

推定誤差に基づくオプション市場価格が織り込む 拡散モデルとジャンプ拡散モデルの検証

小林 寛 司^{†1} 宮崎 浩 一^{†1} 田中 健 太 郎^{†1}

株式オプション市場価格に織り込まれる株価過程が拡散過程であるかジャンプ拡散過程であるかについて検証した先行研究においては、推定誤差を考慮していない。本研究では、オプションモデル価格と市場価格との誤差の分布を利用して、推定誤差がビッド・アスク内に納まる確率に基づき検証を行った。検証結果からは、オプション満期が長くなるに従って株価リターンに中心極限定理が働くものの、アウトオブザマネーのオプションの市場価格を的確に捉える株価のモデル化にはジャンプ成分の役割が大きいこと、また、市場環境の観点からはサブプライム問題発生以降の市場の混乱期においてジャンプ成分の重要性が高まることが確認された。

An empirical analysis on diffusion and jump-diffusion models based on estimation error distributions

HIROSHI KOBAYASHI ^{†1} KOICHI MIYAZAKI ^{†1}
and KENTARO TANAKA ^{†1}

In preceding research related to diffusion and jump-diffusion models implicit in options market prices, estimation error is not incorporated. In this research, we discuss these two models based on the probability that the estimation error falls on the bid-offer spread of options trades. Our empirical results suggest that the jump part makes an important role in the equity model to precisely capture the option market prices though CLT (Central Limit Theorem) works in the equity return distribution. From the view point of market condition, the importance of the jump part becomes much more significant in the turbulent market condition after the occurrence of sub-prime debt crisis.

^{†1} 電気通信大学システム工学科

Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

1. はじめに

ヨーロッパ・オプションとは、所定の期日(満期日)に、ある資産(以下株式を想定)をあらかじめ決められた価格(権利行使価格)で買う(コールオプション)、または売る(プットオプション)ことができる権利である。オプション評価モデルで最も著名なモデルは、Black-Scholes モデル(以下 BS モデル)である。BS モデルでは、株価リターンの従う確率過程としてウイナー過程を採用しており、この仮定の下ではオプションの満期までの株価リターンが従う確率分布は、満期までの日数に関わらず正規分布である。

正規分布よりも裾の厚い分布を用いて満期におけるペイオフ(コール(又はプット)オプションならば、満期における株価が権利行使価格以上(以下)となる金額)の期待値を現時点まで割り引いて投資家が想定する現実のオプション価格を求め、得られたオプション価格が BS モデル(株価リターンに正規分布を仮定)のオプション価格と一致するように正規分布の標準偏差を求めたものがインプライド・ボラティリティ(以下 IV)である。裾が厚い分布であれば、オプション価格は正規分布の場合よりも大きく評価されるため、両者を一致させるには正規分布の標準偏差を大きくとる必要がある。よって、現実の株価リターン分布の裾が厚い場合には、オプションの権利行使価格が現在の株価から乖離するに従って IV は大きくなる。このような現象は、ボラティリティのスマイルと呼ばれる。分布の片側のみの裾が厚い場合には、片側においてのみ IV が大きくなり、スキューと呼ばれる。

上記の関係はオプションの満期毎に得られる。米国の株式オプション市場において満期毎に IV の形状を調べた研究に Carr and Wu(2003b)²⁾ があり、オプション満期が長くなっても IV のスマイルが緩やかにはならないことを指摘した。満期まで N 日間であるときに株価リターンを表す確率変数 X は、 N 個の互いに独立で同一な 1 日の株価リターン X_i の和 $X = \sum_{i=1}^N X_i$ として表される。株価リターン X_i が中心極限定理の働くような分布であれば、満期までの日数 N が長くなれば、満期までの株価リターンを表す確率変数 X は正規分布に近づくため、IV のスマイルは緩やかになるはずである。

本研究の目的は、日本の株式オプション市場において、オプション満期と IV のスマイルとの関係を調べたうえで、株式オプション市場が織り込む株価リターン分布として、BS モデル(拡散モデル)とジャンプ拡散モデル(Merton(1976)³⁾を採用して中心極限定理がどの程度働くかについて検証する。この検証の萌芽的なアイデアは、佐々木・宮崎・野村(2006)⁴⁾に見られるが、そこでは数値実験により上記の中心極限定理の作用を確認しただけである。そこで、本研究において現実のオプション市場価格データを採用した本格的な実

