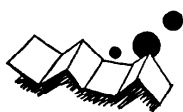


解説



擬似双直交性理論とその応用†

小川 英 光††

1. ま え が き

パターン認識, 画像処理, データ処理といった分野では, 関数を, 性質の良く分かっている関数系で展開することが, しばしば行われている。それは次のような理由による。第1は, 関数そのものを扱うよりも, その展開係数を扱う方が, 物理的意味が分かりやすい場合があること (たとえば, Fourier 級数展開と周波数の関係), 第2は, 展開に用いる関数系を関数空間の座標系とみれば, 展開係数が座標成分になり, 関数空間の幾何学的イメージが描きやすくなること, 第3は, 線形システムに対しては, 基本となる関数系に対する応答が分かれば, 任意の関数に対する応答が, それらの一次結合で表現できること, 第4は, 積分変換のような線形処理が, 展開係数に注目することにより, 行列演算で実現できることなどである。

関数の展開で最も簡単なものは, Fourier 級数展開, Karhunen-Loève 展開, Walsh-Hadamard 展開のように, 互いに直交している関数系を使って展開する場合である。すなわち, 内積を $(\cdot, \cdot)$ で表すとき†††,

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{m,n} \quad (1)$$

なる正規直交系 $\{\varphi_n\}$ を使えば, 展開係数が一意に定まり,

$$f(x) = \sum_n (f, \varphi_n) \varphi_n(x) \quad (2)$$

と展開できる。これは直交展開と呼ばれている。

次に簡単なものは, 巾級数展開や Lagrange 補間のように, 直交はしていないけれども一次独立な関数系を使って展開する場合である。この場合も展開係数は一意に定まる。すなわち, 展開に使用する関数系 $\{\varphi_n\}$ に対して, 双直交関係

$$(\varphi_m^*, \varphi_n) = \delta_{m,n} \quad (3)$$

を満足する双対基底と呼ばれる関数系 $\{\varphi_n^*\}$ が一意に

定まり, それを使って

$$f(x) = \sum_n (f, \varphi_n^*) \varphi_n(x) \quad (4)$$

と展開できるのである。これは双直交展開と呼ばれている。

これで全てが尽くされているわけではない。時には, 冗長性を導入して信頼性を向上させるために, また時には別の理由で, 一次従属な関数系を使って展開しなければいけないことがある。関数系の一次従属性から今度は, 展開係数の決め方に無限の自由度が出てくる。しかし, その決め方を適当に定めれば, 双直交展開の場合と同じ形式の取扱いが可能である。これを擬似双直交展開という。

これら直交系, 一次独立系, 一次従属系の全てを統一的に取り扱うようにしたものが, 擬似双直交性理論である。本稿では, この理論の紹介を行うとともに, 通信, 画像処理, 標準化定理, 及び, 計算機トモグラフィへの応用を概説することにする。

2. 擬似直交基底¹⁾

擬似双直交基底の説明に入る前に, その特別な場合である擬似直交基底について述べる。

††† 内積とは, 2つの関数あるいは2つのベクトルに対して一つの数を対応させるものであって, 次の3条件を満足するものである。ただし, f, g, h は関数またはベクトルであり, a, b は数, $\bar{\cdot}$ は複素共役である。

$$i) (af + bg, h) = a(f, h) + b(g, h)$$

$$ii) (f, g) = \overline{(g, f)}$$

$$iii) (f, f) \geq 0; (f, f) = 0 \iff f = 0.$$

たとえば, 良く知られているように, N 次元ベクトル

$$f = (f_n), g = (g_n)$$

に対して

$$(f, g) = \sum_{n=1}^N f_n \bar{g}_n \quad (F1)$$

とおけば, 内積になっている。同様に, 区間 (a, b) 上で定義された関数 f, g に対して

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx \quad (F2)$$

とおけば, 内積になっている。内積に対して

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (F3)$$

とおいたものを, ノルムという。

† A Theory of Pseudo-Biorthogonal Bases and its Applications by Hidemitsu OGAWA (Department of Computer Science Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology).

†† 東京工業大学工学部情報工学科

N 次元複素 Hilbert 空間 (内積の定義されている線形空間) を H_N とする. H_N の元はベクトルであっても, 一変数関数であっても, 多変数関数であってもよい. H_N の $M(\geq N)$ 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を使って, 任意の $f \in H_N$ が

$$f = \sum_{m=1}^M (f, \phi_m) \phi_m \quad (5)$$

と展開できるとき, $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を H_N の擬直交基底 (POB; pseudo-orthogonal base) という. 略して擬直交系 (pseudo-orthogonal system) ということもある. 式(5)と式(2)は同じ形式であるから, POB は正規直交基底 (OB; orthonormal base) の拡張概念になっている.

