



論文

二次変換の発散収束境界の諸性質*

伊 達 惇**

Abstract

This paper aims at the elucidation of the asymptotic behavior of the Newton-Raphson process in the neighborhood of the solution by means of the quadratic transformation theory. The divergence-convergence (DC) boundary of the real homogeneous quadratic transformation is introduced and analyzed as a metric representing the convergence property of the transformation. Furthermore, based on the classification of the two-dimensional quadratic transformation given in [1], the characteristic portraits of the DC-boundaries in two dimensions are illustrated.

ま え が き

Newton-Raphson 法は、解の近傍においては、実用的な意味で、一般的に十分な収束速度があるために収束過程の漸近的な挙動の厳密な解明はなされていない。W.G. Hwang および J. Todd による、1次元の場合の平方根を求める収束過程の漸近的挙動の研究[2]は承げられるが、2次元以上の場合を扱ったものは見当たらない。

本論文では、方向による収束の速さの差違に着目して、Newton-Raphson 法の解近傍における漸近的挙動を、二次変換の理論によって考察し、収束の速さに関する計量を導入して、その計量をもつ性質を論ずる。

一次変換は、固有値と固有ベクトルによってその構造が定まり、性質はくまなく明らかにされたと言えるが、二次変換は、3階のテンソルで記述され、その性質はほとんど明らかにされていない。本論文で扱う発散収束境界は、二次変換のアフィン不変な性質を表わす重要な概念の一つと考えられる。

第1節では、具体例によって、Newton-Raphson 法の解の近傍での収束が方向によって異なることを示し、第2節で計量の導入に必要な二次変換の発散収束

境界の一般的性質を n 次元の場合で論ずる。第3節では、2次元の場合に、計量の特性の記述に必要な手段として、二次変換の標準形および不変式系に関する[1]の結果を整理して述べる。第4節では、2次元二次変換の発散収束境界の可能な形状を図例で示す。

とくに断わらない限り、全節を通じて、実同次二次変換のことを単に二次変換と呼ぶことにし、テンソルの用語法は[3]によることとして、補足的に[4]のものも用いた。

1. Newton-Raphson 法の収束過程と二次変換

本節では、Newton-Raphson 法の解近傍における収束が、方向によって差違を示すことを具体例で示し、この方向特性が、後述する二次変換の発散収束境界で表わされることを示す。

方程式系 $g^*(x)=0$ ($\kappa=1, \dots, n; x \in R^n$) に対する Newton-Raphson 法の反復公式は、初期値を $x_{(0)}$ 、第 m 近似値を $x_{(m)}$ とすれば、

$$x_{(m+1)}^* = x_{(m)}^* - \sum_{\mu=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_{(m)}^*} g^{\mu}(x_{(m)}^*) \right]^{-1} g^{\mu}(x_{(m)}^*) \quad (1)$$

で表わされる。 $g^*(x^*)=0$ をみたす解 x^* の近傍では、(1)の収束は2次収束であること、すなわち、 $\varepsilon_{(m)} = x_{(m)} - x^*$ とおくと、

$$\varepsilon_{(m+1)} = \sum_{\lambda, \mu=1}^n P_{\lambda\mu} \varepsilon_{(m)}^{\lambda} \varepsilon_{(m)}^{\mu} + O(|\varepsilon_{(m)}|^3), \quad (2)$$

* Properties of Divergence-Convergence Boundaries of Quadratic Transformations by Tsutomu DATE (Faculty of Engineering, University of Tokyo).

** 東京大学工学部

$$P_{\lambda\mu}^* = -\frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^*} g^{\rho}(\mathbf{x}^*) \right]^{-1} \frac{\partial^2 g^{\rho}(\mathbf{x}^*)}{\partial x^* \partial x^*} \quad (3)$$

で表わされることは良く知られている。ここで注目すべきことは、(2)が漸近的に二次変換となっていることである。

以下に、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ における Newton-Raphson 法の収束過程の漸近的挙動を具体例で観察する。

方程式：

$$\left. \begin{aligned} g^1(x, y) &= \frac{1}{2}(xy + x - y - 1) = 0, \\ g^2(x, y) &= \frac{1}{2}(3xy + y^2 - 3x - 3y + 2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を解くにあたり、解(1, 1)を中心とする半径 0.1 の円周上に 1 万等分点を取り、それぞれの点を初期値として、反復公式(1)を適用する。得られた第 1, 第 2, 第 3 近似の誤差絶対値 r_m を縦軸、初期値の方向 $\theta_{(0)}$ を横軸として図示したものを Fig. 1 に示す。

