テクニカルノート

適応型合意形成モデルの基本性質

塩 村 尊†

本稿の目的は，適応型合意形成過程に関する基本モデルが確率行列によって特徴付けられる正値線形システムに帰着することを明らかにし，系の不動点が初期選好インデックスと確率行列の単純 Frobenius 根に対応する左固有ベクトルから算出することができること，適応係数に関する標準的な仮定の下で選好インデックスが必ず収束することを示すことにある．さらに，適応係数ベクトルのスカラー倍を別にして不動点は一意であることも証明する．最後に，集団構成員が互いに直接，意見交換を行うことによって合意形成を行う 2 つのモデル，すなわち同時調整過程と逐次調整過程を提示し，これらの選好インデックス収束条件を与える．

Fundamental Properties of Models of Adaptive Consensus Formation

Takashi Shiomura†

The purpose of the paper is to show that a basic model of adaptive consensus formation reduces to a positive linear system characterized by a stochastic matrix, and its fixed point can be found directly by using initial conditions and a left eigenvector associated with the Frobenius root. A sequence generated by the system arrives at a certain fixed point under suitable conditions. A fixed point is unique up to the multiplication by scalars. We present two decision-making models in which each member directly exchanges his or her own view with the others, and investigate convergence conditions.

1. はじめに

高橋，生天目[1),2)] が考察した集団的意思決定モデルは個人が集団全体の選好を集約したマクロ情報を参照しつつ自己の選好を修正し，合意形成を図ろうとするものである．この適応型合意形成モデルにはいくつかの問題点があることが指摘されているが[3)]，これは集団的意思決定過程における個人の集団への適応という側面に焦点を当てたいわば雛形であり，現実の意見集約システムとして機能することが必ずしも求められるものではない．しかしながら一方で，これが合意形成過程の基礎モデルであるがゆえに，種々の拡張，シミュレーションの実行にあたり，その基本的性質を把握しておくべきものである．

本稿の目的は上に述べた集団的意思決定モデルの基本となるモデル（文献 1)，p.3589 のモデルを以下では基本モデルと呼ぶ）が確率行列によって特徴付けられる正値線形システムに帰着することを示し，いくつかの性質を理論的に導くことにある．さらには，個人が直接他者と意見交換を行い，すなわちミクロ情報を参照しつつ自己の選好を修正し，集団としての合意を形成する 2 つのモデルを提示し，これらの選好インデックス収束条件についても考察する．

2. 固有ベクトルと不動点

以下の議論において I，$J \geq 2$ とし，一般にベクトル $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_J)$ のノルムを絶対値ノルムで与える．ただし，ベクトルの要素が複数の添字を持つ場合，当該ベクトルのノルムは，つねに添字 j に関して集計した絶対値ノルムであると約束する．また，ベクトルを規準化するとは自身のノルムがゼロではないとき，ベクトルの各要素をノルムで除したことを意味している．

時刻 t における選択肢 j，$j = 1, 2, \ldots, J$ に関するエージェント i，$i = 1, 2, \ldots, I$ の規準化した選好インデックスを $x_{tj}^{(i)} > 0$ で表し，

$$\boldsymbol{x}_t^{(i)} \equiv (x_{t1}^{(i)}, x_{t2}^{(i)}, \cdots, x_{tJ}^{(i)})$$

と定義する．一方，時刻 t における選択肢 j に関す

† 関西大学総合情報学部
Faculty of Informatics, Kansai University

る集団の選好インデックスを $G_{tj} \equiv \sum_i x_{tj}^{(i)}$ で表し，これを規準化したものを z_{tj} で表す．このとき，基本モデルはエージェント i の選択肢 j に関する力学系を

$$x_{t+1j}^{(i)} = \alpha_i(z_{tj} - x_{tj}^{(i)}) + x_{tj}^{(i)} \tag{1}$$

と想定している．ここで，α_i はエージェント i の適応係数（適応度）である．任意の $t > 0$ に対して $||\boldsymbol{x}_t^{(i)}|| = ||\boldsymbol{x}_0^{(i)}||$ であることに注意されたい．

