

## ベイズアプローチに基づいた断層画像の再構成

山本翔<sup>†1</sup> 庄野逸<sup>†2</sup>

観測データから画像を再構成する技術は、様々な分野で非破壊検査の手法として応用されてきている。このうち信頼性の高い観測データが得られる場合では、最尤推定法に基づく手法が有効であるとされ、医療分野では ML-EM 法といった手法が用いられるようになってきている。しかし観測データが低品質な場合、信号がノイズに埋もれてしまい、うまく再構成できない場合がある。ノイズに埋もれたデータからでも高画質に画像を再構成する方法として、ベイズアプローチを用いた MAP-EM 法が注目されている。本研究では ML-EM 法、MAP-EM 法それぞれの手法で画像再構成の計算機シミュレーションを行い、また MAP-EM 法についての改善点について検討した。

### Reconstruction of tomographic image based on Bayes approach

SHO YAMAMOTO<sup>†1</sup> and HAYARU SHOUNO<sup>†2</sup>

The technology to reconstruct an image from observation data has been applied as technique of nondestructive inspection in various fields. When we could get reliable observation data, method based on Maximum likelihood estimation is effective, and ML-EM method comes to be used in medical field. However, when observation data were low quality, A signal is buried among noises, and there is the case that I cannot reconstruct well. MAP-EM method which used idea based on Bayes approach is interested because we may reconstruct high quality image from such data. We simulate reconstruction method ML-EM and MAP-EM and consider improvement of MAP-EM in this paper.

<sup>†1</sup> 電気通信大学大学院電気通信学研究科

Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-Communications

<sup>†2</sup> 電気通信大学電気通信学部

Faculty of Electro-Communications, The University of Electro-Communications

### 1. はじめに

医療画像における X 線写真撮影などで応用されている断層撮影 (tomography) 技術は人体の断面像といった、一般の光学的な撮影機器では取得できない部分の画像を非破壊的に取得するのに役立つ技術である。画像を再構成する方法は、観測対象の外側で、観測対象を透過してきた信号強度を計測し、この信号から物体内部の性質を表す変数を推定することで行われる。

画像の再構成を行う場合、統計学的な手法として最尤推定法 (ML 法:Maximum likelihood estimation) が考えられる。ただし、最尤推定法に基づいて推定を行う場合、断層画像の再現精度は、観測データが十分に多く得られるかどうかという条件に左右されることが多い。しかし、X 線 CT スキャンのように人体に放射線などを照射する場合、なるべく低侵襲な観測が好まれるため、できるだけ放射線の量は少ないことが望ましい。このように、放射線の量を少なくすると、信号が観測時に発生するノイズなどの影響を受けやすくなり、観測データがノイズに埋もれてしまって正しく画像を再構成できなくなる場合がある。

そのような低品質な信号からでも高画質な画像の再構成を行えるような方法も提案されてきた<sup>3)</sup>。再構成する対象の特性が、何らかの事前知識としてあらかじめ分かっている、確率モデルで記述できるのであれば、再構成のアルゴリズムをこの確率モデル上で構築することができる。このような方法としては、ベイズの公式から導かれる事後確率の考え方をを用いた MAP-EM 法 (Maximum A Posteriori estimation-Expectation Maximization) があり、観測した信号が低品質であっても、事前分布の情報によって補い、高画質な画像の再構成を期待できる。本研究では ML-EM 法、MAP-EM 法を用いた計算機シミュレーションを行い、再構成画像の違いを比較し、また MAP-EM 法に関して改良を加えたものを提案し、再構成の違いについて考察する。

### 2. 再構成のモデル

本研究では画像を生成する系のモデルとして Shepp&Logan の想定した確率モデルを用いるものとする<sup>2)</sup>。図 1 に Shepp&Logan の想定したモデルの模式図を示す。まず、撮影する物体の断面を正方格子状に区切り、各領域をセルとして考える。今後は各々のセルを再構成画像の 1 画素として扱うものとする。各セルの領域内では、外部から照射された X 線などが吸収されることによって、外部にあるセンサアレイに放射線の信号が観測される。ここで、セルの番号を  $k$ 、センサの番号を  $n$  とした時、セル  $k$  からセンサ  $n$  への信号を  $z_{nk}$  と

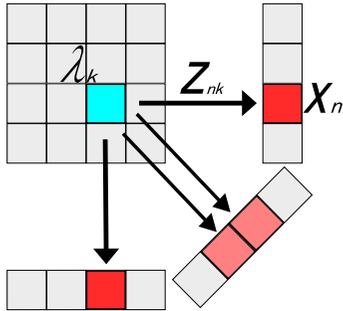


図1 Shepp&Logan の想定するモデルの図.  
Fig.1 Illustration of model which Shepp and Logan assumed.