証分析を行う。従来、株式オプション市場が織り込む株価プロセス（及び株価プロセスが生成する満期までの株価分布）を検証するような研究（例えば、Carr and Wu(2003a)¹⁾、野村・宮崎 (2005)⁵⁾）においては、推定誤差に関する分布を考慮してこなかった。本研究では、株価リターン分布を推定する際に生じる推定誤差の分布も利用した検証を行う。

2. 本研究で用いる株価モデル

2.1 本研究で採用する株価モデル

本研究ではジャンプ拡散モデル（以降、MJD モデルと呼ぶ）を採用する。

BS モデル

BS モデルでは、リスク中立測度の下で原資産過程が式 (1) に従うと仮定している。

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (1)$$

ここで、 S_t は t 時点における株価、 r は無リスク金利、 σ は株価リターンのボラティリティ、 $d\tilde{W}_t$ はリスク中立測度の下での標準ブラウン運動を表す。BS モデルにおけるオプション評価式は以下のように表される。

$$C(K, \theta, r, T) = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (2)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T] \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$C(K, \theta, r, T)$ はコールオプション価格を表す。 S_0 は初期時点の株価、 T は満期までの残存期間、 K は権利行使価格、パラメータ θ は $\{\sigma\}$ 、 $\Phi(\bullet)$ は標準正規分布の累積密度関数を表す。

MJD モデル

MJD モデルは、原資産過程が式 (3) のように表現される。

$$dS_t/S_t = (r - \lambda\beta)dt + \sigma d\tilde{W}_t + (Y - 1)d\tilde{N}_t \quad (3)$$

ここで、 $d\tilde{N}_t$ はリスク中立測度の下でのポアソン過程（インテンシティ λ ）、 β はジャンプ幅率の期待値、 σ は拡散項のボラティリティ、 Y はジャンプ幅率を表す確率変数である。ジャンプ幅率の確率変数 Y の対数を取ったものが平均 μ_J 、分散 σ_J^2 の正規分布に従うと仮定する。MJD モデルにおけるオプション評価式は以下ようになる。

$$C(K, \theta, r, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T} (\lambda'T)^n}{n!} [S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-r_n T} \Phi(d_2)] \quad (4)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{T}} [\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n^2/2)T] \quad d_2 = d_1 - \sigma_n \sqrt{T}$$

$$r_n = r - \lambda\beta + n \ln(1 + \beta)/T \quad \lambda' = \lambda(1 + \beta) \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_J^2/T$$

ここで、 σ_J はジャンプ幅率のボラティリティ、パラメータ θ は $\{\lambda, \beta, \sigma, \sigma_J\}$ であり、 n はジャンプ回数を表す。MJD モデルは、拡散成分とジャンプ成分を複合した形で表される。

3. 分析対象と分析手法

3.1 分析対象

分析対象は、次の 4 つである。

（分析対象 1）

各満期に関するクロスセクショナル（異なる権利行使価格）なオプションの市場価格データから株価モデルのパラメータを推定し、ジャンプに関するパラメータがどのような値をとるのかについて分析する。

（分析対象 2）

ジャンプに関するパラメータがどの程度まで IV のスマイルを説明するのかについて分析する。

（分析対象 3）

オプション価格の推定誤差に関する分布が、オプションの満期や権利行使価格に応じて BS モデルと MJD モデルではどのように異なるのかについて分析する。加えて、株価リターンに関して、中心極限定理が働くことを確認する。

（分析対象 4）

オプション価格の推定誤差に関する分布を考慮したうえで、株価モデルとして BS モデルと MJD モデルを採用することの是非について分析する。

3.2 分析手法

前節で示した分析対象に取り組むための分析手法を以下に示す。

（分析手法 1）

モデルのパラメータ θ は、最小二乗法によって推定する。

$$\text{Min}_{\theta} \frac{1}{N+M} \left[\sum_{i=1}^N (C_{\text{market}}(K_i, T) - C(K_i, \theta, r, T))^2 + \sum_{i=1}^M (P_{\text{market}}(K_i, T) - P(K_i, \theta, r, T))^2 \right] \quad (5)$$