上の合意形成過程においては，任意の $\alpha_i \neq 0$ について，すべての選択肢に関して各エージェントの選好インデックスが集団のそれと一致するという意味において集団が合意に至ることと，各エージェントの選好インデックスの更新が停止することとは同値である．この結果，式 (1) の不動点，$\bar{x}_j^{(i)}$，$1 \leq i \leq I; 1 \leq j \leq J$ が存在するとき，任意の j について $\bar{x}_j^{(i)} = \bar{x}_j^{(k)}$，$i \neq k$ となる．すなわち，不動点において各エージェントの選好インデックスは共通の値を持つようになる．

ところで，式 (1) は

$$\begin{aligned} x_{t+1j}^{(i)} &= \alpha_i \left(\sum_k x_{tj}^{(k)}/I - x_{tj}^{(i)} \right) + x_{tj}^{(i)} \\ &= \kappa\alpha_i \left(\sum_{k \neq i} x_{tj}^{(k)}/(I-1) - x_{tj}^{(i)} \right) + x_{tj}^{(i)} \end{aligned} \tag{2}$$

と書き改めることができる．ただし，$\kappa \equiv (I-1)/I < 1$ である．今，$0 \leq \alpha_i \leq 1/\kappa, i = 1, 2, \ldots, I$ を仮定し，第 i 要素を $1 - \kappa\alpha_i$ とし，残り $I-1$ 個のすべての要素を α_i/I とする行ベクトル

$$\boldsymbol{k}^i \equiv (\alpha_i/I, \cdots, \alpha_i/I, 1 - \kappa\alpha_i, \alpha_i/I, \cdots, \alpha_i/I)$$

を第 i 行に持つ非負行列 K を定義する．任意の行について要素の和が 1 になることに注意されたい．したがって K は確率行列である．このとき，式 (1) と同値な力学系 (2) は正値線形システム[4)]

$$\boldsymbol{x}_{t+1j} = K\boldsymbol{x}_{tj} \tag{3}$$

として記述することができる．ただし，

$$\boldsymbol{x}_{tj}^T \equiv (x_{tj}^{(1)}, x_{tj}^{(2)}, \cdots, x_{tj}^{(I)})$$

である．K は選択肢によらないことに注意されたい．このことから，もし極限行列 $\bar{K} \equiv \lim_{t\to\infty} K^t$ が存在するならば，不動点 $\bar{x}_j^{(i)}$，$j = 1, 2, \ldots, J$ は

$$\bar{\boldsymbol{x}}_j = \bar{K}\boldsymbol{x}_{0j} \tag{4}$$

により与えられることが分かる．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{x}}_j^T \equiv (\bar{x}_j^{(1)}, \bar{x}_j^{(2)}, \cdots, \bar{x}_j^{(I)})$$

である．

それでは，どのような条件の下で $\bar{K}$ が存在し，それはどのような要素を持つのであろうか．この問いに対しては Markov 連鎖の基本極限定理[4),5)] が明快な解答を与える．これを定理 1 としてまとめておく．

定理 1 確率行列 K に対して，ある正整数 m が存在し，$K^m > O$ が成り立つものとする．このとき，すべての行を K の単純 Frobenius 根，1 に対応する，すべての要素が正である左固有ベクトルとして $\bar{K}$ が確定する．

特に，$0 < \alpha_i < 1/\kappa$，$i = 1, 2, \ldots, I$ の下では $K > O$ となるため，$m = 1$ として定理の条件を満たすことに注意されたい．定理 1 の条件が満たされるものとして，式 (4) は点列 $\{\boldsymbol{x}_{tj}\}$ の逐次計算によらない式 (1) の不動点の算出方法を与えるが，このことからも不動点において各エージェントの選好インデックスが共通の値を持つことが確認される．

式 (3) より不動点は K の固有値 1 に対応する右固有ベクトルでなければならないが，これは $\bar{\boldsymbol{x}}^T \equiv (\mu, \mu, \cdots, \mu)$，ただし $\mu \neq 0$ なるベクトルであり，スカラー倍を別にして式 (4) の結果と一致する．また，K が固有値 1 を持つため，不動点は漸近安定ではないことが分かる．実際，式 (4) から不動点は適応係数とともに初期選好インデックスに依存している．

