

日経 225 オプション市場における ラティスを用いた株価モデルの実証分析

樋野 雅 浩^{†1} 回 瀧 純 治^{†1} 宮 崎 浩 一^{†1}

本研究では、日経 225 オプション市場を分析対象として、BS モデルの拡張モデルであるデータミニステック・ボラティリティモデルや確率ボラティリティモデルに基づくオプションモデル価格がクロスセクショナルなオプション市場価格とどの程度まで整合するかについてラティスモデルの枠組みで比較検証を行う。データミニステック・ボラティリティモデルとしては、BS モデルから満期におけるリスク中立分布の歪度や尖度を生成することが可能な局所ボラティリティの関数形 ($\tanh(x)$, $\text{sech}(x)$) を含むものまで 5 通りを分析対象とする。確率ボラティリティモデルとしては、ボラティリティが OU 過程に従う Heston モデルを表現するような離散確率ボラティリティモデルのみならず、ボラティリティの推移確率を柔軟にしたものまで 9 通りを分析対象として取り上げる。上記の整合性の観点から、データミニステック・ボラティリティモデルにおける局所ボラティリティの関数形による効果が、確率ボラティリティモデルにおいてボラティリティの推移確率の柔軟性による効果と比較してどの程度であるかについて検証する。検証の結果、5 パラメータや 7 パラメータ・データミニステック・ボラティリティモデルが極めて優れたモデルであることがわかった。

Empirical analysis of stock price model under lattice framework -Evidence from NIKKEI225 options market-

MASAHIRO HINO^{†1}, JUNJI MAWARIBUCHI^{†1}
and KOICHI MIYAZAKI^{†1}

In this research, we discuss how closely deterministic volatility models and stochastic volatility models fit cross-sectional options market prices in lattice framework adopting NIKKEI225 options market data. As deterministic volatility models, we examine five kinds of models from BS model to the model including functions such as $\tanh(x)$ and $\text{sech}(x)$ that may generate skewness and kurtosis in risk-neutral density at maturity. Regarding stochastic volatility models, nine kinds of models are examined. They are discrete stochastic volatil-

ity model representing Heston model, whose volatility follows OU process and similar models with more flexible probability transition matrix. In view of the fit precision, we empirically compare the effect of the local volatility functional form in the deterministic volatility model with that of the flexible probability transition matrix in the stochastic volatility mode. As a result, 5 and 7 parameter deterministic volatility models seems to be advantageous among all of the valuation models examined in our analysis.

1. はじめに

取引所に上場されているオプションは、通常、プレーンバニラと呼ばれる単純なオプションである。金融機関は、エキゾチック・デリバティブと呼ばれる複雑な金融派生証券を相対取引で売買しているが、これらは、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させて価格付けされる。また、エキゾチック・デリバティブは、バリア・オプションなどのように満期までの株価の経路に依存するようなものが多く、効率的な価格付けの方法として株価の推移をラティスで表現するラティスモデルが利用されている。

Black-Scholes モデル (以下、BS モデル) では、株価モデルとして幾何ブラウン運動が (株価リターンの変動性を表すボラティリティが一定) 用いられている。しかし、権利行使価格が異なる上場オプションの市場価格から BS モデルを逆算して導出したインプライド・ボラティリティを観測すると、権利行使価格がアット・ザ・マネー (以下、ATM) のときに低く、ATM から離れるに従って高くなるという現象 (ボラティリティ・スマイル) が見られる。つまり、ボラティリティが一定とする株価モデルでは、現実のオプション市場価格を勘案すると不具合が生じる。このような不具合を解消するために、株価モデルとして、データミニステック・ボラティリティモデル (Dupire(1994), Derman and Kani(1994), Rubinstein(1994) など) や確率ボラティリティモデル (Hull and White(1987), Heston(1993) など) が提案されてきた。しかしながら、前者がツリーモデルの枠組みで容易に表現可能であるのに対して、後者をツリーモデルで表現するのは比較的難しい (Britten-Jones and Neuberger(2000) など) こともあり、ラティスモデルの枠組みで両ボラティリティモデルの比較分析を行った研究は著者等の知る限りでは見当たらない。