簡単な計算でわかるように、Fig. 1 で、 $\theta_{(0)} = \arctan(-3m)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) をみたす方向は、第 m 近似で真の解に達する。Fig. 1 からこれらの方向以外にも、収束の速さが、極端ではないが、初期値の方向に強く依存していることが観察される。

1.1 収束の速さに関する計量

Fig. 1 の例で見られたような、収束の速さの方向へ

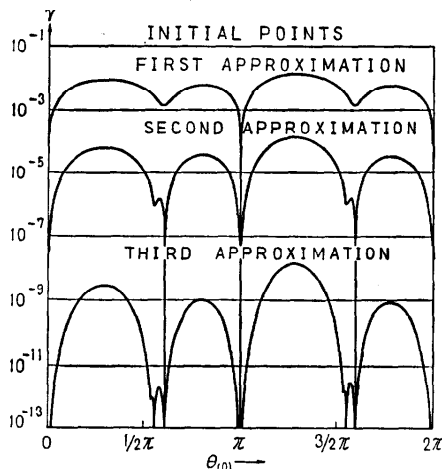


Fig. 1 Behavior of the errors of the Newton-Raphson process of the equation (4).
Ordinate: Absolute value r_m of the error $(\varepsilon_m, \varepsilon_m^2)$ of the m -th approximation (x_m, y_m) .
Abscissa: Argument $\theta_{(0)}$ of the initial point $(x_{(0)}, y_{(0)})$.

の依存性を、任意の方程式に対して表わす手段を考える。

n 次元直交座標系において、原点から見た初期値の方向ベクトル (単位長) を θ とするとき、ある関数 $r(\theta)$ (>0) が存在して、任意の 2 点 $\mathbf{x}_1 = \|\mathbf{x}_1\| \theta_1$, $\mathbf{x}_2 = \|\mathbf{x}_2\| \theta_2$ に対して、

$$\frac{\|\mathbf{x}_1\|}{r(\theta_1)} < \frac{\|\mathbf{x}_2\|}{r(\theta_2)} \quad \text{ならば} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_1(m)\|}{\|\mathbf{x}_2(m)\|} = 0$$

となるとすれば、関数 $r(\theta)$ は収束の速さに関する一つの計量の役割を果すと言える。ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムとする。

第 2 節で述べる二次変換の発散収束境界は、この計量の要件をみたす。実際、 $r(\theta)$ が有界の場合、発散収束境界上の 2 点、 $\mathbf{z}_1 = r(\theta_1) \theta_1$, $\mathbf{z}_2 = r(\theta_2) \theta_2$ およびそれぞれの方向上の 2 点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を考えると、

$$\frac{\|\mathbf{x}_1(m)\|}{\|\mathbf{x}_2(m)\|} = \left(\frac{r(\theta_2(0))}{r(\theta_1(0))} \right)^{2m} \frac{\|\mathbf{z}_1(0)\|}{\|\mathbf{z}_2(0)\|}$$

となり、 $\|\mathbf{z}_1(m)\|, \|\mathbf{z}_2(m)\|$ は有限であるから、 $r(\theta)$ は計量の要件をみたし、 $r(\theta)$ が大きい方向ほど収束が速いことになる。

1.2 発散収束境界の形状

方程式(4)から、漸近的に

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{(m+1)}^1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{(m)}^1 \varepsilon_{(m)}^2, \\ \varepsilon_{(m+1)}^2 &= \frac{1}{2} (3 \varepsilon_{(m)}^1 \varepsilon_{(m)}^2 + \varepsilon_{(m)}^2 \varepsilon_{(m)}^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

が得られ、 $x = (1/2) \varepsilon_{(m)}^1$, $y = (1/2) \varepsilon_{(m)}^2$ とおくと、

$$x' = xy, \quad y' = 3xy + y^2 \quad (6)$$

なる二次変換が得られる。これは、第 3 節で述べる標準形では第 II (1) 型に属する。二次変換(6)の発散収束境界の形状を、 θ を円周上に 1 万等分して、各方向ごとに第 4 節で述べる方法で計算した結果を Fig. 2 (次頁参照) に示す。