次の 2 つの定理は文献 1) pp.3589–3592 のシミュレーション結果を理論的に裏付けるものである．

定理 2 $I = J$，かつ定理 1 の条件が満たされるものとする．このとき，同質的集団におけるエージェントが循環的選好関係を持つならば，選択肢間の順位付けを行うことはできない．

証明：同質的集団においてはすべてのエージェントの適応係数が等しいため，K の 1 に対応する規準化した左固有ベクトルはすべて同じ要素，$1/I$ を持つ．他方，エージェントが循環的選好関係を持つ場合，任意の j について $\sum_k x_{0j}^{(k)} = 1$ となり，式 (4) より集団の選好インデックスの極限値が共通の値，$1/I$ になる． ∎

定理 2 より，循環的選好関係を持つ同質的集団が選択肢間の順位付けを行うためには，エージェント間で適応係数が異なることが必要であることが分かる．

定理 3 適応係数 α_i と正数 λ が，$0 \leq \alpha_i \leq 1/\kappa$，かつ $0 \leq \alpha_i \leq 1/(\lambda\kappa)$，$i = 1, 2, \ldots, I$ を満たし，さらに適応係数ベクトル $\boldsymbol{a} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_I)$ と $\lambda\boldsymbol{a}$ に対応する極限行列が存在するものとする．このとき，式 (1) の不動点は $\boldsymbol{a}$ の λ 倍に関して不変である．

証明：適応係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\lambda\boldsymbol{a}$ に対応する極限行列を $\bar{K}_1$ と $\bar{K}_2$ で表すと，定理 1 より，それぞれすべての行が K_1 と K_2 の Frobenius 根，1 に対応する左固

有ベクトルによって与えられる．K_2 の Frobenius 根に対応する左固有ベクトルは E，$\mathbf{0}$ を各々，単位行列とゼロベクトルとして，方程式 $\boldsymbol{v}(E-K_2)=\mathbf{0}$ の非自明な解 $\bar{\boldsymbol{v}}>\mathbf{0}$ であるが，$E-K_2=\lambda(E-K_1)$ が成立するため，$\bar{\boldsymbol{v}}$ は適切な規準化の下，K_1 の Frobenius 根に対応する左固有ベクトルと同じものになる．したがって，$\bar{K}_1=\bar{K}_2$ であり，式 (4) より初期値が同じならば同じ不動点を与えることになる． ∎

定理 3 は，適応係数ベクトルがスカラー倍だけ異なる 2 集団において，初期選好インデックスが同じであるならば，合意に要する交渉回数の差はあったとしても，その帰結は同じであることを主張している．特に，2 つの同質的集団が合意に至るならば，その交渉結果は一致する．

3. 同時調整過程と逐次調整過程

各エージェントは固有のプロパティとして，選択肢に関する選好順序に加えて，他者に影響される度合いの指標と他者への影響力を表す指標を持つものとする．前者を順応係数と呼び，$0\le\alpha_i\le 1$ で表す．一方，後者を説得係数と呼び，$0\le\beta_i\le 1$ で表す．このとき，第 i エージェントが第 k（$k\ne i$）エージェントから受ける影響は $\gamma_{ik}\equiv\alpha_i\beta_k$ により表すことができる．そこで，時刻 t における第 i エージェントに関する第 j 選択肢の選好インデックスが力学系，

$$x_{t+1j}^{(i)}=\sum_{k\ne i}\gamma_{ik}(\xi_{tj}^{(k)}-x_{tj}^{(i)})/(I-1)+x_{tj}^{(i)} \quad (5)$$

に従うものとする．ただし，

$$\xi_{tj}^{(k)}\equiv x_{tj}^{(k)} \quad (6)$$

または

$$\xi_{tj}^{(k)}\equiv\begin{cases} x_{t+1j}^{(k)}, & k<i \\ x_{tj}^{(k)}, & k>i \end{cases} \quad (7)$$