そこで、本研究では上記の観点からラティスモデルの枠組みで、データミニステック・ボラ

^{†1} 電気通信大学システム工学科

Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

ティリティモデルと確率ボラティリティモデルがどの程度までクロスセクショナルのオプション市場価格と整合的であるかについて比較分析を行う。

デタミニステック・ボラティリティモデルとしては BS モデルを含む 5 通り、つまり 5 種類の局所ボラティリティの関数形を採用する。確率ボラティリティモデルとしては、9 通りの離散確率ボラティリティモデルを提案する。これらの離散確率ボラティリティモデルは、取りうるボラティリティの水準や推移確率として制約の厳しいものから緩いものまで含めており、一概に確率ボラティリティモデルといってもどのような要因が重要であるかを検証することが可能な形になっている。

2. デタミニステック・ボラティリティモデルとツリー構築法

一般に、デタミニステック・ボラティリティモデル（以下、DVM と呼ぶ）は、式 (1) で与えられる。

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(S_t, t) d\hat{W} \quad (1)$$

ここで、 S_t , r , $\sigma(\cdot)$, $d\hat{W}$ は、順に、原資産価格、無リスク金利、原資産価格と時間のみの関数で表現される局所ボラティリティ、リスク中立測度の下でのウィナー過程である。DVM では、局所ボラティリティの関数形の選び方に応じてモデルが決まるが、ここでは、表 1 に示す 5 通り（BS モデルを含む）の DVM を採り上げる。

ヨーロピアンオプションは、満期 T における株価 S_T のリスク中立分布 $f(S_T)$ を用いて評価することができる。コール・オプションとプット・オプションの評価式を合わせて式 (2) として掲載した。

$$\begin{aligned} \text{Call Price} &= e^{-rT} \int_K^\infty \max(S_T - K, 0) f(S_T) dS_T \\ \text{Put Price} &= e^{-rT} \int_0^K \max(K - S_T, 0) f(S_T) dS_T \end{aligned} \quad (2)$$

本研究では、式 (2) をラティスによって評価するのであるが、表 1 に示した 5 つのデタミニステック・ボラティリティ・モデルを二項ラティスで表現する際には、2 時点間における状態推移の確率が上昇下降共に 50 % となるような Li アルゴリズムを採用する。図 1 には横軸に時間、縦軸に株価を取った、二項ラティスの概念図を示した。

Li アルゴリズム

式 (3) は 2 時点間の株価の推移を表現しており、現時点の株価から翌期の株価が求められるアルゴリズムとなっている。ここで Δt は 1 ラティス当りの微小時間である。

表 1 5 種のデタミニステック・ボラティリティ・モデル (DVM)
Table 1 Five kinds of Deterministic Volatility Model(DVM).

DVM	Local Volatility
1P	$\sigma(S_t, t) = a$
2P	$\sigma(S_t, t) = aS_t^b$
3P	$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\}$
5P	$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\} + d \left\{ 1 - \operatorname{sech} \left[e \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\}$
7P	$\sigma(S_t, t) = a + b \tanh \left[c \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - d \right] + e \left\{ 1 - \operatorname{sech} \left[f \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - g \right] \right\}$

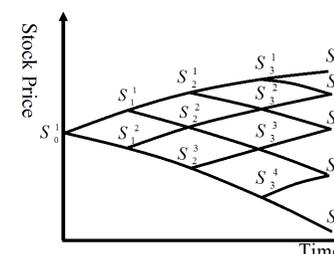


図 1 Li モデルの二項ラティスの概念図。

Fig. 1 The conceptual figure of binomial lattice for Li model.

$$\begin{aligned} S_t^1 &= S_{t-1}^1 \left[1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^1, t) \sqrt{\Delta t} \right], \\ S_t^{i+1} &= S_{t-1}^i \left[1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^i, t) \sqrt{\Delta t} \right], \\ S_t^{i+1} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &S_{t-1}^{i-1} \left[1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^{i-1}, t) \sqrt{\Delta t} \right] \\ &+ S_{t-1}^{i+1} \left[1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^{i+1}, t) \sqrt{\Delta t} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (i \neq 0, t) \end{aligned} \quad (3)$$