Fig. 2 において、曲線は

$$\theta = \arctan(-3m) \quad (m=0, 1, \dots)$$

の方向で無限遠に伸びており、それ以外の方向ではなめらかである。実際、Fig. 1 において有限回で誤差ゼロとなった方向は、Fig. 2 の曲線が無限遠に伸びている方向として表わされている。

2. 二次変換の発散収束境界

本節では、二次変換の発散収束境界の厳密な定義とその性質を次元の場で論ずる。

二次変換は

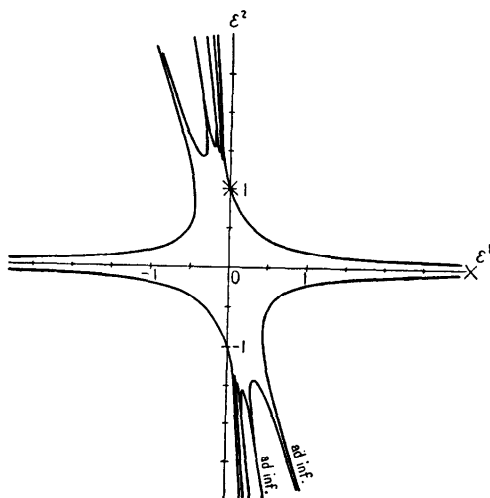


Fig. 2 Divergence-convergence boundary of the quadratic transformation (5), which corresponds to the case of $\hat{p}_1=1.5$ of the type II (1) in the canonical form.

$$x'^{\kappa} = \sum_{\lambda, \mu=1}^n P_{\lambda\mu}^{\kappa} x^{\lambda} x^{\mu} \quad (\kappa=1, \dots, n), \quad (7)$$

$P_{\lambda\mu}^{\kappa}$ は n^2 個の実数

で定義される。(7)は R^n からそれ自身への写像 f であって、点 x に対し、 $f^m(x) \equiv x_{(m)}$ と書くことにする。まず、

- <1> 原点を除く任意の点 $x \in R^n$, および任意の正数 α に対して $f(\alpha x) = \alpha^2 f(x)$

であることは明らかである。

定義 1. $C \equiv \{x \mid \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{(m)}\| = 0\}$

をみたす $C(C \subset R^n)$ を収束領域という。

この定義から、<2>~<5>がただちに導かれる。

- <2> $x \in C$ ならば、 $\alpha x \in C$ ($0 \leq \alpha \leq 1$)。

- <3> 十分小さな $l(>0)$ に対し、

$$C_l \equiv \{x \mid \|x\| < l\} \text{ とすれば、 } C_l \subset C.$$

- <4> 任意の $x \in C$ に対して、

$$f(x) \subset C \text{ かつ } f^{-1}(x) \subset C.$$

- <5> $C = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(C_l).$

定理 1. C は開集合である。

証明: <3>の集合 C_l は、原点を含む開集合であり、任意の正整数 m に対して f^m は連続であるから、 $f^{-m}(C_l)$ も開集合であり、<5>によって、 $C = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(C_l)$ もまた開集合である。 (Q. E. D.)

定義 2. n 次元単位球面 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ の要素を θ

で表わし、

$$r(\theta) \equiv \sup \{\alpha \mid \alpha \theta \in C\}$$

により定義される写像 $r: S \rightarrow R \cup \{\infty\}$ を考え、

$$B \equiv \{r(\theta) \mid r(\theta) < \infty\} \text{ を発散収束境界、}$$

$$D \equiv R^n - B - C \text{ を発散領域}$$

と呼ぶ。

- <6> $\alpha > r(\theta)$ ($< r(\theta)$) ならば、

$$\alpha \theta \in D (\in C) \text{ であり、逆も成り立つ。}$$

- <7> $B \cap C$ かつ $B \cup C \cup D = R^n$ 。

- <8> $x \in D$ ならば、 $f(x) \in D$ かつ $f^{-1}(x) \subset D$ 。

$$x \in B \text{ ならば、 } f(x) \in B \text{ かつ } f^{-1}(x) \subset B.$$

- <9> 任意の $x \in D$ に対して $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{(m)}\| = \infty$ 。

<6>~<9>を用いて、発散収束境界を与える写像 r が、

$$r(\theta) = \inf \{\alpha \mid \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_{(m)}\| = \infty\}$$