【例 1】 (ベクトル空間の場合)

パラメータ $\lambda \in [0, 1]$ を含んだ 3 個のベクトル

$$\begin{cases} \phi_1(\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}, & \phi_2(\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \phi_3(\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2(1-\lambda^2)} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

を考える. ここで $\equiv$ は定義を表す. a, b を任意の複素数とし, $f \equiv (a, b)^T$ (T は転置を表す) とすれば,

$$\begin{cases} (f, \phi_1(\lambda)) = (a - b\lambda)/\sqrt{2} \\ (f, \phi_2(\lambda)) = (a + b\lambda)/\sqrt{2} \\ (f, \phi_3(\lambda)) = b\sqrt{1-\lambda^2} \end{cases} \quad (7)$$

となるから,

$$\sum_{m=1}^3 (f, \phi_m(\lambda)) \phi_m(\lambda) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる. すなわち, $\{\phi_m(\lambda)\}_{m=1}^3$ は 2 次元複素ベクトル空間 C^2 の POB になっている. $\lambda = 1/\sqrt{2}$ の場合を図-1 に示す. 図-1 の ϕ_1, ϕ_2 は C^2 の自然基底. すなわち, $\phi_1 = (1, 0)^T, \phi_2 = (0, 1)^T$ である.

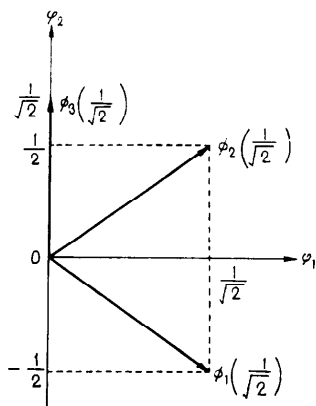


図-1 擬直交基底の例 ($N=2, M=3$)

【例 2】 (関数空間の場合)

$H_N(N=2)$ として, 区間 $[-1, 1]$ 上で定義された一次以下の複素数値多項式, すなわち,

$$f(x) = ax + b \quad (a, b: \text{複素数}) \quad (9)$$

の形の関数全体で, 内積が

$$(f, g) \equiv \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (10)$$

で定義されている空間を考える.

$$\begin{cases} \phi_1(x; \lambda) \equiv (1 - \sqrt{3}\lambda x)/2 \\ \phi_2(x; \lambda) \equiv (1 + \sqrt{3}\lambda x)/2 \\ \phi_3(x; \lambda) \equiv \sqrt{3(1-\lambda^2)}x \end{cases} \quad (11)$$

とおけば, $\{\phi_m(x; \lambda)\}_{m=1}^3$ は H_N の POB になる. 実際, 式(9)~(11)より

$$\begin{cases} (f(x), \phi_1(x; \lambda)) = b - a\lambda/\sqrt{3} \\ (f(x), \phi_2(x; \lambda)) = b + a\lambda/\sqrt{3} \\ (f(x), \phi_3(x; \lambda)) = a\sqrt{2(1-\lambda^2)}/3 \end{cases} \quad (12)$$

となるから,

$$\sum_{m=1}^3 (f(x), \phi_m(x; \lambda)) \phi_m(x; \lambda) = ax + b \quad (13)$$

となり, 式(5)が成立している. ところで,

$$\phi_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2(x) \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}x \quad (14)$$

とおけば, $\{\phi_n\}_{n=1}^2$ は H_N の OB になっている. そ

して式(11)の $\{\phi_m(x; \lambda)\}_{m=1}^3$ は $\{\phi_n\}_{n=1}^2$ を使って

$$\begin{cases} \phi_1(x; \lambda) = (\phi_1(x) - \lambda\phi_2(x))/\sqrt{2} \\ \phi_2(x; \lambda) = (\phi_1(x) + \lambda\phi_2(x))/\sqrt{2} \\ \phi_3(x; \lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}\phi_2(x) \end{cases} \quad (15)$$

と表される. 式(15)の第一式の $\phi_1(x), \phi_2(x)$ の係数 $1/\sqrt{2}, -\lambda/\sqrt{2}$ を縦に並べてベクトルの形に表せば, 式(6)の $\phi_1(\lambda)$ になる. 同様に $\phi_2(x; \lambda), \phi_3(x; \lambda)$ の $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^2$ に関する展開係数を縦に並べてできるベクトルは, それぞれ式(6)の $\phi_2(\lambda), \phi_3(\lambda)$ になっている. つまり, 図-1 の ϕ_1, ϕ_2 を式(14)の $\phi_1(x), \phi_2(x)$ とみなせば, 図-1 の各ベクトル $\phi_m(1/\sqrt{2}) (m=1, 2, 3)$ は式(15)の各関数 $\phi_m(x; 1/\sqrt{2})$ になる. このように, ベクトル空間も関数空間も, 数学的には同じ構造をしているのである.