3. 確率ボラティリティモデルとツリー構築法

3.1 確率ボラティリティモデルの二項ツリー表現

ボラティリティを OU 過程で表現する単純な確率ボラティリティモデルは、式 (4)、式 (5) で与えられる。

$$dS/S = rdt + \sigma d\tilde{W}_1 \quad (4)$$

$$d\sigma = -\kappa(\sigma - \alpha) dt + \gamma d\tilde{W}_2 \quad (5)$$

ここで、 $S, r, \sigma, \alpha, \kappa, \gamma$ は、それぞれ株価、無リスク金利、ボラティリティ、ボラティリティの平均値、平均回帰係数、ボラティリティのボラティリティを表す。また、 $d\tilde{W}_1$ と $d\tilde{W}_2$ は、リスク中立測度の下での独立なブラウン運動とする。

まず、式 (5) で与えられるボラティリティの平均回帰過程を、有限空間のマルコフ連鎖を用いて表現する。具体的には、ボラティリティを表現する前段階として、有限空間のマルコフ連鎖 ($z_t = -J, \dots, 0, 1, \dots, J$) をもつ平均回帰過程 z_t を与える ($J = 1$, つまり、ボラティリティ水準が 3 状態, $z_t = -1$ (Low Vol), $z_t = 0$ (Middle Vol), $z_t = 1$ (High Vol) の場合を図 2 に示した)。

平均回帰過程 z_t は、 $z_t = j$ から $z_{t+h} = k$ への推移確率 $p_{k,j}$ が、式 (6) で与えられるマルコフ連鎖である ($J = 1$ を示した表 2 を参照)。

$$p_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}\kappa h(J-j) & \text{if } k = j+1 \\ 1 - \kappa h J & \text{if } k = j \\ \frac{1}{2}\kappa h(J+j) & \text{if } k = j-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

平均回帰過程 z_t を用いてボラティリティ過程を式 (7) のように表現する。

$$\sigma_t(z_t) = \alpha + \delta z_t \quad (7)$$

ここで、 $\delta = \gamma/\sqrt{\kappa J}$ とし、状態空間におけるボラティリティ水準を正にするため、 $\alpha = \delta(J+1)$ と設定する。

上記のモデル化によって、ボラティリティ σ_t は、状態空間 $(\alpha - \delta J, \dots, \alpha, \dots, \alpha + \delta J)$ 上を式 (6) で与えられる推移確率行列に従って推移していくことがわかる。例えば、 $J = 1$ の場合、ボラティリティの状態空間は、 $(\delta, 2\delta, 3\delta)$ となる。

次に、式 (4) で与えられる株価過程を二項ツリーで表現する際には、 $y_t = \ln(S_t/S_0)$ に関するものを構築する。式 (4) を解くと、

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma_t(z_t)^2 \right) t + \sigma_t(z_t) \tilde{W}_1(t) \right\} \quad (8)$$

であるから、

$$y_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_t(z_t)^2 \right) t + \sigma_t(z_t) \tilde{W}_1(t) \quad (9)$$

に関する複合二項ツリーを構築する (模式図 3(a) は特に $J = 1$ の場合を表現している)。状態 y_t の推移幅の最小単位は、最小のボラティリティの推移幅 $\delta\sqrt{h}$ で与えられる。

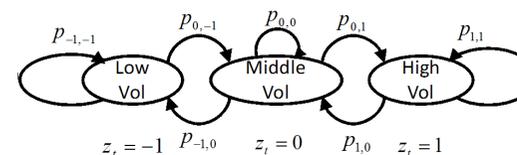


図 2 ボラティリティ推移の概念図。
Fig. 2 The conceptual figure of volatility transition.