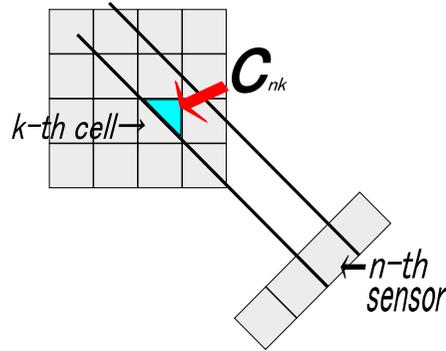


図2 パラメータ  $c_{nk}$  についての考え方を示した図.  
Fig.2 Illustration shows how parameter  $c_{nk}$  assumed.

し、センサ  $n$  の観測データはすべてのセルからの信号の総和  $x_n$  とすると次のように考えることができる。

$$p(x_n|\{z_{nk}\}) = \delta(x_n - \sum_k z_{nk}) \quad (1)$$

ここで  $\delta(\cdot)$  はクロネッカーのデルタ関数である。セルから発生する信号  $z_{nk}$  はセル  $k$  で画素値とするパラメータ  $\lambda_k$  に基づくポアソン分布に従うものと仮定し、また、セルとセンサの位置関係による観測しやすさのパラメータ  $c_{nk}$  を導入する。 $c_{nk}$  は図2のようにセルの面積と、センサの両端から延ばした直線に挟まれたエリアとセルの重なる部分の面積との比で考える。以上の条件のもと、 $z_{nk}$  の確率分布は次のように考える。

$$p(z_{nk}|\lambda_k; c_{nk}) = \frac{c_{nk}\lambda_k^{z_{nk}}}{\Gamma(z_{nk} + 1)} \exp(-c_{nk}\lambda_k) \quad (2)$$

ここで  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。観測の独立を仮定すると、観測信号  $\{x_n\}$  と各セルから生成される信号  $\{z_{nk}\}$  の同次分布は

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{n,k} p(x_n|\{z_{nk}\})p(z_{nk}|\lambda_k; c_{nk}) \quad (3)$$

とかけることになる。この確率モデルを用いて観測データ系列  $\{x_n\}$  から対象の画素値  $\lambda_k$  を推定することで画像再構成を行うことができる。

### 3. 推定方法

一般に観測データから精度の良い推定量を求める方法として最尤推定法がある<sup>4)</sup>。Shepp&Loganの再構成モデルに対して最尤推定法を適用するためには、観測データ列  $\{x_n\}$ 、未知である画像のパラメータ列  $\{\lambda_k\}$ 、さらに  $k$  番目のセルから  $n$  番目のセンサに観測される信号系列  $\{z_{nk}\}$  を考える必要がある。このとき  $x_n$  に関しては複数のセルからの信号の和となるが、 $z_{nk}$  はデータとして観測されておらず、最尤推定の際に対数尤度関数は隠れ変数  $z_{nk}$  を含むこととなる。このように、隠れ変数を含む確率モデルからの推定となるため、最尤推定を行うには、何らかの形で隠れ変数を推定する必要がある。そのための効果的な手法としてEM法(Expectation Maximization)があげられる<sup>1)</sup>。以下では、EM法を用いた最尤推定について詳細を述べる。

#### 3.1 ML-EM法

EM法は隠れ変数を持つモデルからパラメータの最尤推定値を求めるための推定方法である。医療画像の画像再構成では、最尤推定法にEM法を応用した手法としてML-EM法<sup>5)</sup>がある。実際には、最尤推定法のように対数尤度関数を直接最大化する代わりに、 $Q$ 関数と呼ばれる対数尤度の条件付き期待値を求めるステップ(E-step)と、 $Q$ 関数の最大化するパラメータを求めるステップ(M-step)を交互に繰り返していく繰り返しアルゴリズムである。

ここで、断層画像に対してML-EM法を適用してみることを考える。まず、ML-EM法での $Q$ 関数を $Q_{ML}$ と記述する。E-stepではまず対数尤度関数について、隠れ変数に関して期待値をとることによって $Q$ 関数を求める操作を行う。

$$Q_{ML}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)}) = E_{\mathbf{z};\boldsymbol{\lambda}^{(t)}}[\log p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda})] \quad (4)$$