という形にも表わせることが言える。

定理 2. $r(\theta)$ は下半連続である。

証明: ある $\lambda(>0)$ に対して、 $\{\theta \mid r(\theta) > \lambda\}$ が S の開集合でないとは仮定すると、 $r(\theta_0) > \lambda$ をみたす $\theta_0 \in S$ が存在して、任意の $\delta(>0)$ に対して $\|\theta_0 - \theta\| < \delta$ をみたすある θ が $r(\theta) \leq \lambda$ をみたすことになる。この場合、 $\lambda \theta_0 \in C$ かつ $\lambda \theta \notin C$ となる。 $\delta \rightarrow 0$ とすると、 $\lambda \theta_0 \rightarrow \lambda \theta$ であるから、このことは、 C が開集合であるという定理 1 に反する。よって、任意の $\lambda(>0)$ に対して $\{\theta \mid r(\theta) > \lambda\}$ は開集合である。すなわち、 $r(\theta)$ は下半連続である。

(Q. E. D.)

定義 3. $f(x) = Ax$ (A は実数) をみたす x の方向を不動方向という。とくに $A \neq 0$ の場合を有限不動方向、 $A=0$ の場合を無限不動方向という。

定理 3. すべての二次変換は、少なくとも一つの不動方向をもつ。

このことは、Brouwer の不動点定理 [5] を用いて示することができるが、ここでは証明は省略する ([1] を見よ)。

- <10> 無限不動方向をもたない二次変換の $r(\theta)$ は有界である。

定理 4. 無限不動方向をもたない二次変換の $r(\theta)$ は θ に関して連続である。

証明: 発散収束境界の $r(\theta)$ が有界ならば、 $D_R \equiv \{x \mid \|x\| > R\} \subset D$ をみたす正数 R が存在する。 D_R は開集合であるから、<4>、<5> および定理 1 と全く同様の推論によって、任意の正整数 m に対

して $f^{-m}(D_R)$ が開集合であり、 $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(D_R)$ もまた開集合であることが示される。したがって、定理 2 と全く同じ論法で $r(\theta)$ が上半連続であることが言える。定理 2 により、 $r(\theta)$ は下半連続でもあるから、それは連続である。(Q.E.D.)

3. 2 次元二次変換の標準形および不変式系

本節では、2 次元二次変換の標準形および不変式系に関する基本的な既知の結果を、第 4 節の発散収束境界の形状に関する議論に必要な限りにおいて、整理して記述する。

(7) で表わされる二次変換の $P_{\lambda\mu}^*$ は、座標系のアフィン変換に対して反変 1 階共変 2 階のテンソルである。この $P_{\lambda\mu}^*$ を、次のようにテンソル部分 $Q_{\lambda\mu}^*$ とベクトル部分 p_λ とに分解する。

$$p_\lambda = \sum_{\kappa=1}^n P_{\lambda\kappa}^* \quad (\lambda=1, \dots, n), \quad (8)$$

$$Q_{\lambda\mu}^* = P_{\lambda\mu}^* - \frac{1}{n+1} (\delta_\lambda^\kappa p_\mu + \delta_\mu^\kappa p_\lambda) \quad (\kappa, \lambda, \mu=1, \dots, n). \quad (9)$$

ここに δ_λ^κ は Kronecker のデルタとする。

とくに、2 次元 ($n=2$) の場合、 $Q_{\lambda\mu}^*$ を別の形

$$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^2 \epsilon_{\kappa\nu} Q_{\lambda\mu}^* \quad (\kappa, \lambda, \mu=1, 2) \quad (10)$$

と書くことができる。ここに $\epsilon_{\kappa\nu}$ は、重み -1 の単位 2-ベクトル Δ 密度であって、成分は $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$, $\epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=1$, $\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}$ は重み -1 の共変 3 階テンソル Δ 密度である。 $\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}$ は、全指標について対称で、それに対応づけられる 3 次形式

$$\tilde{f} = \sum_{\kappa, \lambda, \mu=1}^2 \tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu} x^\kappa x^\lambda x^\mu \quad (11)$$

は、 $P_{\lambda\mu}^*$ の基本 3 次形式と呼ばれる。2 次元 3 次形式が、 $\tilde{f}=0$ の実根の数と重複度によって分類されることは良く知られている。

この基本 3 次形式の分類を、1 次形式 $\sum_{\kappa=1}^2 p_\kappa x^\kappa$ も考慮に入れて細分することにより、2 次元二次変換の標準形は次のように定められる。