表 2 “OU” 確率推移行列。

Table 2 “OU” probability transition matrix.

k \ j	Low Vol.	Middle Vol.	High Vol.
Low Vol.	$1 - \kappa h$	$\kappa h/2$	0
Middle Vol.	κh	$1 - \kappa h$	κh
High Vol.	0	$\kappa h/2$	$1 - \kappa h$

表 3 “対称” 確率推移行列。

Table 3 “Symmetrical” probability transition matrix.

k \ j	Low Vol.	Middle Vol.	High Vol.
Low Vol.	a	c	$1-(a+b)$
Middle Vol.	b	$1-2c$	b
High Vol.	$1-(a+b)$	c	a

表 4 “自由” 確率推移行列。

Table 4 “Free” probability transition matrix.

k \ j	Low Vol.	Middle Vol.	High Vol.
Low Vol.	a	c	e
Middle Vol.	b	d	f
High Vol.	$1-(a+b)$	$1-(c+d)$	$1-(e+f)$

y_t の推移は、式 (9) で与えられているので、その離散近似は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E [\Delta_h y_t | y_t = y, z_t] = r - \frac{1}{2}\sigma_t(z_t)^2 \quad (10)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E [(\Delta_h y_t)^2 | y_t = y, z_t] = \sigma_t(z_t)^2 \quad (11)$$

を満たす必要がある。よって、

$$\Delta y_t | z_t = \begin{cases} \sigma_t(z_t) \sqrt{h} & : \text{probability } \frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{\sigma_t(z_t)^2}{2}\right) \sqrt{h}}{2\sigma_t(z_t)} \\ -\sigma_t(z_t) \sqrt{h} & : \text{probability } \frac{1}{2} - \frac{\left(r - \frac{\sigma_t(z_t)^2}{2}\right) \sqrt{h}}{2\sigma_t(z_t)} \end{cases} \quad (12)$$

と離散近似すればよい。最終的に、式(6)で示されるボラティリティの推移確率と式(12)の株価の上昇・下降確率を併せて考えたラティス上の確率に関する記法 $\pi(y_{t+h} = K, j, t+h)$ は、時刻 t から時刻 $t+h$ までのボラティリティが $j\delta$ である場合に、時刻 $t+h$ において y_{t+h} が状態 K にある確率を表す。この記法を用いて次の再帰式を得る。

$$\begin{aligned} & \pi(y_{t+h} = K, j, t+h) \\ &= \sum_{i=1}^{2J+1} p_{j,i} \left[\begin{array}{l} \pi(y_t = K + j\delta\sqrt{h}, i, t) \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}(j\delta)^2\right) \sqrt{h}}{2j\delta} \right) \\ + \pi(y_t = K - j\delta\sqrt{h}, i, t) \left(\frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{1}{2}(j\delta)^2\right) \sqrt{h}}{2j\delta} \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $y_t = K \pm j\delta\sqrt{h}$ ($j = 1, \dots, 2J+1$) の中で先に定めた y_t に関する状態空間に属さないものに関しては、 $\pi(y_t = K + j\delta\sqrt{h}, i, t)$, $\pi(y_t = K - j\delta\sqrt{h}, i, t)$ を 0 とする。以上より、式(4)、式(5)を満たす OU タイプのツリーが構築できる。

3.2 実証分析において採用する離散確率ボラティリティモデル

実証分析では、ボラティリティの状態空間は 3 状態 ($J=1$) とし、2つの実証における改善点をあげる。第一に、Britten-Jones and Neuberger(2000)においてラティスの幅が一定であった点を改善したが、高、中、低のボラティリティの大きさが、それぞれ $\delta, 2\delta, 3\delta$ (図 3(a)) と δ の幅しかなく、高ボラティリティが中ボラティリティの 1.5 倍に留まる点が挙げられる。よって、実証分析を行うに際しては、高、中、低のボラティリティの大きさが大きく異なるモデルも採用する。具体的には、先のケースに加えて、高、中、低のボラティリティの大きさが、それぞれ $\delta, 3\delta, 5\delta$ (図 3(b)) となるケースとそれぞれ $\delta, 5\delta, 9\delta$ (図 3(c)) となるケースを取り上げる。第二に、ボラティリティの推移確率に関して、ボラティリティ過程 (5) の OU 過程を表現する厳しい制約を緩める形で拡張する。具体的には、OU 過程の推移確率 (表 2) に加えて、対称型の推移確率 (表 3)、自由型の推移確率 (表 4) を採用する。また、複合二項ツリーにおいて株価の上昇後に採用するボラティリティの推移確率と下落後に採用するものとの導入する形でモデルを拡張し、株価の推移とボラティリティの推移の間に相関構造を導入する。実証分析において採用する離散確率ボラティリティモデルは、先に述べた高、中、低のボラティリティの大きさとボラティリティの推移確率との組み合わせに対応する 9 通りであり、表 5 にまとめた。