ただし平均をとるためには $\boldsymbol{\lambda}$ を決定しておく必要があるため、ここでは適当な値 $\boldsymbol{\lambda}^{(t)}$ と記述している。実際に $Q$ 関数は次式のように求まる。

$$Q_{ML}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)}) = \sum_n \sum_k \log \lambda_k \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} - \sum_n \sum_k c_{nk} \lambda_k + \text{const} \quad (5)$$

ここで、constは計算過程で出現する $\lambda$ に関わらない定数項である。一方、M-stepでは $Q$ 関数の最大化を考えるので、 $\lambda_k$ に関して $Q$ 関数を微分し、値が0になるときを考える。

$$\frac{\partial Q_{ML}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)})}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} - \sum_n c_{nk} \quad (6)$$

最大値であるための十分条件は  $\frac{\partial Q_{ML}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)})}{\partial \lambda_k} = 0$  であればよいので、

$$\lambda_k = \frac{1}{\sum_n c_{nk}} \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} \quad (7)$$

これにより  $\lambda_k$  の更新式が求まる。ただし、 $\lambda_k^{(t)}$  は、適当に定めた定数値であるので、あらたに求まった  $\lambda_k$  を  $\lambda_k^{(t)}$  として用いて再推定を行う。以上の手順をまとめて、ML-EM 法では以下の手順で画像再構成を行う。

- (1)  $t \leftarrow 0$  とする。
- (2)  $\boldsymbol{\lambda}^{(t)}$  に適当な初期値を設定する。
- (3) 以下の更新式で  $\boldsymbol{\lambda}^{(t)}$  を更新する。

$$\lambda_k^{(t+1)} = \frac{1}{\sum_n c_{nk}} \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}}$$

- (4) 更新値が収束すれば終了、しない場合は  $t \leftarrow t + 1$  として更新を続ける。

### 3.2 MAP-EM 法

ML-EM 法に対してベイズ確率の考えに基づいて事前分布の導入を考えた手法として MAP-EM 法がある。MAP-EM 法では MAP 推定法に EM 法を適用した方法で、モデルのパラメータ  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}$  を確率変数と考えると同次分布  $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})$  を次の様に表わせる。

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}|\boldsymbol{\lambda})p(\boldsymbol{\lambda}) \quad (8)$$

このとき  $p(\boldsymbol{\lambda})$  を事前分布と呼び、推定するパラメータに対しての仮定を確率モデルの形で表現したものである。事前分布はユーザによって導入されるものであり、ユーザがモデルはどうあるべきかということを確認モデルで記述するため、設定することによって観測信号の S/N 比が悪いような低品質なデータからでも精度のよい再構成ができる可能性がある。実際にこのモデルで EM 法を適用した場合、ML-EM 法と同様に、E-step で  $Q$  関数を求めると

$$\begin{aligned} Q_{MAP}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)}) &= E_z[\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}|\boldsymbol{\lambda}) + \log p(\boldsymbol{\lambda})] \\ &= Q_{ML}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)}) + \log p(\boldsymbol{\lambda}) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。M-step でも ML-EM 法と同様に考えると、

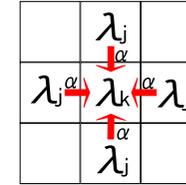


図 3 GMRF の概略図。

Fig. 3 Illustration shows GMRF simply.

$$\frac{\partial Q_{MAP}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)})}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial Q_{ML}(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\lambda}^{(t)})}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial \log p(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (10)$$

ここで事前分布  $p(\boldsymbol{\lambda})$  について考える。事前分布には画像の特性に基づいて導入する必要があるが、一般的には定まらないので、一般的な画像の性質を導入することを考える。一般的な画像では、任意の画素に注目したとき、隣接する画素と近い画素値をとる場合が多い。そこで、事前分布には文献 6) で用いられている GMRF(Gaussian Markov Random Field) 拘束条件で考える

$$p(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\exp(-\frac{\alpha}{2} \sum_i \sum_{(i,j)} (\lambda_i - \lambda_j)^2)}{\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \exp(-\frac{\alpha}{2} \sum_i \sum_{(i,j)} (\lambda_i - \lambda_j)^2)} \quad (11)$$