ここで、 K_i は権利行使価格を表しており、 $i=1$ をアットザマネー（以下 ATM）オプションの権利行使価格とし、 i が大きくなるにしたがってアウト幅が大きくなるようなアウトオブザマネー（以下 OTM）オプションの権利行使価格を示す。 C_{market} 、 P_{market} はコールオプション、プットオプションの市場価格を表している。この推定を日次で行う。

(分析手法 2)

ATM オプションの IV と 500 円 OTM プットオプションの IV との差及び ATM オプションの IV と 1000 円 OTM プットオプションの IV との差を、それぞれ指標 1、指標 2 とする。これらをボラティリティスマイルやスキューに関する指標として採用し、指標 1,2 がジャンプ成分に関連するパラメータによってどの程度まで説明され得るのかについて、式 (6) に示す切片無しの重回帰モデルを用いて分析する。

$$Indicator(i)_t = a\lambda_t + b\beta_t + c\sigma_{Jt} + \varepsilon_t \quad (6)$$

ここで、 $Indicator(i)_t$ 、 λ_t 、 β_t 、 σ_{Jt} 、 ε_t は、それぞれ、 t 日における指標 (i)、インテンシティ、ジャンプ幅率の平均、ジャンプ幅率の標準偏差、誤差項を表す値である。

(分析手法 3)

満期が 1ヶ月、2ヶ月、3ヶ月、権利行使価格が ATM、500 円 OTM、1000 円 OTM のプットオプションに焦点を当てて、オプション価格の推定誤差に関する分布を構築する。満期が 1ヶ月のケースを例として採り上げ説明する。このとき、モデルのパラメータは、式 (5) における T を 1ヶ月として最小化することによって推定されている。このようにして推定されたパラメータの下で、ATM、500 円 OTM、1000 円 OTM のプットオプションに関するオプション価格の推定誤差は、これらの権利行使価格に対応する K_i を用いた $P_{market}(K_i, 1month) - P(K_i, \theta, r, 1month)$ で与えられる。日次でこの推定誤差が得られるため、これらを利用して推定誤差の分布を構築する。オプション満期が長くなるに従い、推定誤差分布の形状がどのように変化するかに着目して、中心極限定理が働くか検討する。

(注 1)

市場で取引されているオプションの満期は予め定められている。よって、オプションの残存期間は、時間の経過と共に日々短くなり、常に厳密に 1ヶ月、2ヶ月、3ヶ月といった期間にはならない。推定誤差におけるこのような影響を取り除くため、推定誤差を当該日におけるオプションの残存期間 (\sqrt{T}) で除することで、単位時間あたりの推定誤差を算出する。

(分析手法 4)

ここでは、月次で得られる単位時間当たりの推定誤差分布 (1ヶ月間の営業日である 20 営業日分の日次の推定誤差から (分析手法 3) で述べた手法によって構築する) を用いて、各営業日において残存期間をスケールした推定誤差分布がビッドアスク・スプレッド内に納まる確率を求め、この 20 営業日分の平均を取って得られる確率に基づいて株価モデルとして BS モデルと MJD モデルを採用することの是非について分析する。ここでは、株価モデルが適切である確率を、推定誤差分布がオプション取引における買値 (ビッド) と売値

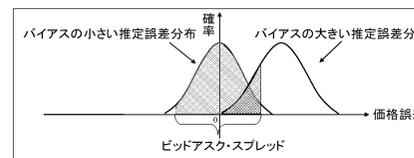


図 1 バイスのある推定誤差分布と
ビッドアスク・スプレッドの模式図
Fig. 1 Estimation-error distributions
with and without bias

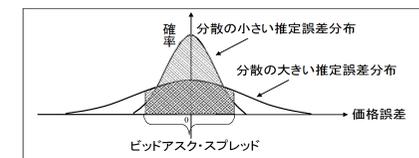


図 2 分散に違いのある推定誤差分布と
ビッドアスク・スプレッドの模式図
Fig. 2 Estimation-error distributions
with two kinds of variance sizes

(アスク) の差額 (ビッドアスク・スプレッド) 内に納まる確率と定義する。先の推定誤差がビッドアスク・スプレッド内に納まるモデルであれば、多少推定誤差があるからといってそのモデルを不適切なものを見なすことはできない。この確率は、推定誤差分布の期待値が 0 に近くてバイアスが少なく (図 1 参照)、分散が小さい (図 2 参照) 場合に、大きくなるため、統計的推定の立場からも意味のある指標と考えられる。