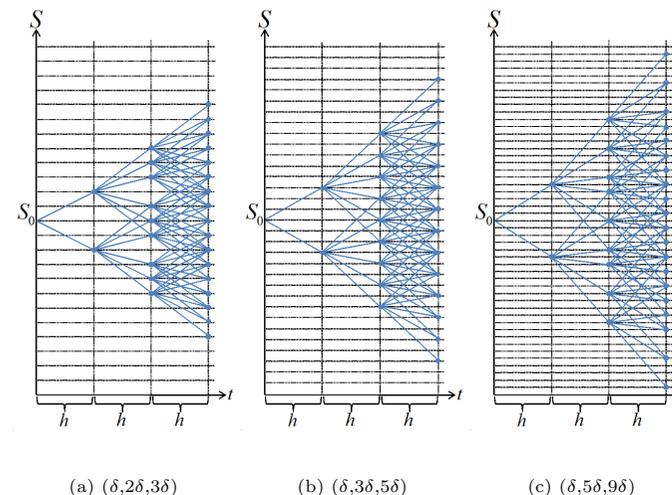


図 3 J=1 における概念図。

Fig. 3 The conceptual figure incase of J=1.

表 5 9 種の離散確率ボラティリティモデル。

Table 5 The nine kinds of discrete stochastic volatility models.

Volatility State ($\delta, 5\delta, 9\delta$), ($\delta, 3\delta, 5\delta$), ($\delta, 2\delta, 3\delta$)	Transition probability Matrix		
	OU	Symmetrical	Free
①	④	⑦	
②	⑤	⑧	
③	⑥	⑨	

4. 実証分析

4.1 実証分析の対象と手法分析

実証分析では、各モデルのラティスに基づくオプションのモデル価格と対応するクロス

セクショナルなオプション市場価格（権利行使価格（500 刻み）が ATM から近い順に 3 個とったアウト・オブ・ザ・マネー 1（以下，OTM1），OTM2，OTM3 のコールオプションとプットオプションの合計 6 個）との二乗誤差和を目的関数とし，式（14）に示した．これが，最小となるようにモデルのパラメータ推定を行い，最小二乗誤差和が小さいモデルがオプション市場価格と整合的であると判断する．

$$\text{Min} \sum_{i=0}^5 (P'_i - P_i)^2 / 6 \quad (14)$$

ここで， P はオプション市場価格， P' はオプションモデル価格， i はオプションの種類を表し，本研究では，6 種類用いる．

4.2 データと分析設定

利用するオプションは各月が限月となる残存期間が 15 営業日のものとし，データ期間は，2003 年 6 月から 2008 年 4 月までの 59 期間とする．

4.3 実証分析結果と考察

表 6 には，各月の目的関数の値の平均と標準偏差をモデル毎に，サブプライム問題発生以前と以降に分けて示した．この理由は，サブプライム問題発生以前と以降では株式オプションの市場環境が大きく異なると考えられるが，これがどの程度までオプション評価モデルとクロスセクショナルなオプション市場価格との整合性に相違を与えるかが興味深いテーマの 1 つになるからである．表 6 に基づいて，次の 3 つの観点から分析結果を考察する．第一に，デタミニステック・ボラティリティモデル間における整合性の比較分析，第二に，確率ボラティリティモデル間における整合性の比較分析，第三にデタミニステック・ボラティリティモデルと確率ボラティリティモデルとの間での比較分析である．

第一の観点から，表 6 のデタミニステック・ボラティリティモデルに関する部分の平均値に着目する．サブプライム問題発生以前と以降の何れの時期に関しても 1 パラメータモデルから 7 パラメータモデルへと局所ボラティリティの関数形が拡張されるに従って整合性が大きく改善されていることがわかる．興味深いのは，1 パラメータや 2 パラメータのモデルでは，サブプライム問題発生以降は以前に比べて整合性が格段に悪くなるのに対して，3 パラメータ，5 パラメータ，7 パラメータモデルでは整合性がそれほど低下しない点である．つまり，これら 3 つのモデルは，株式オプションの市場環境に関して頑健なモデルであるといえる．このことから，ボラティリティカーブにおけるスキューを柔軟に表現することが可能となるような関数形 $\tanh(x)$ を局所ボラティリティに導入することの重要性がわかる．

表 6 目的関数の平均と標準偏差．

Table 6 The Average and standard deviation of objective function value.