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2xy + \frac{2}{3}x(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y), \\ y' &= -x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y); \end{aligned} \right\} \text{第 I } \ominus \text{型}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2xy + \frac{2}{3}x(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y), \\ y' &= x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y(\hat{p}_1x + \hat{p}_2y); \end{aligned} \right\} \text{第 I } \oplus \text{型}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \left(\frac{2}{3}\hat{p}_1 - 1\right)x^2 + xy, \\ y' &= \frac{2}{3}(\hat{p}_1 + 3)xy + y^2; \end{aligned} \right\} \text{第 II (1)型}$$

$$x' = \left(\frac{2}{3}\hat{p}_1 - 1\right)x^2, \quad y' = \frac{2}{3}(\hat{p}_1 + 3)xy; \quad \text{第 II (2)型}$$

$$x' = xy, \quad y' = x^2 + y^2; \quad \text{第 III (1)型}$$

$$x' = -xy, \quad y' = x^2 - y^2; \quad \text{第 III (2)型}$$

$$x' = x^2, \quad y' = x^2 + xy; \quad \text{第 III (3)型}$$

$$x' = 0, \quad y' = x^2; \quad \text{第 III (4)型}$$

$$x' = xy, \quad y' = y^2; \quad \text{第 IV (1)型}$$

$$x' = 0, \quad y' = 0. \quad \text{第 IV (2)型}$$

2 次元二次変換に対し、 $P_{\lambda\mu}^*$ の次のコンコミタントを導入する。ただし、簡単のために、(12)~(16)については、Einstein の総和記法を用いることとし、指標はすべて 1 から 2 までとする。

$$h^{\kappa\lambda} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} Q_{\mu\rho}^* Q_{\nu\sigma}^* \quad (\text{Hessian}), \quad (12)$$

ここに $\epsilon^{\mu\nu}$ は重み 1 の単位 2-ベクトル Δ 密度で、成分は $\epsilon^{11}=\epsilon^{22}=0$, $\epsilon^{21}=-\epsilon^{12}=1$ とする。

$$D \equiv -2\epsilon_{\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu}h^{\kappa\mu}h^{\lambda\nu} \quad (\text{discriminant}), \quad (13)$$

$$H \equiv h^{\kappa\lambda}p_\kappa p_\lambda, \quad (14)$$

$$F \equiv \epsilon^{\rho\lambda}\epsilon^{\sigma\mu}Q_{\lambda\mu}^*p_\rho p_\sigma, \quad (15)$$

$$G_{\kappa\lambda} \equiv -4Q_{\kappa\lambda}^*p_\rho - 3\epsilon_{\kappa\mu}\epsilon_{\lambda\nu}h^{\mu\nu}. \quad (16)$$

$h^{\kappa\lambda}$ は重み 2 の反変 2 階テンソル Δ 密度、 D, H および F は重み 2 のスカラー Δ 密度(相対不変式)、 $G_{\kappa\lambda}$ は共変 2 階テンソルである。

さらに、2 次元二次変換の重要な性質を表わす不変式系列

$$K_m \equiv F + 9(-2)^{m-3}H - 27(-8)^{m-3}D \quad (m=1, 2, \dots) \quad (17)$$

を導入する。

以上のコンコミタントを用いて、次のことが言える。

(11) 任意に与えられた 2 次元二次変換の属する標準形の型は、次のように有理的に判別できる。

$$\begin{aligned} D < 0 & \dots\dots\dots \text{第 I } \ominus \text{型} \\ D > 0 & \dots\dots\dots \text{第 I } \oplus \text{型} \\ D = 0 & \left\{ \begin{aligned} [h^{\kappa\lambda}] \neq 0 & \left\{ \begin{aligned} H \neq 0 & \dots\dots\dots \text{第 II (1)型} \\ H = 0 & \dots\dots\dots \text{第 II (2)型} \end{aligned} \right. \\ [h^{\kappa\lambda}] = 0 & \left\{ \begin{aligned} [Q_{\lambda\mu}^*] \neq 0 & \left\{ \begin{aligned} F > 0 & \dots\dots \text{第 III (1)型} \\ F < 0 & \dots\dots \text{第 III (2)型} \\ F = 0 \cap [p_\lambda] \neq 0 & \dots\dots \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