(注 2)

日経 225 オプションは、価格が 1 円から 19 円の範囲であれば 1 円単位 (ビッドアスク・スプレッドは 2 円と想定される) で取引され、20 円以上であれば 5 円単位 (ビッドアスク・スプレッドは 10 円と想定される) で取引される。このため、ビッドアスク・スプレッドは、通常、オプション価格の大きさに応じて異なるものと考えられる。よって、本研究では、まず、データとして利用するオプションを市場価格が 20 円未満のもの、20 円以上のものに分けてそれぞれの平均値を求めた。次に、市場価格が 20 円未満のオプションに対しては 2 円をオプション市場価格が 20 円未満となるものの平均値で除した値、市場価格が 20 円以上のオプションに対しては 10 円をオプション市場価格が 20 円以上となるものの平均値で除した値を、それぞれビッドアスク・スプレッド係数として導出し、この係数をオプション市場価格に乗じた値を当該オプションのビッドアスク・スプレッドとして採用した。

4. 実証分析

4.1 データと分析設定

分析に用いるオプションデータは、大阪証券取引所で取引された 2003 年 5 月 1 日から 2009 年 2 月 27 日における満期が 1ヶ月、2ヶ月、3ヶ月の日経 225 コールオプションとプットオプションである。株価データは、日経 225index の終値を用いる。

データ期間には、サブプライム問題発生以前の市場が比較的安定していた 2003 年 5 月か

ら2007年7月までの期間(安定期と呼ぶ)とサブプライム問題の影響により市場が混乱していた2007年8月から2009年2月までの期間(混乱期と呼ぶ)の2つの期間が含まれる。

分析対象となるオプションは、各残存期間における、原資産価格から乖離幅50円未満のATMプットオプション、乖離幅450円~500円のOTMプットオプション(以下OTM500)、乖離幅950円~1000円のOTMプットオプション(以下OTM1000)の3つである。本研究では市場で観測可能なオプションのIVをスプライン補間し、オプション価格を求めた。尚、実証分析期間内の多くで、金利はほぼ0%であったため、無リスク金利を0%とした。

4.2 分析結果とその考察

(分析対象1)

ジャンプに関するパラメータは、ジャンプの頻度を表すインテンシティ λ 、ジャンプ幅率の期待値 β 、ジャンプ幅率の標準偏差 σ_J の3つである。これら3つのパラメータの月次(各月において日々のパラメータ推定値の平均をとったもの)の推移を、それぞれ、図3、図4、図5に示した。単位時間当たりのパラメータ値にそろえるため、ジャンプ幅率の標準偏差に関しては、 σ_J/\sqrt{T} の推移を掲載した。

まず、株価リターンに中心極限定理が働く観点から分析結果を考察しよう。図3~図5のジャンプに関する単位時間当たりのパラメータ値を見ると、オプション満期が長くなるに従って、ジャンプの頻度を表すインテンシティは小さくなるが、ジャンプ幅率の期待値や標準偏差はそれほど変わらないことがわかる。よって、株価リターンを表す確率変数は、満期までの期間が長くなるに従ってジャンプの頻度が低下する形で中心極限定理が働いて正規分布に近づき、満期が長くなるに従ってスマイルの形状が緩やかになったと考えられる。

次に、株式市場の環境に関する観点から分析結果を考察する。ジャンプの頻度を表すインテンシティは、図3によると安定期の方が、混乱期よりも大きいことがわかる。しかし、ジャンプ幅率の期待値は、図4から、安定期には0%から-10%の範囲で推移しているが、

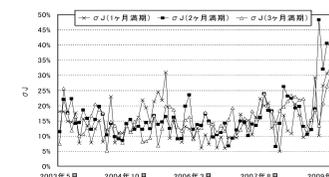


図5 各満期における σ_J の値
Fig.5 σ_J value in each maturity

混乱期には-20%以下になることがわかる。また、ジャンプ幅率の標準偏差も、図5から、安定期よりも、混乱期の方が概して高くなることが確認できる。この分析結果から、混乱期には株価がジャンプする頻度こそ少ないがジャンプが発生したときには大幅に価格が下落し、ジャンプは株価に大きなインパクトを与えられられる。

