, 16, 32, 64, 128$); $2 \leq m \leq 11$ について算出した条件数, $\|\Phi\|_\infty \cdot \|\Phi^{-1}\|_\infty = \|\Phi^{-1}\|_\infty$ または $\|\Phi'\|_\infty \cdot \|(\Phi')^{-1}\|_\infty = \|(\Phi')^{-1}\|_\infty$ を Fig. 2 に示す。Fig. 2 から条件数は周期スプラインのときが最も小さく, 次に Type-III スプラインのそれが小さい。また, n にはほとんど依存しないことがわかる。(Type-III スプラインでは m が一定で $n+2m-2$ が小さいとき条件数が幾分大きくなっている。これは小さな n に対しては, Type-III スプラインが多項式補間に近い性質を持つようになるからである。)

Fig. 2 は連立一次方程式(4.2)が全体としてどの程度安定に計算されるかを示している。すなわち Φ または Φ' の逆行列を Ψ とし, その要素を $\psi_{i,j}$ としたとき, $\max_i \sum_j |\psi_{i,j}|$ をプロットしている。

式(4.2)の解 c_j のそれぞれがどの程度安定に計算されるかをもう少し詳しくみるために, $\sum_j |\psi_{i,j}|$ を $n=128$ (Type-III では $n+2m-2=128$), $m=5, 8$ の場

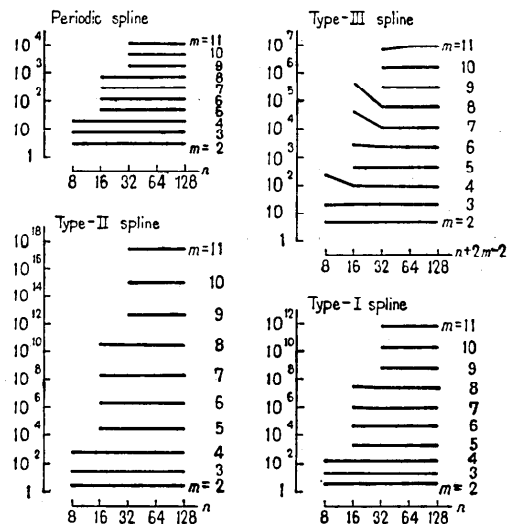


Fig. 2 The evaluated condition numbers of the matrices associated with interpolating splines of degree $2m-1$.

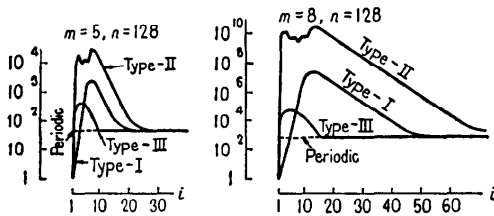


Fig. 3 The evaluation values of $\sum |\phi_{i,j}|$ ($i=1, 2, \dots$), where $\phi_{i,j}$ is elements in the inverse matrices associated with interpolating splines of degree $2m-1$ in the case where $m=5, 8$.

合について i を横軸にとって Fig. 3 に示す。Fig. 3 によれば n が十分に大きいとき、 $1 \ll i \ll n$ なる i に対しては、どの型のスプラインの場合も、 e_i は周期スプラインの場合と同程度に安定に計算されると期待できる。特に Type-III スプラインの場合は $i > 2m$ 程度で $\sum |\phi_{i,j}|$ の値は周期スプラインの場合の条件数とほとんど同じになる。

5. 数値例

3. で述べた算法により次の計算をした。計算には FACOM 230-60 (一部の計算に 75) を使用し、すべての計算を倍精度で行った。(仮数部 2 進 61 桁, 10 進約 18 桁)

5.1

すべての型に適用しうることから $f(x) = \sin x : x \in [0, 2\pi]$ を例にとり、補間点数 $N=37$ のとき、Type-I, II, II', III, 周期スプラインについて補間値の誤差および、一部については一次、二次導関数の誤差を算出した。すなわち $f(x)$ の定義区間 $[0, 2\pi]$ を 36 等分し、 $s_i = (2\pi/36)i : 0 \leq i \leq 36$ において $f_i = f(s_i)$ を与え、さらに Type-I, II スプラインについては s_0, s_{36} においてそれぞれ $1 \sim m-1$ 次、 $m \sim 2m-2$ 次の微分係数の値を与えた。Type-I, II, II', 周期スプラインについては節点 x_i は s_i に一致するが、Type-III スプラインでは節点の個数は両端を含めて $39-2m$ であり、 $x = s_0, x_{i-m+1} = s_i : m \leq i \leq 36-m, x_{38-2m} = s_{36}$ である。