である．以下は式 (5) と (6) を用いる場合を同時調整過程と呼び，式 (5) と (7) を用いる場合を逐次調整過程と呼ぶ．いずれの場合も式 (1) と同様，任意の $t>0$ に対して $||\boldsymbol{x}_t^{(i)}||=||\boldsymbol{x}_0^{(i)}||$ である．また，式 (5) 右辺は

$$\sum_{k\ne i}\gamma_{ik}\xi_{tj}^{(k)}/(I-1)+x_{tj}^{(i)}\left(1-\sum_{k\ne i}\gamma_{ik}/(I-1)\right)$$

と変形できることから選好インデックスの非負性が保たれることが分かる．これら 2 つの調整過程において交渉の結果，各選択肢に関する選好インデックスが，すべてのエージェントについて同じ値を持つに至ったとき，集団として合意が成されたと判断する．

さて，$r_{ij}\equiv\gamma_{ij}/(I-1)$，ただし，$r_{ii}\equiv 0$ として行ベクトル，

$$\boldsymbol{l}^i\equiv\left(r_{i1},\cdots,r_{ii-1},1-\sum_k r_{ik},r_{ii+1},\cdots,r_{iI}\right)$$

を第 i 行に持つ確率行列 L を定義する．このとき，同時調整過程は

$$\boldsymbol{x}_{t+1j}=L\boldsymbol{x}_{tj} \quad (8)$$

と記述することができる．定理 1 よりただちに次の定理を得る．

定理 4 式 (8) における行列 L に対して定理 1 の条件が満たされるならば同時調整過程は十分な交渉の後に集団としての合意に至る．

定理 4 より，任意の互いに異なる i と k に対して $0<\gamma_{ik}<1$ であるならば，同時調整過程は合意に至ることが分かる．

定理 5 同時調整過程を考える．このとき，すべてのエージェントの説得係数が同じであるならば，同時調整過程は基本モデル (1) と形式的に一致する．

証明：仮定の下では，すべての $k\ne i$ に対して r_{ik} が共通の値，r_i を持つ．このとき，$\alpha_i\equiv r_iI$ と定義すると，式 (8) の行列 L は式 (3) の K と一致する． ∎

今，

$$\boldsymbol{m}^i\equiv(-r_{i1},\cdots,-r_{ii-1},1,0,\cdots,0),$$
$$\boldsymbol{n}^i\equiv\left(0,\cdots,0,1-\sum_k r_{ik},r_{ii+1},\cdots,r_{iI}\right)$$

を第 i 行に持つ行列を各々，M と N で表す．M は対角要素がすべて 1 の単位下三角行列であり，したがって正則である．一方，N は上三角行列になる．このとき，逐次調整過程は

$$\boldsymbol{x}_{t+1j}=P\boldsymbol{x}_{tj} \quad (9)$$

と表すことができる．ただし，$P\equiv M^{-1}N$ である．

補題 1 一般に，$r_{ij}\ge 0$，$i,j=1,2,\ldots,n$，ただし，$r_{ii}=0$，$i=1,2,\ldots,n$，かつ不等式

$$\rho_i\equiv 1-\sum_{j=1}^n r_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,\ldots,n$$

が少なくとも 1 つの i に対して厳密な不等号で成り立つものとする．このとき，第 i 行をベクトル $\boldsymbol{m}^i$ とする行列 M とベクトル $\boldsymbol{n}^i$ とする行列 N，ただし，

$$\boldsymbol{m}^i\equiv(-r_{i1},\cdots,-r_{ii-1},1,0,\cdots,0),$$
$$\boldsymbol{n}^i\equiv(0,\cdots,0,\rho_i,r_{ii+1},\cdots,r_{in}),$$