(分析対象2)

指標1,2を被説明変数とした、式(6)に基づく重回帰分析結果を、表1に示した。

表1から、被説明変数としてどちらの指標を採用した場合でも、また、何れの残存期間のオプションであっても、重回帰モデルの説明力は高く(決定係数は0.65~0.73)、また、全回帰係数は全て1%水準で有意であることがわかる。

ジャンプ成分のインテンシティ λ とジャンプ幅率の標準偏差 σ_J に関する回帰係数は正の値、ジャンプ幅率の平均 β に関する回帰係数は負の値となっている。ここで、回帰係数の符号条件を確認する。(分析対象1)で見たように(図4)、ジャンプ幅率の平均 β は分析期間において殆ど負の値となっており、株価が下方ジャンプする確率が大きいことがわかる。下方ジャンプする確率が大きくなる(β が小さくなる)に従って、指標1,2が大きくなる係数の符号は負であるから、ジャンプ幅率の平均に関する回帰係数は符号条件を満たす。ジャ

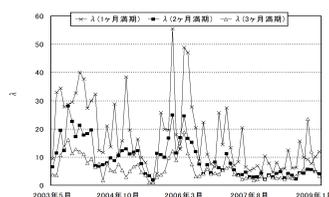


図3 各満期における λ の値
Fig.3 λ value in each maturity

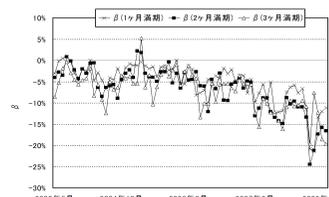


図4 各満期における β の値
Fig.4 β value in each maturity

表1 指標1, 指標2を被説明変数とした重回帰分析結果

Table 1 A result of regression analysis on indicator1 and indicator2

残存期間	指標1			指標2		
	1ヶ月	2ヶ月	3ヶ月	1ヶ月	2ヶ月	3ヶ月
λ	0.01 % *	0.02 % *	0.03 % *	0.02 % *	0.04 % *	0.06 % *
β	-16.86 % *	-6.65 % *	-4.67 % *	-31.94 % *	-13.38 % *	-9.77 % *
σ_J	6.50 % *	3.67 % *	2.55 % *	16.08 % *	7.86 % *	5.83 % *
R^2	0.65	0.65	0.66	0.73	0.68	0.70

* 1%有意水準

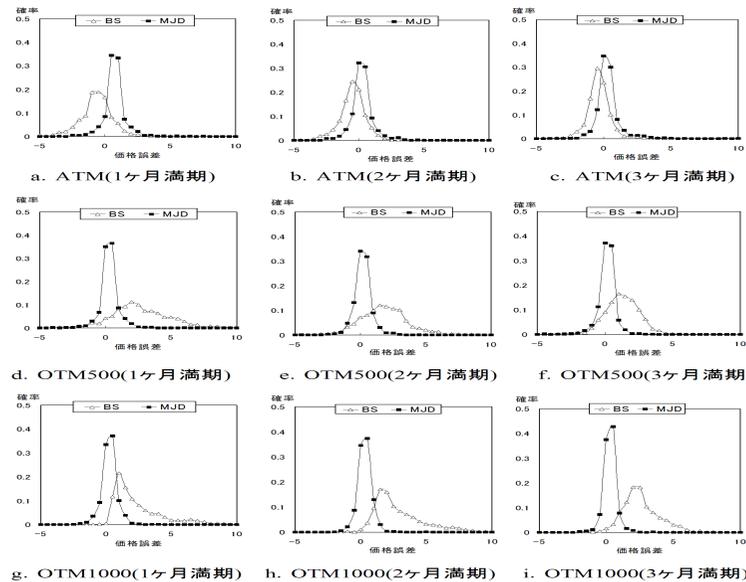


図6 安定期における MJD モデルと BS モデルの推定誤差分布

Fig.6 Estimation-error distributions of BS model and MJD model in a stable period

ンプ成分のインテンシティ λ とジャンプ幅率の標準偏差 σ_J は大きくなるに従って、株価リターン分布の裾が厚くなり指標 1,2 は大きくなる。このような関係を満たす係数の符号は正であるから、ジャンプ成分のインテンシティとジャンプ幅率の標準偏差に関する回帰係数は符号条件を満たす。