各区間 $[s_i, s_{i+1}]$ を 32 等分し、それぞれの点で計算した補間スプラインの l 次導関数の誤差の最大絶対値 $e_i^{(l)}$ をその区間における誤差とした。

$e^{(0)} = \max_i e_i^{(0)}$ すなわち全区間における補間値の最大誤差を $2 \leq m \leq 11$ について Fig. 4 に示す。いずれ

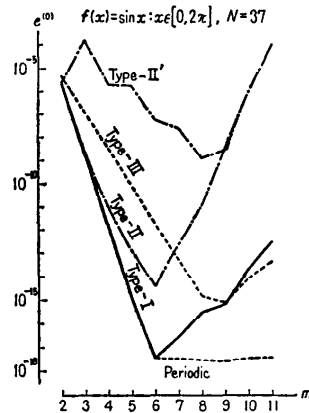


Fig. 4 Interpolation errors for function $f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi] : e^{(0)} = \max |f(x) - S_m(f; x)|$, where $S_m(f; x)$ is interpolating splines of degree $2m-1$.

の型の場合も m が增大するにつれて $e^{(0)}$ は減少する傾向を示し、ある m を越えると増大する傾向に転ずることがわかる。ここで $e^{(0)}$ が減少する範囲については打ち切り誤差が、 $e^{(0)}$ が増大する範囲については丸め誤差が優勢であると考えられる。

$m \leq 6$ においては Type-I, 周期スプラインの $e^{(0)}$ が最も小さく、Type-II, III, II' の順に大きくなっている。Type-III スプラインと Type-II' スプラインとは 37 個の関数値のみを使って同一の条件で補間するが、誤差は Type-III スプラインの方がかなり小さい。

次に丸め誤差の影響を無視しうと思われる $m=5$ の場合と、丸め誤差の影響がかなり顕著になっていると思われる $m=9$ の場合についての $e_i^{(0)}$ をそれぞれ、Fig. 5(a), (b) (次頁参照) に示す。Type-III スプラインについてのみ $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}$ をも示している。

Fig. 5(a) から Type-I, 周期スプラインの誤差はほぼ全域にわたって一定であることがわかる。Type-III, II' スプラインでは端付近での誤差が特に大きい。また、一次、二次導関数の誤差の傾向は補間の誤差の傾向とほとんど同じである。

Fig. 5(b) では、丸め誤差の影響のために Type-II, II' スプラインの誤差は全域にわたって一致してしまっている。Type-III スプラインの場合は左端の 4 区間、右端の 1 区間を除けば、補間値、一次、二次導関数の誤差は共にほぼ一定で十分に小さい。

5.2

周期スプラインを一例として天体の軌道計算の問題

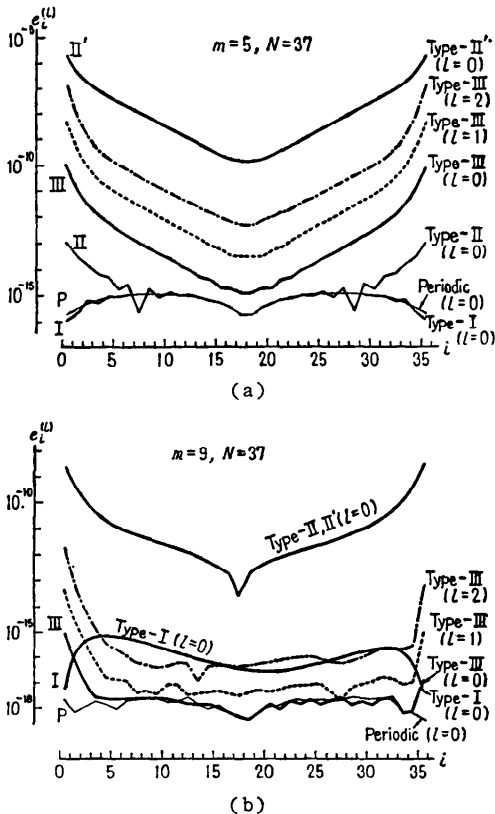


Fig. 5 Maximum interpolation errors over subintervals: $e_i^{(l)} = \max_x |f^{(l)}(x) - S_{\Delta}^{(l)}(x)|$, $x \in [2i\pi/36, 2(i+1)\pi/36]$, where $f(x) = \sin x$ ($x \in [0, 2\pi]$), the $S_{\Delta}(x)$ is interpolating splines of degree $2m-1$, and the superscript l denotes its l -th derivatives.