…第Ⅲ(3)型
$[p_{\lambda}] = 0$
…第Ⅲ(4)型
$-[Q_{\lambda\mu}] = 0 - [p_{\lambda}] \neq 0$ …第Ⅳ(1)型
$[p_{\lambda}] = 0$ …第Ⅳ(2)型

次に Newton 法の収束過程において、解への近付き方、たとえば渦状か直線的か等、を考えるのに役立つ二次変換の不変量について考察する。一次変換では、固有値と固有ベクトルによりその構造は定められるが、二次変換では、これに対応する簡明な概念が見つからない。しかし、[1]の結果を整理すれば、次のことが言える。

不動方向上の点の収束は直線的であり、とくに無限不動方向上の点は1回の変換で収束する。まず、2次元二次変換の無限不動方向の存在については、(17)の不変式を用いて、

(12) 2次元二次変換に無限不動方向が存在するのは、次の場合であってそのときに限る。

第Ⅰ⊖型では $K_2=0$,

第Ⅰ⊕型では $K_2=0$ かつ $K_3 \neq 0$,

第Ⅱ(1)型では $K_2=0$ 。

これ以外の型には、つねに無限不動方向が存在する。

不動方向の近傍の点については、不動方向に近づくか否かという性質がアフィン不変であり、上記の問題の解明に役立つ。

定義 4. 不動方向 θ_0 の近傍にある任意の方向 θ に対して

$$\|\theta - \theta_0\| > \|\theta_{(1)} - \theta_0\|$$

が成り立つとき、不動方向 θ_0 は安定であるという。

(13) 2次元二次変換の安定な不動方向の数は、次の Table 1 の通りである。

本節のこれまでの議論で、任意に与えられた2次元方程式系について、有理演算のみによって、不動方向の数、重複度、安定性さらに無限不動方向の存在の判別が可能となった。これは、Newton 法収束過程での方向性を知る有力な手がかりとなっている。次節では、収束の速さを与える計量、すなわち発散収束境界の形状について検討する。

4. 2次元二次変換の発散収束境界の形状

発散収束境界は、2次元の場合でも、後述するように微係数を持たない点が稠密に存在する部分があると

Table 1 Numbers of stable and unstable fixed directions. The $\pm$ sign means a 'non-vanishing' number, and the empty column of K_2 means 'any' number.

型	K_1	K_2	安定的	不安定的	型	K_1	安定的	不安定的
第Ⅰ⊖型	+	+	2	1	第Ⅱ(1)型	+	1	1
	+	-	0	3		-	0	2
	-		1	2		0	1	1
	0	$\pm$	1	2	第Ⅱ(2)型	$[G_{\lambda\lambda}] \neq 0$	1	1
	0	0	0	3		$[G_{\lambda\lambda}] = 0$	0	2
第Ⅰ⊕型	+		1	0	第Ⅲ(1)型		1	0
	-		0	1			0	1
	0	$\pm$	1	0			0	1
	0	0	0	1			0	1

か、微係数をもたない点の集合が Cantor 集合をなすというような病的な形状があり、きわめて複雑な形状をしている。本節では、肉眼では識別できない誤差 (0.002cm 以下) の範囲で作図する方法ならびにその結果を示す。

4.1 発散収束境界の計算および作図

$r(\theta)$ の計算方法は次の通りである。まず方向 θ を円周の1万等分点

$$\theta_i = \frac{2\pi}{10000} i \quad (i=1, \dots, 10000)$$

で与え、各 θ_i に対して、 $\theta_{(0)} = \theta_i$, $r_{(0)}(\theta_{(0)}) = 1$ を初期値として次の手続きを反復する。

$$1^\circ \quad x_{(0)} = r_{(0)} \cos \theta_{(0)},$$

$$y_{(0)} = r_{(0)} \sin \theta_{(0)}$$

として 2° へ行く。

$$2^\circ \quad x_{(m)} = f^1(x_{(m-1)}, y_{(m-1)}),$$

$$y_{(m)} = f^2(x_{(m-1)}, y_{(m-1)}),$$

$$r_{(m)} = ((x_{(m)})^2 + (y_{(m)})^2)^{1/2}$$

とする。ただし、 f^1, f^2 は $P_{\lambda^1}, P_{\lambda^2}$ で与えられる2次形式である。

$m < 15$ で $r_{(m)} > 10^{30}$ または $r_{(m)} < 10^{-30}$ となれば 3° へ行く。 $m = 15$ で

$$10^{-30} < r_{(15)} < 10^{30}$$

であれば、 4° へ行く。いずれでもないときは $m = m+1$ として 2° をくりかえす。

$$3^\circ \quad r_{(0)} := r_{(0)}/r_{(15)} r_{(m)}^{2^{-m}}, \text{ とした後に } m=1 \text{ として } 2^\circ \text{ へ行く。}$$