以下, POB の特徴付けを行う. H_N に $M(\geq N)$ 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が与えられた場合を考える. M 次元 Hilbert 空間 H_M と, H_M の OB $\{\phi'_m\}_{m=1}^M$ を任意に固定し,

$$U \equiv \sum_{m=1}^M \langle \phi'_m, \phi_m \rangle \quad (16)$$

とおく. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, 二つの Hilbert 空間 H_M ,

H_N の元 f, g に対し

$$\langle f, g \rangle \equiv \langle h, g \rangle f: h \in H_N \quad (17)$$

によって定義される H_N から H_M への作用素であり, dyad と呼ばれている†. dyad の 1 次結合を dyadic という.

したがって, 式(16)の dyadic で定義された U は, H_N から H_M への作用素になっている. U の共役作用素を U^* で表し, H_N 上の恒等変換を I とする.

[定理 1] 次の各命題は互いに同値である.

(i) $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は POB である.

$$(ii) \langle f, g \rangle = \sum_{m=1}^M \langle f, \phi_m \rangle \overline{\langle g, \phi_m \rangle}: \forall f, g \in H_N, \quad (18)$$

$$(iii) U^*U = I. \quad (19)$$

式(18)は, f, g の $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対する展開係数から作られるベクトルの内積が, f と g の内積と同じ値をとることを表している. これは, 正規直交展開に関する公義 Parseval の等式 ($f=g$ の場合が Parseval の等式) に対応するものであり, POB の展開係数に対しても, OB と同様の取扱いができることを意味している.

式(19)は, たとえば次のようにして確かめることができる. 例 1 をもう一度考えてみる. この場合, $N=2, M=3, H_N=C^2$ である. そこで, $H_M=C^3$ とし, $\{\phi_m\}_{m=1}^3$ として C^3 の自然基底を採用する. このとき式(16)から作られる作用素を $U(\lambda)$ とすれば,

$$U(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda \\ 0 & \sqrt{2(1-\lambda^2)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

† f, g がそれぞれ N 次元及び M 次元縦ベクトルの場合,

$$\langle f, g \rangle = f g^* \quad (F4)$$

となる. ここで g^* は g を転置して複素共役をとったものである. すなわち, 縦ベクトル f を $N \times 1$ 次行列とみなし, 横ベクトル g^* を $1 \times M$ 次行列とみなして, 両者の行列としての積をとって得られる $N \times M$ 次行列が $\langle f, g \rangle$ である. また, H_N, H_M が関数空間で, H_N の内積が式 (F2) で定義されているとき, $\langle f, g \rangle$ は

$$K(x, y) = f(x) \overline{g(y)} \quad (F5)$$

を積分核とする積分変換になる:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b K(x, y) f(x) \overline{g(y)} dy. \quad (F6)$$

†† 作用素 A の共役作用素 A^* とは,

$$(A^* f, g) = (f, A g) \quad (F7)$$

によって定義される作用素 A^* のことである. A が行列 $(a_{m,n})$ で, 内積が式 (F1) で定義されているとき, $A^* = (\overline{a_{n,m}})$ となる. A が積分作用素

$$(A f)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (F8)$$

で, 内積が式 (F2) で定義されているとき,

$$(A^* g)(x) = \int_a^b \overline{K(y, x)} g(y) dy \quad (F9)$$

となる.

となる. つまり, $U(\lambda)$ の第 m 行ベクトルが, 式(6)の $\phi_m(\lambda)$ を転置したものになっている. そして, 式(20)から直接式(19)を確かめることができるのである.

式(19)は, U が等長作用素になることを意味している. すなわち, 次の関係が成立する.

$$\|Uf\| = \|f\|: f \in H_N. \quad (21)$$

式(21)は, H_N の 2 点間の距離 $\|f-g\|$ が, U によって H_M へ変換された後も保存されていること, すなわち,

$$\|Uf - Ug\| = \|f - g\|: f, g \in H_N \quad (22)$$

が成立することと同値である. この性質は, 次章で POB を情報伝送に応用する際に利用する.

この逆も成立する. すなわち任意の等長作用素が POB を使って次のように表現できるのである.

[定理 2] H_N から H_M への等長作用素を U とする. $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を H_M の OB とし,

$$\phi_m = U^* \phi'_m \quad (23)$$

とおけば, $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は H_N の POB になり, 式(16)が成立する.

[定理 3] H_N の POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して

$$\|\phi_m\| \leq 1 \quad (24)$$

$$\sum_{m=1}^M \|\phi_m\|^2 = N \quad (25)$$

が成立する.

式(25)の右辺の値は H_N の次元 N と同じ値であり, M 及び POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の選び方によらない定数である. すなわち, 式(25)は POB に対する一つの不変量を与えており, 各種応用に対して有効な働きをしている²⁾.

POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の各元の長さ $\|\phi_m\|$ は, 式(24)の範囲で, m によって異なる値をとる. そこで, 元の長さ $\|\phi_m\|$ のばらつきの度合を計る 尺度として,

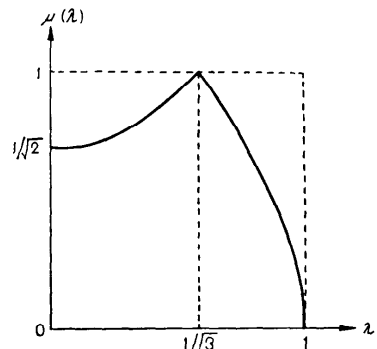


図-2 POB $\{\phi_m(\lambda)\}_{m=1}^3$ の偏長度 $\mu(\lambda)$

$$\mu \equiv \frac{\min_m \|\phi_m\|}{\max_m \|\phi_m\|} \quad (26)$$

なる量を導入し、POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の偏長度と名付ける。

たとえば、式(6)および式(11)の POB の偏長度は同じ値をとるから、それを $\mu(\lambda)$ とおけば、

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{(1+\lambda^2)/2(1-\lambda^2)}: 0 \leq \lambda \leq 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)}: 1/\sqrt{3} < \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (27)$$

となる。 $\mu(\lambda)$ のグラフを 図-2 に示す。

図-2 から分かるように、 $0 \leq \mu \leq 1$ なる任意の μ に対して、偏長度 μ の POB が存在する。 $\mu=1$ ということは、 $\|\phi_m\|$ が m によらず一定であることを意味している。このような $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を正規擬直交基底 (PONB: pseudo-orthonormal base) という。OB は明らかに PONB である。式(25)より次の定理が成立する。

[定理 3] H_N の PONB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して

$$\|\phi_m\| = \sqrt{\frac{N}{M}} \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (28)$$

が成立する。

3. 情報伝送への応用²⁾

空間情報を伝送する際に生じる比例性ノイズを、POB を使って抑制する方法を述べる。伝送系のモデルとして、図-3 を考える。ここで信号空間 H_N は、連続関数の空間であってもよいし、それを標準化して得られるベクトル空間であってもよい。とにかく、伝送の対象となる信号の全体は、 N 次元実 Hilbert 空間をなすものとする。

さて、 H_N の元を伝送するためには、 H_N の次元が N であることから、最低限 N 個の値を伝送しなければいけない。本章では、 $M(\geq N)$ 本の伝送路を使って M 個の値を送ることを考える。したがって、数学的に表現すれば、伝送空間は M 次元実ベクトル空間 R^M になる。

信号空間 H_N と伝送空間 R^M の間の橋渡しをする操作が、送信側の写像 T_T (変調) と受信側の写像 T_R (復調) である。そして、伝送空間で混入してくるノイズの影響ができるだけ小さくなるように、変調と復調の写像を決定しようというのが、本章の目的である。何



図-3 情報伝送系のモデル

も条件がなければ、 T_T , T_R を決定することはできない。そこで次の条件を導入する。

(i) 無歪条件: 送信側から送られてきた信号は、ノイズがなければ、受信側で元の信号に完全に復元される必要があるから、2つの写像 T_T , T_R の間には

$$T_R T_T = I \quad (29)$$

なる関係が成立しなければならない。

(ii) T_T , T_R : 線形作用素

(iii) T_T : 等長作用素 (伝送空間においても、信号空間と同じ位相を保存すること)。

信号空間 H_N から伝送空間 R^M への等長作用素を U とすれば式(19)が成立する。よって、上記条件(i)~(iii)を満足する T_T , T_R として

$$T_T \equiv U, \quad T_R \equiv U^* \quad (30)$$

を採用すればよい。

$M=N$ のとき、等長作用素はユニタリ作用素になる。あとで示すように、ユニタリ作用素をどのように選んでも、伝送空間 R^M で混入してくる比例性ノイズを抑制することはできない。そこで、伝送空間の次元 M を信号空間の次元 N よりも大きくして、ノイズを抑制しようとするのが、本章で採用したノイズ抑制法である。

定理2によれば、等長作用素 U と R^M の自然基底 $\{e_m\}_{m=1}^M$ から、

$$\phi_m \equiv U^* e_m \quad (31)$$

によって、 H_N の POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を構成することができる。そして、この POB を使って U が、

$$U = \sum_{m=1}^M \langle e_m, \phi_m \rangle \quad (32)$$

と表現できるのである。したがって、

$$U f = \sum_{m=1}^M (f, \phi_m) e_m: f \in H_N \quad (33)$$

となる。すなわち、 T_T として U を採用するということは $f \in H_N$ を POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ で展開し、第 m 番目の展開係数 (f, ϕ_m) を第 m 番目の伝送路で伝送することに対応している。また、 T_R として U^* を採用することは、

$$U^* g = \sum_{m=1}^M (g, e_m) \phi_m: g \in R^M \quad (34)$$

より、受信信号 $g = (g_m) \in R^M$ の第 m 番目の値 $g_m = (g, e_m)$ を ϕ_m の座標成分として、 H_N の元を合成することに対応している。さらに、定理1, 2を考慮すれば、等長作用素 U を決定することと、 H_N の POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を決定することが、同値であることが分かる。

