

資料

有理分数関数の設計について*

吉田 二郎**

Abstract

On the design for a fractional rational function, I compared the algorithm of Davidon-Fletcher-Powell with it of Gauss-Newton.

In the result, it was found that the first, when the difference of the initial value and the specification was large, was more useful. Now in this paper I deal with an inverse transmission function with a pole on an electric filter as an example of a fractional rational function.

まえがき

有理分数関数（以下分数関数と略す）の設計とは、1つの変数と分数関数の値の組のいくつか（以下仕様とよぶ）を与えて、分数関数の係数の内より選ばれたものの値を求めることである。分数関数上の用語を、設計アルゴリズム上の用語で意味づけるならば、分数関数の選ばれた係数は、設計パラメータであり、分数関数は、設計関数である。分数関数の設計アルゴリズムは、“設計関数値と仕様との誤差の2乗和を最小にするような設計パラメータを求めよ。”という最小化アルゴリズムに帰着される。本論文は分数関数として、電気回路網の有極型反伝送関数を取りあげ、2つの最小化アルゴリズムについて比較検討した。すなわち、逆行列計算を含む Gauss-Newton の推定¹⁾（以下 GN と略す）と Davidon-Fletcher-Powell の公式²⁾（以下 DFP と略す）である。比較してみようという理由は、GN の推定は従来一般に使われてきた方法であるが、DFP の公式を分数関数に適用されている文献を今だ見たことがないからである。結果として、DFP が GN と比べてすべてによいということは得られなかったが、初期値と仕様の差が大きいときも安定して収束することがわかった。なお分数関数は、電気回路網の反伝送関数を取りあげたので、対数化された形でとりあ

つかった。

1. 反伝送関数

Fig. 1 において反伝送関数は

$$T(s) = \frac{E_0}{E_2} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{NR + jNI}{DR + jDI}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1-1)$$

E_0 : 電源電圧, E_2 : 負荷電圧

$s = jx$, x は角周波数とおくと

$$T(jx) = \frac{\sum_{i=1}^{n_n} (jx)^{i-1} a_i}{\sum_{i=1}^{n_d} (jx)^{i-1} b_i} \quad (1-2)$$

(1-1), (1-2) より

$$NR = \sum_{i=1,2}^{n_n} c_i \cdot a_i, \quad NI = \sum_{i=2,2}^{n_n} c_i \cdot a_i,$$

$$DR = \sum_{i=1,2}^{n_d} c_i \cdot b_i, \quad DI = \sum_{i=2,2}^{n_d} c_i \cdot b_i$$

n_n は分子の項の個数, n_d は分母の項の個数

$\sum_{i=k,j}^n c_i a_i$ は、 i を k から n 以下の最大整数まで j ずつ増したときの c_i と a_i の積と和

$$c_i = \text{sign}(1 - \text{mode}((i-1), 4)) \cdot x^{i-1}$$

$\text{sign}(x)$ は、 x の符号, $\text{mode}(x, y)$ は、 x/y の剰余

次に、 $D2 = DR^2 + DI^2$, $N2 = NR^2 + NI^2$ とおくと

$$|T(jx)| = \sqrt{N2/D2} \quad (1-3)$$

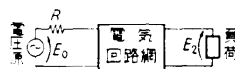


Fig. 1 An electronic circuit.

* On a Design for a Fractional Rational Function by Jiro YOSHIDA (Computer Room, Faculty of Engineering, Shizuoka University).

** 静岡大学工学部電子計算機室

対数化された反伝送関数を

$$f_p = 20 \cdot \log_{10} |T| = 10(\log_{10} N2 - \log_{10} D2) \quad (1-4)$$

とおく。係数 a_i または b_i に対する f_p の感度は、

分子にある係数 a_i に対して

$$\frac{\partial f_p}{\partial a_i} = K \frac{NX}{N2} \cdot c_i$$

分母にある係数 b_i に対して

$$\frac{\partial f_p}{\partial b_i} = -K \frac{DX}{D2} \cdot c_i$$

ここで、 $K=2/\log_{10} 10$, X は i が偶数のとき I , 奇数のとき R . $|T|$ は、 T の絶対値。

2. 設計パラメータ, 設計関数, 仕様

(1-2)式の係数 $\{a_i, b_i\}$ の内, 設計パラメータとして選ばれた係数をまとめて, $\{p_k\}$ とする。各角周波数 x_i に対する (1-3)式の値を T_{pi} , また仕様を T_{si} とおく。

$$f_{pi} = 20 \log_{10} |T_{pi}| \quad (2-1)$$

$$f_{si} = 20 \log_{10} |T_{si}| \quad (2-2)$$

とおき, 最小化問題と関連づけるため, f_{pi} を設計関数, f_{si} を仕様とよぶことにする。

3. 最小化関数

(2-1), (2-2)より

$$f_i = f_{pi} - f_{si}, \quad i=1, m \quad (3-1)$$

において, 最小化関数 F を

$$F \equiv f_i \cdot f_i \quad (3-2)$$

で定義する。問題は F を最小にする設計関数 f_{pi} の設計パラメータ $\{p_k\}$ をもとめることである。ここで

$$f_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^m f_i \cdot f_i \text{ であり以下同様。}$$