ここで  $\sum_{(i,j)}$  は、セル  $i$  の近傍  $j$  に関して和をとる演算を表したものとした。この事前分布は注目セルの画素に対して、近傍のセルから受ける影響を表すエネルギー関数である。 $\alpha$  はどのくらい近傍画素の影響を受けるかを示す制御パラメータである。この事前分布を用いた場合の MAP-EM 法での  $\lambda_k$  に関する停留点の方程式は次のように求まる。

$$0 = \frac{1}{\lambda_k} \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} - \sum_n c_{nk} + \alpha \sum_{(k,j)} (\lambda_j - \lambda_k) \quad (12)$$

式 (12) の事前分布の項の概略図を図 3 に示す。この場合、更新式が非線形連立方程式となり、計算に非常に手間がかかる。そのため尾川らは 6) では、計算の簡略化のために事前分布の項の  $\lambda$  を  $\lambda^{(t)}$  で置き換えることで定数化して扱うことを提案しており、次の更新式を用いている。

$$\lambda_k^{(t+1)} = \frac{\sum_n x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_n c_{nk} - \alpha \sum_{(k,j)} (\lambda_j^{(t)} - \lambda_k^{(t)})} \quad (13)$$

しかし、尾川らの手法では  $\lambda^{(t)}$  が元の画像の値に近いような状況、つまり更新式において収束点付近では正しく収束することが見込まれるが、 $\lambda^{(t)}$  の値が収束値よりも離れすぎていると悪影響を及ぼす可能性がある。

### 3.3 提案手法

尾川らの MAP-EM 法に関する問題を回避することを考え、本研究では事前分布の項に関して、注目セルの近傍画素だけを定数化し、次の式を用いて行うことを考える。

$$0 = \frac{1}{\lambda_k} \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} - \sum_n c_{nk} + \alpha \sum_{(k,j)} (\lambda_j^{(t)} - \lambda_k) \quad (14)$$

$$= \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} - \lambda_k \sum_n c_{nk} + \alpha \cdot \lambda_k \sum_{(k,j)} (\lambda_j^{(t)} - \lambda_k) \quad (15)$$

$\alpha \cdot \lambda_k \sum_{(k,j)} (\lambda_j^{(t)} - \lambda_k)$  の項に関して考えると、近傍と注目画素に関しての和であり、近傍の数  $m$  とすると、 $\lambda_k$  の二乗の項に関して  $-\alpha \cdot m \lambda_k^2$ 、 $\lambda_k$  の項は  $\alpha \lambda_k \sum_{(k,j)} \lambda_j^{(t)}$  と分解できるので

$$(\alpha \cdot m) \lambda_k^2 - (\alpha \sum_{(k,j)} \lambda_j^{(t)} - \sum_n c_{nk}) \lambda_k - \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} = 0 \quad (16)$$

更新式は、この  $\lambda_k$  に関する 2 次方程式を解くことで求まる。

$$\lambda_k^{(t+1)} = \frac{(\alpha \sum_{(k,j)} \lambda_j^{(t)} - \sum_n c_{nk}) \pm \sqrt{(\alpha \sum_{(k,j)} \lambda_j^{(t)} - \sum_n c_{nk})^2 + 4\alpha m \Lambda_k}}{2\alpha m} \quad (17)$$

ここで

$$\Lambda_k^{(t)} = \sum_n \frac{x_n c_{nk} \lambda_k^{(t)}}{\sum_l c_{nl} \lambda_l^{(t)}} \quad (18)$$

更新式については、差をとる場合と和をとる場合の二つ存在することになる。一般的には  $Q$  関数をより最大にする方を採用するが、今回は画像の再構成に関して行うため、推定値である画素値はすべて正と考えている。差をとる場合では、推定値が負の値をとる可能性の

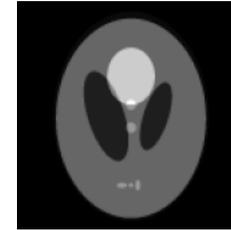


図 4 ファントム画像.  
Fig. 4 Phantom image.