伝送される信号を f , その信号の伝送空間におけるベクトル表現を q とする。信号は、伝送空間で比例性ノイズの影響を受けて $\hat{q}$ になるものとする。これが写像 U^* により、もとの信号空間にもどされて $\hat{f}$ になる。式で表せば、次のようになる。

$$\begin{cases} q = Uf, \\ \hat{q} = q + Dq, \\ \hat{f} = U^*\hat{q}. \end{cases} \quad (35)$$

ここで D は

$$D \equiv \sum_{m=1}^M \Delta_m \langle e_m, e_m \rangle \quad (36)$$

なる対角行列であり、 Δ_m は第 m 番目の伝送路に発生する比例性ノイズの比例定数である。このノイズは、各伝送路間で互いに無相関であり、同程度の大きさであるものとする。すなわち、ノイズに関する平均を E とするとき、次式を仮定する。

$$E \Delta_m \Delta_n = \Delta^2 \delta_{m,n}. \quad (37)$$

ノイズの影響を評価する尺度として

$$\varepsilon^2 \equiv E E \left\| \hat{f} - f \right\|^2 \quad (38)$$

を採用する。

$$G \equiv E \langle f, f \rangle \quad (39)$$

とおけば、次の補題が成立する。

【補題 1】

$$\varepsilon^2 = \Delta^2 \sum_{m=1}^M \|\phi_m\|^2 (G \phi_m, \phi_m). \quad (40)$$

ここで $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は、式(31)で定義される H_N の POB である。

最適解を求める前に、 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ として PONB を使う場合を考えてみる。このとき式(28)より次の系を得る。

【系 1】 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が PONB のとき

$$\varepsilon^2 = \frac{N}{M} \Delta^2 t_r(G) \quad (41)$$

となる。

式(41)の右辺は、POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の元の数 M だけに依存し、 ϕ_m の形にはよらない。しかも、POB は PONB であるから、次の定理が成立する。

【定理 4】

(i) 伝送路の数 M と信号空間の次元 N が等しいとき、ユニタリ作用素 U をどのように選んでも、伝送空間で生じる比例性ノイズを抑制することはできず、

$$\varepsilon^2 = \Delta^2 t_r(G) \quad (42)$$

となる。

(ii) 伝送路の数を $M(>N)$ とし、PONB によって等長作用素 U を構成すれば、 $M=N$ の場合に比して、ノイズを N/M に抑制することができる。したがって、 M を大きくすることにより、いくらでもノイズを抑制することができる。

こうして、PONB を使うことにより、少なくとも N/M にノイズを抑制できることが分かった。そして、 G の固有値が全て縮退している場合、すなわち、信号空間 H_N が等方な構造をしている場合には、これ以上ノイズを抑制できないことも分かっている²⁾。一方、 H_N が等方でない場合、 N/M よりもさらに効率の良い POB が存在する例が知られている²⁾。しかし、式(40)の値を最小にする最適 POB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を求める問題はまだ未解決のままである。

4. 擬似双直交基底⁵⁾

N 次元 Hilbert 空間 H_N に $M(\geq N)$ 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を適当にとれば、たとえば式(5)、(18)のように $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を H_N の正規直交基底 (OB) と同じように扱うことができることを示し、一つの応用例として、情報伝送系における比例性ノイズ抑制法について述べてきた。

しかし、この擬似直交性理論を適用するためには、 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を適当にとることが重要であって、任意に選ばれた $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は必ずしも擬似直交基底 (POB) にならない。実際、2 次元ユニタリ空間 C^2 に 3 個のベクトル

$$\phi_1 \equiv a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_2 \equiv b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi_3 \equiv c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

が与えられた場合を考えてみる。

$$U \equiv \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (44)$$

とおけば、

$$U^* U = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & |b|^2 \\ |b|^2 & |b|^2 + |c|^2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

となるから、 $b \neq 0$ のとき、 a, b, c をどのように選んでも、 $U^* U$ を単位行列にすることはできない。よって、定理 1 より、ベクトル $\phi_m (m=1, 2, 3)$ の大きさをどのように調節しても、 $\{\phi_m\}_{m=1}^3$ を C^2 の POB にすることはできない。

ところが、我々が直面する問題では、まず $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が与えられるという場合が多い。したがって、もしそ

† G の固有元による展開が、Karhunen-Loève 展開である。

うして与えられた $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が POB になっていないければ、当然のことながら擬似直交性理論は使えない。