$$4^\circ \quad \hat{r} = r_{(0)}/r_{(15)} 2^{-15} \text{ として、} \hat{r} \text{ を } r(\theta_i) \text{ の最終近似とする。}$$

4.2 誤差評価

$r(\theta)$ が有界の場合についての評価は次の通りである。任意の正整数 m に対し、

$$r_{(m)} = r_{(0)} \cdot 2^m G_m,$$

$$G_m \equiv \sum_{k=1}^m [\log r_{(k)} - 2 \log r_{(k-1)}] \quad (18)$$

とおくことができる。 $r(\theta)$ の正しい値を r^* とし、 2° から 4° へ進んだときの $r_{(0)}$ を $\bar{r}$ とおく。このとき、(18)から

$$\log \bar{r}_{(15)} - \log r_{(15)}^* = 2^{15} (\log \bar{r} - \log r^*), \quad (19)$$

および 4° の定義によって

$$\log \bar{r} = \log \bar{r} - 2^{15} \log \bar{r}_{(15)} \quad (20)$$

がなりたつ。したがって

$$\bar{r} - r^* = r^* (r_{(15)} 2^{-15} - 1). \quad (21)$$

与えたすべてのデータ $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ に対して

$$0.1 < r < 16.0$$

が得られており、各々の図において、 r の最大値が、原点から3.6cmとなるように作図したので、

$$-0.0014 < \bar{r} - r^* < 0.0012 \text{ (cm)}$$

が得られる。

この差 $\bar{r} - r^*$ は、使用したXY-Plotter (Calcomp 563)の動作限界0.01cmより十分小さいものである。

4.3 発散収束境界図例

2次元二次変換の標準形の各型ごとに、パラメータを含むものはその値を K_1, K_2, K_3 の符号によって選定し、4.1の方法で計算した発散収束境界の図[153]例を資料[7]に示したが、本節では、そのうちパラメー