に適用してみた。太陽を一つの焦点として動く天体の楕円軌道の離心率を $\varepsilon \in (0, 1)$, 離心近点離角を $E \in [0, 2\pi]$, 平均近点離角 (すなわち, 周期 2π で太陽のまわりを一定の角速度で公転する仮想天体と近日点 Q とが太陽に対して張る角) を $M \in [0, 2\pi]$, 真近点離角を $w \in [0, 2\pi]$, 動径を r とすると (Fig. 6)

$$M = E - \varepsilon \sin E \quad (5.1)$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E) \quad (5.2)$$

$$\tan(w/2) = \sqrt{(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)} \tan(E/2) \quad (5.3)$$

である ($a=1$ とする)。 M を与えて r, w を知るには, 式(5.1)から E を計算しなければならない。

$$E(M) = M + f(M) \quad (5.4)$$

とおく。 $f(M)$ はよく知られるように $J_n(x)$ を n 次の

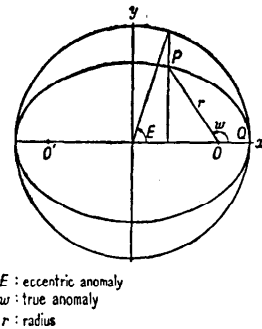


Fig. 6 Geometrical diagram of Kepler's problem.

Bessel 関数として

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM \quad (5.5)$$

で与えられ, 2π を周期とする周期関数である。従って, 式(5.5)により E を知ることができるが, ここでは離散点で $f(M)$ の正確な値を与えて周期スプラインにより, 任意の $M \in [0, 2\pi]$ に対して $f(M)$ を近似することを試みた。

式(5.1), (5.4)から容易にわかるように,

$$M_i = (2\pi i/n) - \varepsilon \sin(2\pi i/n): 0 \leq i \leq n$$

において,

$$f(M_i) = \varepsilon \sin(2\pi i/n)$$

である。いくつかの ε, n について, この点で関数値を与えて $f(M)$ に対する $2m-1$ 次の周期スプライン, $S_{\Delta}(f; M)$ を構成し, その誤差を算出した (ここでは $\Delta: 0 = M_0 < M_1 \dots < M_n = 2\pi$ とする)。すなわち,

$$M_j = (2\pi j/8n) - \varepsilon \sin(2\pi j/8n): 0 \leq j \leq 8n$$

における, $R(M_j) = f(M_j) - S_{\Delta}(f; M_j)$ を算出して, $R \max_j |R(M_j)|$ を $S_{\Delta}(f; M)$ の誤差とした。

Fig. 7 (次頁参照) に $\varepsilon = 0.25, 0.5049, 0.7289, 0.8471, 0.9673^*$ に対していくつかの n, m について計算した R を示す。Fig. 7 からわかるように, 特に高精度を必要としない計算には, 比較的低い次数のスプラインが有用である。しかし高精度計算の必要なきには, 次数の高いスプラインを使う方がより少ない補間点数で良好な結果を得ることができる。

次にいくつかの ε, n, m について $S_{\Delta}(f; M)$ を使って式(5.2), (5.3)で与えられる $r(M), w(M)$ およびそれらの一次, 二次導関数を計算し, それぞれの誤差の最大絶対値を得た。これを **Table 1** に示す。また, $r(M), w(M)$ などの最大絶対値を **Table 2** (次頁参照) に示す。