を定義すると，$P\equiv M^{-1}N$ は確率行列になる．

証明：仮定により M は M-行列となり，非負逆転可

能である（文献 6)，p.55，2.4.14 参照）．したがって P は非負行列になる．また，$M^{-1} \equiv (m^*_{ij})$ は単位下三角行列であり，$MM^{-1} = E$ より

$$m^*_{ij} = \sum_{k=j}^{i-1} r_{ik} m^*_{kj}, \quad i > j \tag{10}$$

が成り立つ．$m^*_{ii} = 1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，かつ $m^*_{ij} = 0$，$i < j$ に注意されたい．一方，P の第 i 行に関する和 s_i は

$$s_i = m^*_{i1} + m^*_{i2}(1 - r_{21}) + \cdots + m^*_{ii-1}\left(1 - \sum_{j=1}^{i-2} r_{i-1j}\right) + 1 - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} \tag{11}$$

となる．特に，$s_1 = 1$ は容易に確認される．

次に，$s_k = 1$，$k \leq i$ が成立したと仮定し，$s_{i+1} = 1$ となることを示そう．式 (11) より

$$s_{i+1} = m^*_{i+11} + m^*_{i+12}(1 - r_{21}) + \cdots + m^*_{i+1i}\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}\right) + 1 - \sum_{j=1}^{i} r_{i+1j} \tag{12}$$

であるが，式 (10) を用いると式 (12) は

$$s_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} r_{i+1k} m^*_{k1} + \sum_{k=2}^{i} r_{i+1k} m^*_{k2}(1 - r_{21}) + \cdots + \sum_{k=i}^{i} r_{i+1k} m^*_{ki}\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}\right) + 1 - \sum_{j=1}^{i} r_{i+1j} \tag{13}$$

と書き改めることができる．

式 (13) より $k = i$ に関する項を取り出し，その和を求めると，$s_i = 1$ より

$$r_{i+1i}\left\{m^*_{i1} + m^*_{i2}(1 - r_{21}) + \cdots + m^*_{ii-1}\left(1 - \sum_{j=1}^{i-2} r_{i-1j}\right) + 1 - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}\right\} = r_{i+1i}$$

となる．以下同様にして，$k = i-1, \ldots, 1$ に関して項を取り出し，その和を求めると，帰納法の仮定によりそれぞれ r_{i+1k}，$k = i-1, \ldots, 1$ となる．したがって，$s_{i+1} = 1$ となる． ∎

定理 6 式 (9) における行列 P に対して定理 1 の条件が満たされるならば逐次調整過程は十分な交渉の後に集団としての合意に至る．

証明：補題 1 と定理 1 より証明される． ∎

定理 6 より，任意の互いに異なる i と k に対して $0 < \gamma_{ik} < 1$ であるならば，逐次調整過程は合意に至る．

4. おわりに

文献 1) の集団的意思決定に関する基本モデルは，確率行列によって特徴付けられる正値線形システムに帰着する．このことからいくつかのシミュレーション結果が理論的にも正当化されるとともに，逐次計算によらない不動点算出方法を得ることができた．また，標準的な仮定の下での選好インデックスの収束が保証された．最後に，同時調整過程と逐次調整過程が検討されたが，これらの調整過程の興味あるシミュレーション結果については機会を改めて報告したい．

参考文献

1) 高橋正浩，生天目章：適応型合意形成モデルとその諸性質，情報処理学会論文誌，Vol.40, No.9, pp.3586–3595 (1999).
2) 生天目章：戦略的意思決定，朝倉書店 (2001).
3) 近江潤明，三田村保，大堀隆文，栗原正仁：合意形成過程における適応度戦略の比較，FIT（情報科学技術フォーラム）2003 一般講演論文集（第 2 分冊），pp.321–322 (2003).
4) Luenberger, D.G.: *Introduction to Dynamic System*, John Wiley & Sons, New York (1979).
5) 小山昭雄：経済数学教室 4 線形代数と位相（下），岩波書店 (1994).
6) Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Acadmic Press, New York (1970).

(平成 18 年 2 月 13 日受付)
(平成 18 年 5 月 9 日採録)

塩村　尊（正会員）

昭和 35 年生．昭和 63 年神戸大学大学院経済学研究科博士課程後期課程修了．同年香川大学商業短期大学部専任講師．平成 6 年より関西大学総合情報学部助教授．平成 13 年より関西大学総合情報学部教授．理論経済学，情報学と人文社会科学との接点に関する研究に従事．博士（経済学）．日本経済学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会各会員．