しかし、正規直交基底が正規双直交基底に拡張されているように、擬似直交基底の概念を擬似双直交基底にまで拡張すれば、 H_N に任意に与えられた全空間を張るような元の組 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して†, $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ が擬似双直交基底になるような対の組 $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ を、常に構成することができるのである。このように、擬似直交基底の概念を擬似双直交基底に拡張することによって、その適用範囲を大幅に拡大することができる。本章では、この擬似双直交基底について述べることにする。

H_N の $2M(M \geq N)$ 個の元 $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を使って、任意の $f \in H_N$ が

$$f = \sum_{m=1}^M (f, \phi_m^*) \phi_m \quad (46)$$

と展開できるとき、 $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を H_N の擬似双直交基底 (PBOB; pseudo-biorthogonal base) という。略して、擬似双直交系 (pseudo-biorthogonal system) ということもある。

式(46)は特別の場合として、式(2), (4), (5)を含んでいる。すなわち、 $M=N$ かつ全ての m に対して $\phi_m^* = \phi_m$ のとき正規直交基底 (OB) になり、 $M=N$ かつ $\phi_m^* \neq \phi_m$ のとき正規双直交基底 (BOB; biorthonormal base) になる。 $M > N$ かつ全ての m に対して $\phi_m^* = \phi_m$ のとき擬似直交基底 (POB) になる。こ

表-1 OB, BOB, POB, PBOB の相互関係*

	$\phi_m^* = \phi_m$	$\phi_m^* \neq \phi_m$
$M=N$	OB	BOB
$M>N$	POB	PBOB

* OB: orthonormal base
BOB: biorthonormal base
POB: pseudo-orthogonal base
PBOB: pseudo-biorthogonal base

† H_N の任意の元が $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の線形結合で表現できるとき、 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は H_N を張る”という。

†† 式(46)が式(1), (3)の拡張になっていないことは、注意を要する。 H_N の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して、式(1)と(2)は等価である。OB の定義として、どちらを採用してもよい。OB 理論の範囲だけであれば、式(2)よりも式(1)を定義とした方が、ある点では分かりやすい。“正規直交”という名称も、式(1)に対して付けられたものである。しかし、式(1)を定義として採用する限り、OB の概念は BOB にまでしか拡張できない。ところが式(2)を採用しておけば、BOB だけでなく POB にも PBOB にも拡張できるのである。式(1), (3)による定義は、 $\{\phi_m\}_{m=1}^M, \{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ の外見に関する性質を述べた現象論的定義である。それに対して式(2), (4), (5), (46)は、基底のもつ機能に着目した機能的定義である。一つ概念を規定する際に重要なことは、外見ではなく、その概念がどのような動きをするかということである。

れら4種類の基底の相互関係を表-1に示す††。

【例3】式(43)で $a=b=c=1$ の場合、すなわち、

$$\phi_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

の場合を考えてみる。実数 $\lambda (\lambda \neq -2)$ を使って

$$\begin{cases} \phi_1^*(\lambda) \equiv \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \phi_2^* \equiv \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \phi_3^*(\lambda) \equiv \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda+1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (48)$$

とおけば、 $\{\phi_m, \phi_m^*(\lambda)\}_{m=1}^3$ は C^2 の PBOB になる。実際、 C^2 の任意の元を $f \equiv (a, b)^T$ とすれば、

$$\begin{cases} (f, \phi_1^*(\lambda)) = [(\lambda+1)a - b]/(\lambda+2) \\ (f, \phi_2^*(\lambda)) = (a+b)/(\lambda+2) \\ (f, \phi_3^*(\lambda)) = [-a + (\lambda+1)b]/(\lambda+2) \end{cases} \quad (49)$$

となるから、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(\lambda+1)a - b}{\lambda+2} \phi_1 + \frac{a+b}{\lambda+2} \phi_2 + \frac{(\lambda+1)b - a}{\lambda+2} \phi_3 \quad (50)$$

となり、 $\lambda \neq -2$ なる任意の実数 λ に対して式(46)が成立している。 $\lambda=1$ の場合を図-4に示す。図-4の ϕ_1, ϕ_2 は C^2 の自然基底、すなわち、 $\phi_1 = (1, 0)^T, \phi_2 = (0, 1)^T$ である。図-4には、 λ に対する $\phi_m^*(\lambda)$ の軌跡も同時に示してある。たとえば、 λ が種々の値をとるとき、 $\phi_1^*(\lambda)$ は図-4の $\phi_1^*(\lambda)$ と記した直線上を動く。

この図から分かるように、同じ $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して無限に多くの $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が存在する。しかも、いくらでも大きなノルム、及び、いくらでも小さなノルムをもつ $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が存在するのである。

以下、PBOB の特徴付けを行う。 H_N に $2M(M \geq N)$ 個の元 $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ が与えられた場合を考える。

$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ 及び $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ は、それぞれ全空間 H_N を張っているものとする。定理1の場合と同様に、 M 次元