* これらはそれぞれ冥王星, プルートゥス第2, ジャコビニ・ツィンネル, エンケ, ハレー彗星の軌道離心率である。

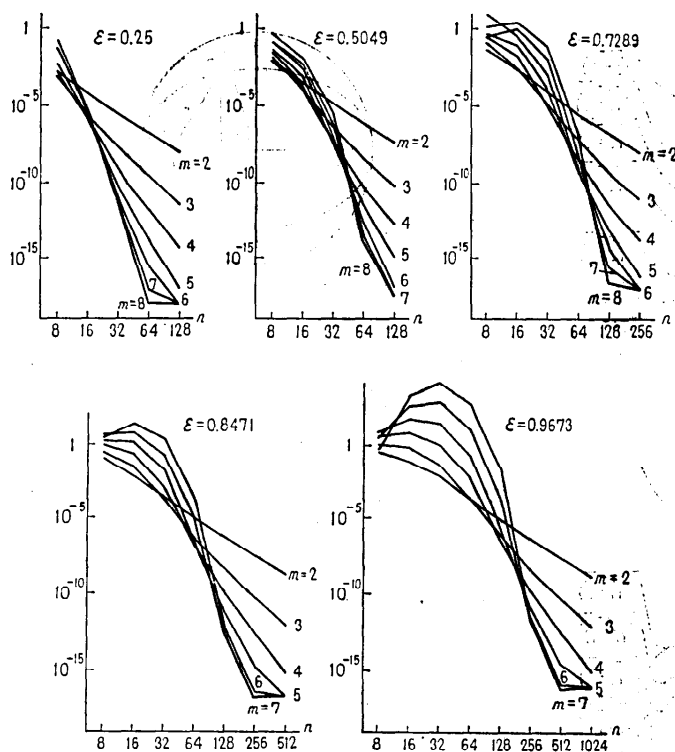


Fig. 7 Interpolation errors for Kepler's equation by means of periodic splines.

Table 1 Maximum errors of various quantities versus ϵ, m, n .

ϵ	0.25	0.5049	0.7289	0.8471	0.9673
m	8	7	6	7	7
n	64	128	256	256	512
$f(M)$	0.119×10^{-17}	0.336×10^{-17}	0.938×10^{-17}	0.162×10^{-18}	0.884×10^{-18}
$f'(M)$	0.230×10^{-18}	0.161×10^{-18}	0.159×10^{-18}	0.440×10^{-18}	0.265×10^{-18}
$f''(M)$	0.112×10^{-18}	0.125×10^{-18}	0.597×10^{-18}	0.287×10^{-18}	0.130×10^{-18}
$r(M)$	0.867×10^{-18}	0.173×10^{-17}	0.434×10^{-17}	0.564×10^{-18}	0.143×10^{-18}
$r'(M)$	0.282×10^{-17}	0.252×10^{-18}	0.245×10^{-18}	0.644×10^{-18}	0.334×10^{-18}
$r''(M)$	0.939×10^{-18}	0.177×10^{-18}	0.894×10^{-18}	0.373×10^{-18}	0.117×10^{-18}
$w(M)$	0.694×10^{-18}	0.694×10^{-17}	0.278×10^{-18}	0.590×10^{-18}	0.694×10^{-18}
$w'(M)$	0.295×10^{-18}	0.271×10^{-18}	0.397×10^{-18}	0.153×10^{-18}	0.205×10^{-18}
$w''(M)$	0.145×10^{-18}	0.209×10^{-18}	0.149×10^{-18}	0.938×10^{-18}	0.101×10^{-17}

Table 2 Maximum values of various quantities versus ϵ .

ϵ	0.25	0.5049	0.7289	0.8471	0.9673
$f(M)$	0.250	0.505	0.729	0.847	0.967
$f'(M)$	0.333	0.102×10	0.269×10	0.554×10	0.296×10^2
$f''(M)$	0.326	0.144×10	0.502×10	0.365×10^2	0.186×10^4
$r(M)$	0.125×10	0.150×10	0.173×10	0.185×10	0.197×10
$r'(M)$	0.258	0.585	0.106×10	0.159×10	0.381×10
$r''(M)$	0.444	0.206×10	0.992×10	0.362×10^2	0.905×10^3
$w(M)$	0.628×10	0.628×10	0.628×10	0.628×10	0.628×10
$w'(M)$	0.172×10	0.352×10	0.932×10	0.227×10^2	0.237×10^3
$w''(M)$	0.748	0.435×10	0.348×10^2	0.218×10^3	0.247×10^4