これらの分析結果から、ジャンプに関するパラメータは IV のスマイルを相当程度まで説明することがわかる。

(分析対象 3)

BS モデルと MJD モデルに関する推定誤差分布を考察する。図 6, 図 7 には、それぞれ安定期と混乱期における各オプションの単位時間当たりの推定誤差分布を示した。

まず、図 6 の安定期について、BS モデルに焦点を当てて、バイアスと分散について詳細に検討する。ATM オプションでは、推定誤差分布は負の小さなバイアスを持つのに対して、OTM では正の大きなバイアスを持つことが読み取れる。これは、節 1 において述べたよ

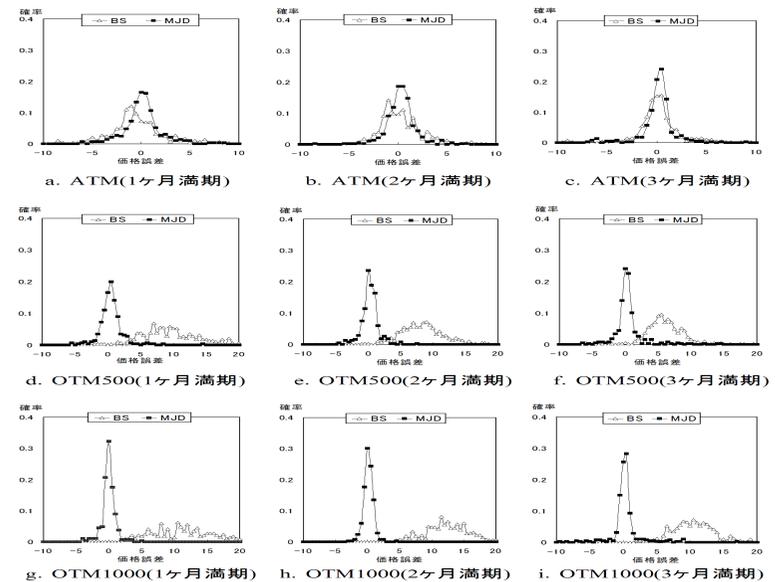


図7 混乱期における MJD モデルと BS モデルの推定誤差分布

Fig.7 Estimation-error distributions of BS model and MJD model in a turbulent period

うに、オプション市場が織り込むオプション満期までの株価リターン分布の裾が厚い場合、OTM オプションにおいて市場価格に BS モデル価格（正規分布を仮定）を近づけるためには、正規分布の標準偏差を大きく取る必要がある。しかし、その標準偏差を大きくしすぎると ATM オプションのモデル価格を市場価格よりも大きく推定することになる。最小二乗法（式 (5) の最小化）を用いたパラメータ推定において、このようなトレードオフが働き、バイアスが生じたものと考えられる。

次に、BS モデルの推定誤差分布の分散をみると、オプション満期が長くなるに従って分散が小さくなっていくことがわかる。これは、満期が短い場合には株式市場の環境によって、オプション市場が織り込む満期までの株価リターン分布として正規分布に比較的近いものから極端に離れるものまで様々に現れるが、満期が長くなるにしたがって中心極限定理が働き、極端に正規分布から乖離するような分布がオプション市場価格に織り込まれる頻度は少なくなることが考えられる。

また、図7を見ると、市場の混乱期には特に満期が短い場合に、オプション市場が織り込む株価リターン分布は正規分布から極端に離れるため、MJDモデルを採用した場合でも推定誤差分布の分散が小さくはないことがわかる。しかし、満期が長くなると中心極限定理が働いて株価リターン分布の裾の厚さが緩和されるため、推定誤差分布の分散は縮小する。

上記の推定誤差分布に関する考察から、MJDモデルでは、混乱期において推定誤差分布の分散が大きくなるが、BSモデルに比べ、何れのオプションに関してもバイアスは少なくオプション評価モデルとして許容されるものと考えられる。

(分析対象4)

BSモデルとMJDモデルの推定誤差分布がビッドアスク・スプレッドに納まる確率(適正確率と呼ぶ)を時系列的に図8に示した。

何れのオプションに関しても、MJDモデルの方がBSモデルよりも適正確率は高く、オプション評価モデルとして相応しいモデルであることがわかる。ここでも確認しておきたい