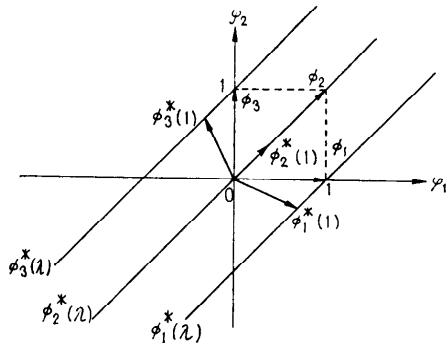


図-4 C^2 の PBOB の例 $\{\phi_m, \phi_m^*(\lambda)\}_{m=1}^3$

Hilbert 空間 H_M と, H_M の OB $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を任意に固定し,

$$\begin{cases} U \equiv \sum_{m=1}^M \langle \phi_m', \phi_m \rangle & (51) \\ V \equiv \sum_{m=1}^M \langle \phi_m', \phi_m^* \rangle & (52) \\ W \equiv UV^* & (53) \end{cases}$$

とおく. 式(51)は式(16)と全く同じものである. U , V は H_N から H_M への作用素であり, W は H_M 上の作用素である.

[定理 5] 次の各命題は互いに同値である.

- (i) $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ は PBOB である.
- (ii) $\{\phi_m^*, \phi_m\}_{m=1}^M$ は PBOB である.
- (iii) $(f, g) = \sum_{m=1}^M (f, \phi_m) \overline{(g, \phi_m^*)}$: $f, g \in H_N$. (54)
- (iv) $V^*U = I$. (55)
- (v) $W^2 = W$. (56)

たとえば式(55)から式(56)を導くためには, 次のようにすればよい. 式(53), (55)より

$$\begin{aligned} W^2 &= (UV^*)(UV^*) = U(V^*U)V^* \\ &= UIV^* = UV^* = W \end{aligned}$$

となり, 式(56)を得る.

(i), (ii)より, 式(46), (54)が, ϕ_m と ϕ_m^* を交換してもそのまま成立することが分かる. たとえば式(46)に対応して

$$f = \sum_{m=1}^M (f, \phi_m) \phi_m^* \quad (57)$$

なる展開公式が成立する. 例3及び図-4に示したように, 同じ $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して PBOB となるような $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ は無限に多く存在する. すなわち, 式(50)の例からも分かるように, 式(46)における展開係数 (f, ϕ_m) は, 同じ $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対しても $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の選び方によって種々の値をとる. これは $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の一次従属性を考えれば納得のいくところである. 式(57)は式(46)に対して次の意味で双対な関係になっている. すなわち, 式(46)では展開に使う元の組 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が一定で, 展開係数の方に無限の自由度があった. これに対して式(57)では, 展開係数が一定で, 展開に使う元の組 $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ の方に無限の自由度があるのである. たとえば, 例3で扱った PBOB に対しては, 式(50)の双対な関係は,

$$(f, \phi_1) = a, (f, \phi_2) = a + b, (f, \phi_3) = b \quad (58)$$

より,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\phi_1^*(\lambda) + (a+b)\phi_2^*(\lambda) + b\phi_3^*(\lambda) \quad (59)$$

となる. 展開係数が同じで, $\{\phi_m^*(\lambda)\}_{m=1}^3$ が λ によって異なるにもかかわらず, 式(59)は同じベクトルを表しているのである.

(iii)は, 内積の BOB による表現形式が PBOB に対してもそのまま成立することを示しており, 式(18)に対応するものである.

(iv)は PBOB に関する基本的な関係式の一つであり, V^* が U の左逆になることを表している. なお, 全ての m に対して $\phi_m^* = \phi_m$ のとき, PBOB は POB になるが, このとき $V = U$ となり, 式(55)は式(19)と一致する.

(v)は次のことを意味している. U の値域, すなわち, H_N のあらゆる元 f を U で変換したものの Uf の全体を $R(U)$ で表す. W の核, すなわち, $Wg = 0$ となる g の全体を $N(W)$ で表す. $R(U)$, $N(W)$ はともに H_M の部分空間になっている. そして式(56)は, W が H_M から $R(U)$ の上への, $N(W)$ に沿った射影作用素になっていることを意味している (図-5). このように, H_N の $2M$ 個の元 $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ が PBOB になるという事柄が, W というただ一個の作用素を使って特徴付けられるのである. またこの W から, たとえば下記の定理6に示すように, 多くの興味ある性質を導くことができる^{5), 6)}.