次に4章の準備を述べておく。

p_k に対する F の勾配を q_k とおくと (3-1), (3-2) を使って,

$$q_k \equiv \frac{\partial F}{\partial p_k} = 2 f_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial p_k} = 2 f_i \cdot A_{ik} \quad (3-3)$$

ここで, $A_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial p_k}$

p_j に対する q_k の勾配は

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_j} \equiv 2 \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \cdot A_{ik} = 2 A_{ij} \cdot A_{ik} \quad (3-4)$$

4. 最小化アルゴリズム

i) Gauss-Newton の推定¹⁾

アルゴリズム

① $f^{(i)}, F^{(i)}, A^{(i)}$ を計算し $F \leq \varepsilon$ のとき停止する。

$$\textcircled{2} \quad dp^{(i)} = -(A^{(i)T} A^{(i)})^{-1} A^{(i)T} \cdot f^{(i)}$$

$$\textcircled{3} \quad p^{(i+1)} = p^{(i)} + dp^{(i)}$$

初期値 $p^{(0)}$ から始めて, ①, ②, ③の順でくりかえす。

右肩の (i) は, くりかえし回数を表わす。 A^T は A の転置行列, ε は結果が精度以内におさまるような小さな実数値, 以下同じ意味で用いる。

説明

(3-3)を (i) 回目の p について, テーラー展開すると,

$$q_k^{(i+1)} \approx q_k^{(i)} + dp_j^{(i)} \cdot \frac{\partial q_k^{(i)}}{\partial p_j}$$

となり, $q_k^{(i+1)} = 0$ とおいて,

$$\frac{\partial q_k^{(i)}}{\partial p_j} \cdot dp_j^{(i)} = -q_k^{(i)}$$

を得るから, (3-4)を用いて,

$$A_{ij}^{(i)} A_{ik}^{(i)} dp_j^{(i)} = -f_i^{(i)} A_{ik}^{(i)}$$

$$\therefore A^{(i)T} A^{(i)} dp^{(i)} = -A^{(i)T} f^{(i)}$$

f_i が $i=1, m$, p_k が $K=1, n$ とすると, $m \geq n$ のとき $(A^T A)$ の逆行列が存在し得る。

ii) Davidon-Fletcher-Powell²⁾ の公式
アルゴリズム

① $f^{(i)}, F^{(i)}, q^{(i)}, H^{(i)}$ を計算し, $F \leq \varepsilon$ のとき停止

$$\textcircled{2} \quad S^{(i)} = -H^{(i)} \cdot q^{(i)}$$

③ $\min_{\alpha^{(i)}} F(p^{(i)} + \alpha^{(i)} \cdot S^{(i)})$, $p^{(i)}$ 点をとおり, S 方向の直線上の F の最小点に対する $\alpha^{(i)}$ を求める。このことは, 直線探索とよばれている。

$$\textcircled{4} \quad dp^{(i)} = \alpha^{(i)} \cdot S^{(i)}$$

$$\textcircled{5} \quad p^{(i+1)} = p^{(i)} + dp^{(i)}$$

初期値 $p^{(0)}$ より $f^{(0)}, F^{(0)}, q^{(0)}$ を求めておく。
 $H^{(0)}$ は単位マトリックスから始めて, ①~⑤の順でくりかえす。

説明

方向 $S^{(i)}$ を決定する $H^{(i)}$ は, n 変数最小化関数 F が, 2次関数のときは, n ステップ目に収束するように定められ次の公式が用いられる。

$$H^{(i+1)} = H^{(i)} + \frac{dp^{(i)} \cdot dp^{(i)T}}{dp^{(i)T} \cdot dq^{(i)}} - \frac{H^{(i)} \cdot dq^{(i)} \cdot dq^{(i)T} \cdot H^{(i)}}{dq^{(i)T} \cdot H^{(i)} \cdot dq^{(i)}} \quad (4-1)$$

上述のことを更に説明すると,

$F=c+ap+p^TGp$ とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial p} \equiv g = a + Gp \text{ である.}$$

従って (i) 回目の表現は,

$$g^{(i)} = a + G \cdot p^{(i)} \quad (4-2)$$

アルゴリズム③より

$$dp^{(i+1)} \cdot g^{(i+1)} = 0 \quad (4-3)$$

がなりたつので, $H^{(i)}$ に関して

$$H^{(i+1)} G d p^{(i)} = d p^{(i)} \quad (4-4)$$

がなりたてば, (4-2)~(4-4) より, (4-1) が導かれ, n ステップ目に収束することが帰納的に証明されている²⁾.