6. むすび

$2m-1$ 次の補間スプラインの算法を提案し、いくつかの数値例でその有用性を示した。この手法によれば、次数 $2m-1$ が固定され B -spline にかかる係数が得られれば、補間点数がどんなに多いときでも $S_{m-1}^{(1)}(f; x)$ の評価に要する計算量は変わらない。これが局所的な基底関数を使って表現するスプライン関数の最大の長所である。

関数値のみが与えられたとき、しばしば Type-II' スプラインの有用性が強調される。しかしここでは、Type-III スプラインの有用性を強調したい。ここでは紙数の関係で一例を示したに過ぎないが、同じ条件のもとで筆者らが試行した多くの数値実験によれば多くの場合、Type-III スプラインの誤差が Type-II' スプラインの誤差よりはるかに小さい。また、 $f(x)$ が周期関数であるときには周期スプラインの適用が最も好ましい。

従来、補間スプラインは3次スプラインのみが議論の対象となっていたために、実際の問題への適用に当たってはその「なめらかさ」が注目されていたに過ぎない。しかし本資料で示したように適当な次数の補間スプラインはまた、「高精度補間公式」でもある。補間スプラインはこの意味でも注目されるべきであると考えられる。

最後に日頃御指導頂く、名大工学部、福村昇夫教授、鳥居達生助教授、鳥脇純一郎助教授に感謝します。

参考文献

- 1) J. H. Ahlberg, E. N. Nielson, J. L. Walsh: The Theory of Splines and Their Applications, p. 284, Academic Press, New York and London (1967).
- 2) Carl de Boor: On Calculating with B -splines, J. Approx. Theory, Vol. 6, pp. 50~62 (1972).
- 3) M. G. Cox: The Numerical Evaluation of B -splines, J. Inst. Maths. Applics., Vol. 10, pp. 134~149 (1972).
- 4) K. R. Butterfield: The Computation of all the Derivatives of a B -spline Basis, J. Inst. Maths.

- Applcs., Vol. 17, pp. 15~25 (1976).
- 5) P. W. Gaffney: The Calculation of Indefinite Integrals of B-splines, J. Inst. Maths. Applcs., Vol. 17, pp. 37~41 (1976).
 - 6) Tom Lyche, Larry L. Schumaker: Computation of Smoothing and Interpolating Natural Splines via Local Bases, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 6, pp. 1027~1038 (1973).
 - 7) H. B. Curry, I. J. Schoenberg: On Pólya Frequency Functions IV: The Fundamental Spline Functions and Their Limits, J. Anal. Math., Vol. 17, pp. 71~107 (1966).
 - 8) I. J. Schoenberg, Anne Whitney: On Pólya Frequency Functions. III. The Positivity of Translation Determinants with an Application to the Interpolation Problem by Spline Curves, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 74, pp. 246~259 (1953).
 - 9) L. L. Schumaker: Some Algorithms for the Computation of Interpolating and Approximating Spline Functions: T. N. E. Greville ed., Theory and Applications of Spline Functions, p. 212, Academic Press, New York and London pp. 87~102 (1969).
 - 10) P. M. Anselone, P. J. Laurent: A General Methods for the Construction of Interpolating or Smoothing Spline Function, Numer. Math., Vol. 12, pp. 66~82 (1968).
 - 11) M. J. Munteanu, L. L. Schumaker: On a Methods of Carasso and Laurent for Constructing Interpolating Splines, Math. Comp., Vol. 27, pp. 317~325 (1973).
 - 12) C. Carasso, P. J. Laurent: On the Numerical Construction and the Practical Use of Interpolating Spline Functions, Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968), A. J. H. Morell, ed., North Holland, Amsterdam, pp. 86~89 (1969).
 - 13) T. N. E. Greville: Introduction to Spline Functions: Greville ed., Theory and Applications of Spline Functions, p. 212, Academic Press, New York and London pp. 1~35.
 - 14) 秦野和郎: 補間スプラインの算法における数値的安定性, 情報処理学会第 17 回全国大会予稿集 204 (1976).
 - 15) 秦野和郎: 補間スプラインの誤差解析, 情報処理, Vol. 18, No. 1, pp. 2~10 (1977).

(昭和 52 年 3 月 7 日受付)

(昭和 52 年 10 月 31 日再受付)