あるので、和をとる場合の更新式を用いる。

## 4. 計算機実験

計算機実験では、観測対象として楕円を組み合わせることで人体の内部を模して作成した  $64 \times 64$  pixel のファントム画像を用いて画像再構成のシミュレーションを行う。実験では、観測対象となるファントム画像のコントラストを変化させることにより、観測信号の強弱を表現し、ノイズの影響の強くなる信号の弱い場合や、逆に影響を受けにくくなる信号が強い場合による再構成過程の違いを評価した。データの観測に関しては、 $[0, \pi)$  の範囲で 64 方向から各々の方向につき 1 回ずつ観測データを取得して再構成を行った。センサに関しては 64 個のセンサを並べた、センサアレーを用いるものとし、センサ 1 つ 1 つの幅は観測対象の画素を示すセルと同じ幅に設定した。観測データに関しては、ファントム画像の画素値を母数とするポアソン乱数を用いて生成した。更新アルゴリズムの初期値としては全画素が 1 であるとする。また MAP-EM 法での制御パラメータ  $\alpha$  に関しては手動で設定する必要があり、 $\alpha = 10^{-q}$  ( $q = 0, 1, \dots, 5$ ) の範囲で変化させた。以上の条件で ML-EM, MAP-EM, 提案手法でそれぞれ性能を評価する。評価方法としては PSNR(Peak Signal to Noise Ratio) を用いて再構成画像の画質を評価した。

再構成のアルゴリズムに関しての収束条件を以下の判定式の真偽にて行った。

$$\left| \frac{\lambda_k^{(t+1)} - \lambda_k^{(t)}}{\lambda_k^{(t)}} \right| < 0.01 \quad (19)$$

この条件にくわえ、値の更新がほぼ 0 に近いところで前後する場合は収束したとみなし、 $\lambda_k^{(t)} < 0.1$  かつ  $\lambda_k^{(t+1)} < 0.1$  の条件を満たす場合は収束とした。さらに、値が 0 未満で収束

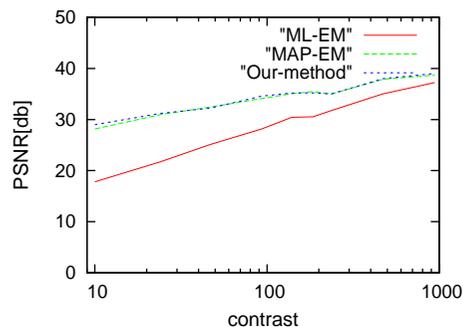


図5 コントラスト比に対する各手法の PSNR 値のグラフ.  
 Fig.5 This graph plot PSNR value for various contrast.

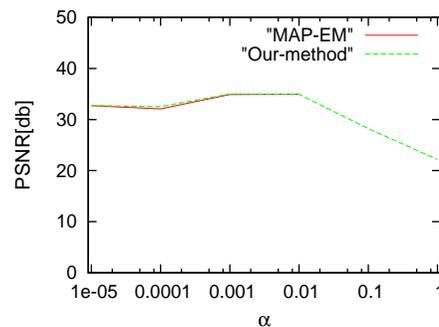


図6  $\alpha$  に対する MAP-EM 法の PSNR 値のグラフ.  
 Fig.6 This graph plot PSNR using MAP-EM for various  $\alpha$  value.

表1 図5においてそれぞれのコントラスト比での  $\alpha$  の値

Table 1 This table show  $\alpha$  value for various contrast in Fig.5

コントラスト比	10	24	47	93	139	185	236	471	941
尾川らの手法	1	0.1	0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001	0.0001
提案手法	1	0.1	0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001	0.0001

した場合、再構成画像の画素値は0以上であると考えているので、収束値は0と見なした。また、更新回数が1000回を超えた場合は更新を終了し、再構成ができなかったとする。実験結果として、図5に再構成画像のPSNR値を示し、表1ではMAP-EM法を用いた二つの手法での $\alpha$ の値を示している。

図5よりMAP-EM法の方が各コントラスト比でML-EM法よりも高いPSNRを示しており、特に信号が弱い状況を想定した、観測対象の画像のコントラスト比が低い場合には特に大きな差が生まれている。再構成画像にPSNRの差がどのくらい影響しているか見るため表2に実際に再構成で得られた画像を示した。このとき低コントラストな観測対象から再構成を行ってため、再構成画像も低コントラストで見にくくなるため、画像の画素値の量子化レベルをそれぞれ任意の値に変更している。

次にMAP-EM法において、尾川らの手法と提案手法において $\alpha$ の値を変化させたときのPSNRの変化を観察し、図6に示した。観察対象のファントム画像のコントラスト比は236のものを選んだ。尾川らの手法に関しては $\alpha = 1, 0.1$ は再構成画像の収束はせず、画

表2 低コントラストな観測対象から再構成した各手法ごとの再構成画像

Table 2 This table show reconstruction image from low contrast object for each method's.