従って, 分数関数の設計に際しては, (3-2) 式の F を 2 次関数で近似しながら解いてゆくことになる.

次に, (ii) にあらわれた直線探索アルゴリズムは, 次の (iii) (iv) を用いた. テスト結果は (iii) の方がわずかに良いようなので, ここで述べる設計には (iii) を用いた.

iii) 3点2次近似法^{3),4)}

アルゴリズム

最初に適当なきざみ幅の 2 点を取り, 関数値を求めておく. 2 点の関数値の内, 小さくなる方向へ 1 きざみすすめてもう 1 つ新しい点をとって置く.

① 新しい点の関数値を求め, 3 点により 2 次近似式をあてはめる.

② 近似式が直線または下に凹のときは, 関数値の小さい方へ向って 1 きざみすすめて新しい点をとる. 他方の端点は捨てて①へもどる.

③ 近似式が下に凸であって, 3 点の関数値の内の最小点 (以下 3 点最小点とよぶ) と, 2 次近似式で計算した関数の最小点 (以下 2 次式最小点とよぶ) との間の距離が 1 きざみ幅をこえているときは, 関数値が小さくなる方へ向って 1 きざみ幅すすめて新しい点をとる. 他方の端点は捨てて①へもどる. そうでなければ④へすすむ.

④ 1 きざみ幅以内でも精度をこえているときは, 2 次式最小点を新しい点とし, 関数値の大きい端点は捨てて①へもどる. そうでなく 3 点最小点と 2 次式最小点の距離が, 精度以内ならば, 2 次式最小点を答とし, 終了する.

iv) 2点勾配3次近似法²⁾

アルゴリズム

1 つの点の関数値と勾配を求めておく. DFP で定められた方向へ 1 きざみ幅すすめて, もう 1 つの新し

い点をとって置く.

① 新しい点の関数値と勾配を求めて, きざみ幅, 関数値, 勾配のいずれかがある値以下のとき終了する. 2 点の勾配の積が正のときは, ②へまた負のとき③へすすめる.

② 関数値の小さい方へ 1 きざみ幅すすめて新しい点を取り, 大きい方の端点は捨てる. 1 きざみ幅を 2 倍にして①へもどる.

③ 2 点の関数値と勾配より, 3 次式をあてはめ, その最小値を新しい点とする. 1 きざみ幅を 10 分の 1 にして, ①へもどる.

5. 2つのアルゴリズムの比較結果

ここで設計される反伝送関数は, 有極型低域波回路網の関数^{5),6)}であり, 抵抗, インダクタ, キャパシタで構成される受動回路網で実現できる関数を目標とする.

5.1 初期関数が仕様に近いとき

設計パラメータは, 分子の係数 6 個, 分母の係数 3 個である. 仕様は 20 点. 初期関数は次のとおり.

$$T(s) = \frac{6.0622s^5 + 12.125s^4 + 15.588s^3 + 13s^2}{0.0625s^4} \times \frac{+6.9282s + 2}{+0.5s^2 + 1}$$

結果を Table 1, Fig. 2 にあげる.

Table 1 The results for an inverse transmission function.

アルゴリズム	最終20点 2乗誤差 (dB ²)	関数呼出 し回数	逆行列 計算回数	方向決定 回数	計算時間 (秒)
DFP	101.34	196		16	17.9
GN	101.34	6	5		2.09

初期 20 点 2 乗誤差は 500.59 dB²

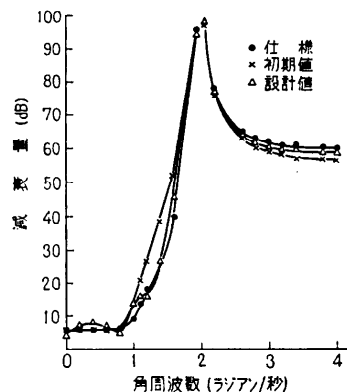


Fig. 2 The attenuation characteristics.