Deterministic Volatility Model									
Before the financial crisis (2003/06~2007/08)					After the financial crisis (2007/09~2008/04)				
1P	2P	3P	5P	7P	1P	2P	3P	5P	7P
Average					Average				
103.48	69.02	21.95	4.21	0.21	351.59	260.17	28.21	6.92	0.59
Standard Deviation					Standard Deviation				
125.51	97.35	29.85	7.48	0.57	737.10	582.66	37.45	13.02	2.26

Stochastic Volatility Model								
Before the financial crisis (2003/06~2007/08)								
OU3	OU5	OU9	Sym.3	Sym.5	Sym.9	Free3	Free5	Free9
Average								
76.81	64.43	56.07	55.00	40.67	32.84	12.66	8.36	6.83
Standard Deviation								
105.83	95.47	88.00	84.36	69.30	60.55	29.03	13.92	11.41

After the financial crisis (2007/09~2008/04)								
OU3	OU5	OU9	Sym.3	Sym.5	Sym.9	Free3	Free5	Free9
Average								
293.15	263.10	241.13	245.02	203.98	178.33	44.54	16.55	11.25
Standard Deviation								
651.79	602.93	564.54	576.70	501.80	452.80	130.09	41.00	31.69

次に，3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルの整合性を比較する．5 パラメータモデルは 3 パラメータモデルをネストするように拡張したモデルであるので，これらのモデルを比較すれば局所ボラティリティにカーブを表現することが可能な関数形 $\text{sech}(x)$ を導入することがどの程度まで整合性を高めるのに有効であるかを知ることができる．目的関数の値は 21.95 から 4.21 まで大幅に改善しており，局所ボラティリティに関数形 $\tanh(x)$ に加えて関数形 $\text{sech}(x)$ を利用することの有用性が確認できる．また，局所ボラティリティに関数形 $\tanh(x)$ と $\text{sech}(x)$ を異なる形で利用した 7 パラメータモデルは概ね完全にオプション市場価格と整合的となっている．

第二の観点から，表 6 における 9 通りの確率ボラティリティモデルに関する部分の平均値に着目する．分析結果から読み取れることの一つは，OU，対称，自由の何れの推移確率を採用するモデルであっても，高，中，低のボラティリティの大きさが大きく異なるようにボラティリティの水準を定めたモデルの方が（3，5，9 となるに従って），整合性が高くなる点である．二つめは，何れのボラティリティの水準であっても推移確率に関する制約を OU，対称，自由と緩めるに従って整合性が高くなり，高，中，低のボラティリティの大きさの異なる程度よりも推移確率に関する自由度の方が整合性に与える影響が大きい点である．このことから，確率ボラティリティモデルとして離散モデルを採用する場合には，本研

究のようにボラティリティの推移確率を柔軟に与えることがクロスセクショナルなオプション市場価格と整合的なオプション評価モデルを構築するうえで有効であることがわかる。