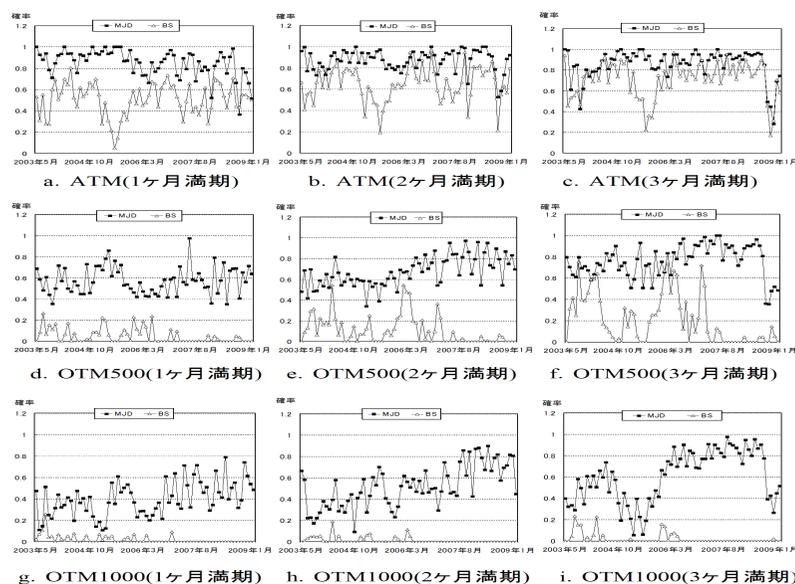


図8 BSモデルとMJDモデルの推定誤差分布がビッドアスク・スプレッドに納まる確率
Fig.8 The probability of estimation-error distributions of BS model and MJD model fall on bid-offer spreads

のは、ATMオプションであれば、MJDモデルの適正確率とBSモデルの適正確率にそれほど大きな差がないこと、また、ATMやOTM500オプションであれば、満期が長くなるに従ってBSモデルの適正確率が上昇することである。これらの結果は、(分析対象3)の推定誤差分布において考察したことと整合的である。OTM1000オプションになると、BSモデルの適正確率は極めて低いことがわかる。このことから、権利行使価格が現在の株価から1000円以上離れるようなOTMオプションでは、株価リターン分布に正規分布を仮定したBSモデルを利用するわけにはいかないことがわかる。

5. まとめと結語

本研究では、株価リターンとして中心極限定理が働く確率分布の中からジャンプ拡散モデルが生成する確率分布を取り上げた。スマイルやスキューの傾きをジャンプ成分に関するパラメータで説明することを試みたところ、ジャンプ成分の説明力が高いことがわかった。

オプション市場価格とモデル価格との推定誤差に関する分布をオプションの種類ごとに調べたところ、BSモデルは、MJDモデルに比べて、推定誤差分布のバイアスや分散が大きかったことがわかった。この傾向は、満期が短く権利行使価格が現在の株価から大きく離れたOTMオプションにおいて顕著に見られることもわかった。推定誤差分布の分散は、株価リターンに中心極限定理が働くことを受けて、オプション満期が長くなるに従って縮小することも確認された。推定誤差分布に基づくモデルの適正確率を導出したところ、BSモデルではATMで満期の長いオプションを評価する場合以外は適正なモデルとは言えないのに対し、MJDモデルは満期が短く権利行使価格が現在の株価から大きく離れたOTMオプションの評価を除き、オプション評価モデルとして概ね適正であることがわかった。

参考文献

- 1) Carr,P. and Wu,L.(2003a): What type of process underlies options? A simple robust test, Journal of Finance 58, 2581-2610.
- 2) Carr,P. and Wu,L.(2003b): Finite moment log stable process and option pricing, Journal of Finance 58, 753-777.
- 3) Merton,R.C.(1976): Option pricing when underlying stock return are discontinuous, Journal of Financial Economics 3, 125-144.
- 4) 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史 (2006):Edgeworth展開に基づくオプション評価原資産収益率がMertonのJump-Diffusionモデルに従う場合, 応用統計学 35,113-128.
- 5) 野村哲史, 宮崎浩一 (2005):日経225オプションの織り込む株価過程の連続成分とジャンプ成分, 現代ファイナンス 18,47-67