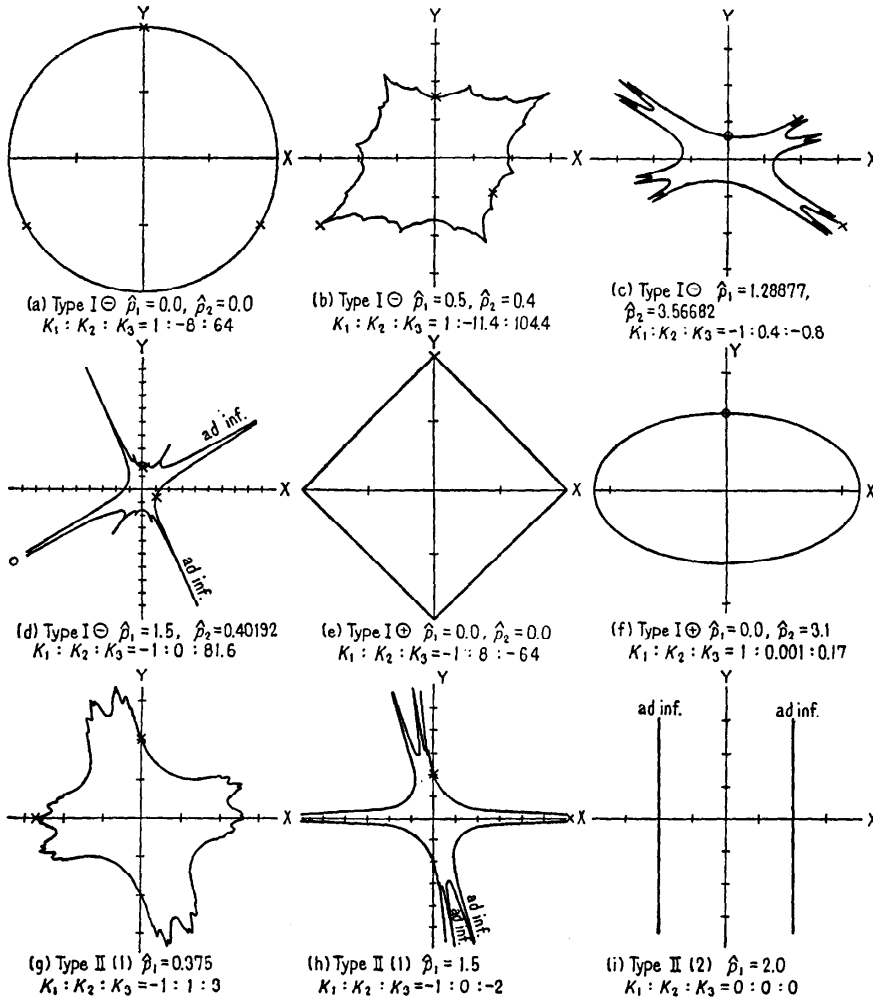


Fig. 3 Divergence-convergence boundaries of two-dimensional quadratic transformations.

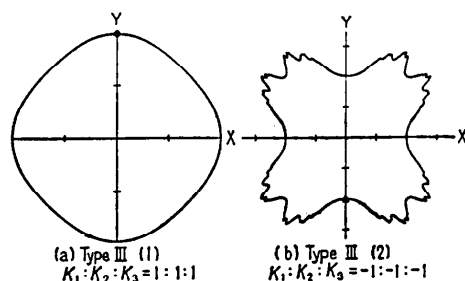


Fig. 4 Divergence-convergence boundaries of the type-III (1) and type-III (2) quadratic transformations.

タを含む型 (I $\ominus$, I $\oplus$, II(1), II(2)型) から特徴ある 9 例を Fig. 3 (前頁参照) に, パラメータを含まぬ型から III(1), III(2)型を Fig. 4 に示した.

III(3)型, IV(1)型の発散収束境界は, それぞれ, $x=\pm 1, y=\pm 1$ であり, III(4)型, IV(2)型については, 有限の場所に存在しない.

Fig. 3, Fig. 4 とともに, X, Y 軸の目盛りは, すべて 0.5 きざみであり, 不動点には, $\circ, \times, *$ の記号が付されているが, $\circ$ は安定, その他は不安定である (詳細は, [1] および [7] を参照されたい).

病的な形状をもつ曲線として, (c) および (g) が挙げられる.

(c) は, 微係数を持たない点の集合が Cantor 集合をなす. 実際, なめらかな凹曲線分 (両端は微係数をもたない) が, ある間隙において可付番個ならび, それぞれの間隙には, またなめらかな曲線分が間隙において可付番個ならび……という構造をもつ.

(g) は $y/x < 3/4$ の範囲において, 微係数をもたない点が稠密に存在する.

む す び

Newton-Raphson 法の収束過程において, 解近傍

における挙動, とくに方向による収束の速さの差違は, 対応する二次変換の発散収束境界によって決定される. 発散収束境界は下半連続な超曲面であり, 有界な場合は連続である. 2次元の場合には, 発散収束境界の形状を特徴づける不変式が [1] で得られていることを利用して, 特徴的な発散収束境界を図示した. より精密な発散収束境界の形状解析は今後の課題である.

なお, 論文作成にあたり, 討論いただいた伊理正夫 東京大学教授に深く感謝する.

参 考 文 献

- 1) T. Date and M. Iri: Canonical Forms of Real Homogeneous Quadratic Transformations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 56, No. 3, pp. 650~682 (1976).
- 2) W.G. Hwang and J. Todd: A Recurrence Relation for the Square Root, Journal of Approximation Theory, Vol. 9, No. 4, pp. 299~306 (1973).
- 3) J. A. Schouten: Ricci-Calculus (2nd ed.), Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1954).
- 4) G.B. Gurevich: Foundations of the Theory of Algebraic Invariants, P. Noordhoff Ltd., Groningen (1964).
- 5) S. Lefschetz: Algebraic Topology, American Mathematical Society, New York (1942).
- 6) E.B. Elliott: An Introduction to the Algebra of Quantics, Clarendon Press, Oxford (1913).
- 7) T. Date: Portraits of the Divergence-Convergence Boundaries of Two-Dimensional Real Homogeneous Quadratic Transformations, 未発表資料.

(昭和 52 年 7 月 6 日受付)

(昭和 52 年 11 月 4 日再受付)