コントラスト比	10	24	47	93	139
ML-EM					
尾川らの手法					
提案手法					

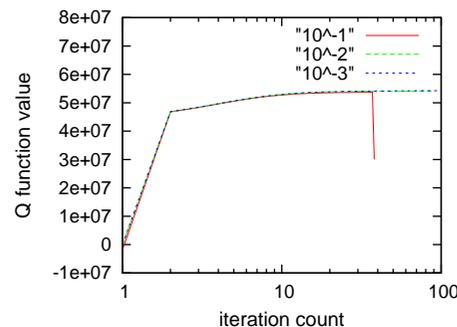


図7 尾川らの手法で  $Q$  関数の値の収束の様子 ( $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ ).

Fig.7 This graph plot convergence  $Q$  function value using Ogawa's et al. method ( $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ ).

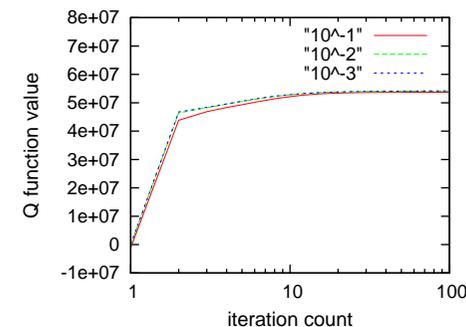


図8 提案手法での  $Q$  関数の値の収束の様子 ( $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ ).

Fig.8 This graph plot convergence  $Q$  function value using our method ( $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ ).

像の再構成はできなかった。そのため、PSNRの値が得られなかったため、グラフにはプロットしていない。一方、提案手法では全ての $\alpha$ の値で再構成画像が得られた。

再構成の行えた時と行えなかった時と収束の違いをみるため、尾川らの手法、提案手法での

$Q$  関数がどのようなふるまいをしているのかをしてみるため  $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  のときの  $Q$  関数値を更新回数 100 回まで観察し、**図 7**、**図 8** に示す。二つの手法では  $\alpha = 10^{-2}, 10^{-3}$  ではほぼ同じような収束過程を示しているが、 $\alpha = 10^{-1}$  のとき、尾川らの手法では収束過程の途中で  $Q$  関数の値が急激に減少を示し、次の更新時に  $Q$  関数の値が発散してしまい、結果として画像の再構成は行えなかった。一方、提案手法では  $\alpha = 10^{-1}$  のときでも収束が見られ、画像の再構成に関しても問題なく行えたため、計算の安定性においては尾川らの手法よりも優れているといえる。

## 5. ま と め

低侵襲な医療診断を行うために、本研究では Shepp&Logan の用いた断層画像の再構成モデルで確率モデルを用いて画像再構成を考えた。その中で、ベイズの公式から導き出される、事後確率の考え方を用いた MAP-EM 法を用いることを考え、事前分布には GMRF 拘束条件を用いた。計算機上でのシミュレーションの結果において、物体に照射する放射線を弱くし、観測データが低品質になってしまうことを想定した場合でもより高画質に画像の再構成が行えるかどうかについてことを示し、また尾川らの手法に関して、数値演算上の問題点に関して改良を行うことができた。今回は事前分布に関して、制御パラメータ  $\alpha$  に関して任意に決めているため、統計物理学で用いられているハイパーパラメータ推定を用いて正しいパラメータを決定することができれば、より高画質な画像再構成が期待できる。

## 参 考 文 献

- 1) 樺島祥介上田修功：計算統計 I -確率計算の新しい手法，岩波書店 (2003).
- 2) L.A.Shepp and B.F.Logan: The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Trans. Nucl. Sci* (1974).
- 3) P.J.Green: Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm, *IEEE Transactions on Medical Imaging* (1990).
- 4) 村田 昇, 渡辺澄夫：確率と統計 -情報学への架橋-, コロナ社 (2005).
- 5) 横井孝司：Clinical application of newly developed reconstruction algorithms(ML-EM)for emission tomograph 原理, 日本放射線学会付録 (2000).
- 6) 浦部洋史, 森川琴子, 尾川浩一：SPECT における逐次近似的画像再構成法の比較, *MEDICAL IMAGING TECHNOLOGY*, Vol.18, No.1, pp.84-93 (2000).