第三の観点から、表 6 に基づいてダミニステック・ボラティリティモデルの整合性と確率ボラティリティモデルの整合性とを比較する。確率ボラティリティモデルにおいてボラティリティの推移確率が OU で与えられる Heston タイプのモデルは、整合性が概ねダミニステック・ボラティリティモデルの 2 パラメータモデルの水準であることが見て取れる。2 パラメータモデルはボラティリティカーブにおけるスキューを表現することが可能ではあるが、局所ボラティリティが原資産価格自身に依存しており、株価リターンに依存するモデルと比較して水準が大きくは変わらない関数形をとっているためスキューが大きい場合には整合性が低下する。この程度が確率ボラティリティモデルにおいてボラティリティの推移確率を OU とする制約と同程度であることがわかる。次に、確率ボラティリティモデルにおけるボラティリティの推移確率を OU から対称へと少し緩めた場合について確認すると、ダミニステック・ボラティリティモデルの 2 パラメータモデルの水準こそ上回るものの、3 パラメータモデルには劣ることがわかる。つまり、ボラティリティの推移確率を OU から対称へと少し緩めただけでは、局所ボラティリティにおける関数形 $\tanh(x)$ が生成するような整合性の向上が見込めないのである。確率ボラティリティモデルにおけるボラティリティの推移確率の制約を更に緩めて対称から自由とした場合について確認すると、高、中、低のボラティリティの大きさが何れの水準であっても、整合性はダミニステック・ボラティリティモデルの 3 パラメータモデルの水準を上回るも 5 パラメータや 7 パラメータのモデルには及ばないことがわかる。

つまり、局所ボラティリティの関数形として $\tanh(x)$ に加えて $\operatorname{sech}(x)$ も利用するならば、クロスセクショナルなオプション市場価格との整合性はその頑健性も合わせて本研究で導入した相当に柔軟な離散確率ボラティリティモデルを上回る。ラティス構築の簡便さを考慮すれば、ダミニステック・ボラティリティモデルの 5 パラメータや 7 パラメータモデルが極めて優れたモデルであることがわかる。

5. まとめと結語

本研究では、日経 225 オプション市場を分析対象として、BS モデルの拡張モデルであるダミニステック・ボラティリティモデルや確率ボラティリティモデルに基づくオプションモデル価格がクロスセクショナルなオプション市場価格とどの程度まで整合的であるかについてラティスモデルの枠組みで検証した。

分析結果からは、何れの確率ボラティリティモデルの整合性も満期におけるリスク中立分布の歪度や尖度を生成することが可能な局所ボラティリティの関数形 ($\tanh(x)$, $\operatorname{sech}(x)$) を含むダミニステック・ボラティリティモデルの整合性に及ばないことがわかった。ラティス構築の簡便さも踏まえれば、このようなダミニステック・ボラティリティモデルは極めて優れたモデルであると考えられる。

参考文献

- 1) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81 (1973) 637-654.
- 2) Breeden, D.T. and Litzenberger, R.H.: Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices. *Journal of Business*, 51 (1978) 621-651.
- 3) Britten-Jones, M. and Neuberger, A.: Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility. *The Journal of Finance*, 55 (2000) 839-866.
- 4) Brown, G. and Randall, C.: If the skew fits. *Risk*, April (1999) 62-65.
- 5) Derman, E. and Kani, I.: Riding on a smile. *Risk*, February (1994) 32-39.
- 6) Duan, J.-C.: Cracking the smile. *Risk*, December (1996) 55-59.
- 7) Dupire, B: Pricing with a smile. *Risk*, January (1994) 18-20.
- 8) Heston, S. L.: A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial and Studies*, 6 (1993) 327-343.
- 9) H., Hoshika and K., Miyazaki.: Which Deterministic Volatility Model Fits Market Price Exactly? Evidence from NIKKEI225 Option Market, *Journal of Japan Industrial Management Association*, Vol.59 No.2, pp. 451-458 (2008).
- 10) Hull, J and White, A.: The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, 42 (1987) 281-300.
- 11) J., Mawaribuchi, K., Miyazaki and M., Okamoto.: 5-parameter Local Volatility Model: Fitting to Option Market Prices and Forecasting Ability, *IPSJ Transactions on Mathematical Modeling and Its Applications*, Vol.2 No.2, pp. 58-69 (2009). (in Japanese)
- 12) K., Miyazaki: An Invitation to Market-based Option Pricing and its Applications, *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.50 No4, pp. 488-514 (2007).
- 13) Li, Y.: "A new algorithm for constructing implied binomial trees: does the implied model fit any volatility smile?" *Journal of Computational Finance*, Vol.4, No. 2, pp. 68-95 (2000/2001)
- 14) Rubinstein, M.: Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, 49 (1994) 771-818.