DFP の結果は

$$T(s) = \frac{11.133s^5 + 5.918s^4 + 25.989s^3}{0.079943s^4 + 0.64062s^2} \times \frac{+9.5952s^2 + 11.675s + 2.2078}{+1.2829}$$

GN の結果は

$$T(s) = \frac{8.6779s^5 + 2.2859s^4 + 19.329s^3}{0.06234s^4 + 0.49955s^2} \times \frac{+6.0363s^2 + 8.8135s + 1.7212}{+1.0004}$$

いずれの場合も極の根に、正の実数部が 10^{-5} のオーダーで含まれるが、虚数部は 1 のオーダーなので無視できる。極は虚軸にあるとして、分子の多項式が n 次の関数のとき、同一の周波数特性をもつ関数は、 2^n 個あり、ここで扱ったアルゴリズムではどの関数に落着くかわからない。結果の零点の一部が S 平面の右半平面にあるとき、虚軸に対称に左半平面に移しかえることにより、特性をかえることなく所要反伝送関数を得ることができる。DFP による零点はすべて左半平面にあるが、GN による零点の 1 部は右半平面にあるので、これらを、左半平面に移した結果が次の関数である。なお、分母分子に 1.2824 倍してある。

$$T(s) = \frac{11.133s^5 + 5.9194s^4 + 25.985s^3}{0.079943s^4 + 0.64061s^2} \times \frac{+9.6016s^2 + 11.664s + 2.208}{+1.2829}$$

これは DFP の結果とほとんど一致していることがわかる。零根の内、共役でない根が 1 つあるが、虚数部が 10^{-8} なので 0 とみなし、多項式は実係数を保っている。

5.2 初期関数が仕様から十分離れているとき

設計パラメータは分子の係数 6 個である。仕様は 20 点。初期関数は次のとおり。

$$T(s) = \frac{s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}{0.0625s^4 + 0.5s^2 + 1}$$

結果を Table 2, Fig. 3 にあげる。

DFP の結果は

Table 2 The results for an inverse transmission function.

アルゴリズム	最終 20 点乗誤差 (dB)	関数呼出し回数	方向決定回数	計算時間 (秒)
DFP	105.62	302	16	24.2
GN	発散			

初期 20 点乗誤差は、3354 dB

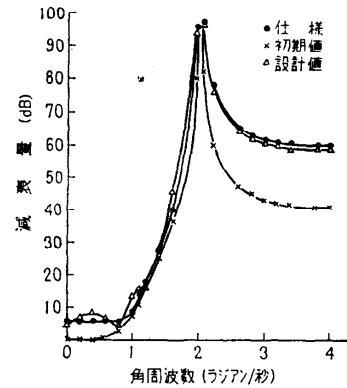


Fig. 3 The attenuation characteristics.

$$T(s) = \frac{8.9172s^5 + 1.272s^4 + 19.567s^3}{0.0625s^4} \times \frac{+1.901s^2 + 8.0751s + 1.719}{+0.5s^2 + 1}$$

GN の結果は発散する。

3 個の零点が右半平面にあるが、4-1 の GN の結果と同様なことがいえる。

6. Rosenbrock 関数によるプログラムのチェック結果

本論文で用いたプログラムの正当性を与えるためにテスト関数について、以下の結果を得ている。

Rosenbrock 関数は

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \text{ である。}$$

スタート・ポイントは $(-1.2, 1.0)$ である。

GN によるときは、以下の 2 つの関数に分解する。

$$\begin{cases} f_1 = 10(x_2 - x_1^2) \\ f_2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

結果を Table 3 にあげる。

Table 3 The results for rosenbrock function.

アルゴリズム	誤差	関数方向 呼出し回数	決定 回数	答	計算時間 (ミリ秒)
DFP (3点2次 近似法)	0.90477×10^{-8}	111	18	(0.9984, 0.99655)	634
DFP (2点勾配 3次式近似法)	0.83209×10^{-8}	110	19	(1.0000, 0.99992)	630
GN	0.68563×10^{-81}	3		(1.0000, 1.0000)	28
文献 ²⁾	1×10^{-8}	?	18	?	?

7. むすび

反伝送関数の設計において、初期関数値と仕様の差

が小さいときは、古典的な GN の公式が、DFP の公式よりも明らかに良好な結果が得られたが、差が大きくなると、DFP の公式が計算時間はかかるが安定していることがわかった。

なお計算機は FACOM-45 S を使用した。

参 考 文 献

- 1) L. C. W. ディクソン著／松原正一訳：非線形最適化計算法，p. 243，培風館（1974）。
- 2) R. Fletcher, M. J. D. Powell: A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization,

The Computer Journal, 6, pp. 163~68 (1963).

- 3) M. J. D. Powell: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, The Computer Journal, 7, pp. 155~162 (1964).
- 4) 松本欣二著：フォートランプログラミング，p. 247，朝倉書店（1972）。
- 5) 永井健三，神谷六郎共著：伝送回路網学（上巻），p. 174，コロナ社（1961）。
- 6) 川上正光著：回路網の構成，p. 154，共立出版（1962）。

（昭和 51 年 8 月 25 日受付）