例3をもう一度考えてみる. この場合, $N=2$, $M=3$, $H_N = \mathbf{C}^2$ である. そこで, $H_M \equiv \mathbf{C}^3$ とし, $\{\phi_m'\}_{m=1}^3$ として $\mathbf{C}^3$ の自然基底を採用する. このとき, 式(51), (52)から作られる作用素をそれぞれ U , $V(\lambda)$ とすれば,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(\lambda) = \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

となる. つまり, U , $V(\lambda)$ の第 m 行ベクトルが, それぞれ式(47), (48)の ϕ_m , $\phi_m^*(\lambda)$ を転置したものである. 式(60)から式(55)を直接確かめることができる. また, 式(60)を式(53)に代入してできる W

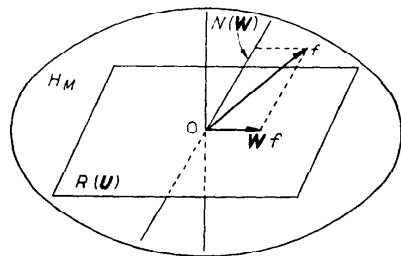


図-5 射影作用素 W

を $W(\lambda)$ とすれば,

$$W(\lambda) \equiv UV(\lambda)^* = \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & \lambda \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

となる。式(61)より式(56)が確認できる。

式(61)の行列 $W(\lambda)$ のトレース $t_r(W(\lambda))$ を求めれば,

$$t_r(W(\lambda)) = 2 \quad (62)$$

となり, λ に無関係に一定値をとる。これは, 次の定理に示すように, 全ての PBOB に対して成立する重要な性質である。

[定理 6] H_N の PBOB $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ に対して,

$$t_r(W) = \sum_{m=1}^M (\phi_m, \phi_m^*) = N \quad (63)$$

が成立する。

式(63)の右辺の値 N は H_N の次元 N と同じ値であり, M 及び PBOB $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ の選び方によらない定数である。すなわち, 式(63)は PBOB に対する一つの不変量を与えている。特に PBOB が POB になるとき, $\phi_m^* = \phi_m^*$ となり, 式(63)は式(25)と一致する。

PBOB に関する種々の性質及び各種構成法が文献5)にある。この構成法によれば, 全空間を張るような任意に与えられた元の組 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ に対して, $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ が PBOB になるように $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ を構成することが常に可能であることが分かる。しかもそのような $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が無限に存在し, その多様性は式(53)で定義した射影作用素 W の射影する方向の任意性に対応することが知られている。

特に W が, $R(U)$ の直交補空間 $R(U)^\perp$ に沿った射影作用素, すなわち, 正射影作用素 (orthogonal projector) になる場合, $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ は $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ から一意に定まり,

$$\phi_m^* = (U^*U)^{-1}\phi_m \quad (64)$$

と表される。このような $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を O 形 PBOB という。O 形 PBOB は数多くの興味深い性質をもっているが, パターンの複雑さ²⁶⁾への応用も含めて, 全て文献6)へ譲ることにする。

5. 電子計算機による画像復元問題への応用²⁷⁾

PBOB の画像復元問題への応用を示す。顕微鏡画像, 医用 X 線画像, リモートセンシング画像など, 我々の手にする多くの画像は, その観測過程を通じてある種の劣化を受けている。理想画像を $f(x, y)$, 劣化した画像を $q(x, y)$, 劣化を伴う観測過程の特性を表

す作用素を A とすれば,

$$q = Af \quad (65)$$

となる。 A が線形変換で, しかも積分表現できる場合式(65)は,

$$q(x, y) = \iint h(x, y; x', y') f(x', y') dx' dy' \quad (66)$$

と表すことができる。 $h(x, y; x', y')$ は劣化関数と呼ばれている。

画像の復元問題とは, q から f を推定する問題である。もし A の逆変換 A^{-1} が存在し, 全ての点 x, y における $q(x, y)$ の値が分かれば, q から f を求めることができる。

しかし一般には, A^{-1} は存在しない。しかも電子計算機を使って画像の復元を行おうとすれば, 全ての点 x, y における $q(x, y)$ の値を使用することはできない。我々が使用できるのは, 有限個の標本点における $q(x, y)$ の値だけである。

この有限個の標本値からなるベクトルを q とすれば電子計算機による画像の復元問題は, q から f を推定する問題になる。推定方法を線形変換に限れば, 種々の q から得られる推定画像の全体は, 一つの線形部分空間 X を構成する。したがって, 電子計算機による画像の最適復元問題は, 次のように定式化することができる。

「部分空間 X における f の最良近似を, q から構成せよ。」

X における f の最良近似は, f の X への正射影 f_X で与えられる。しかし, 任意の部分空間 X に対して, X への正射影 f_X を q から求めることができるわけではない。本章では, それが可能な部分空間 X の特徴付けを行い, そのような部分空間の中で最も大きなものを決定する。また, そのような部分空間 X に対して, f の最良近似を q から構成する具体的な復元式を与える。

信号空間 H を, ある領域 S の上で定義された複素数値 (または実数値) 関数 $f(x)$ からなる Hilbert 空間であり, かつ, 再生核 $K(x, y)$ をもつ空間とする。 S が 2 次元平面のとき, x, y は 2 次元ベクトルになり, $f(x)$ は通常の図形を表す。 S が 3 次元空間のとき, x, y は 3 次元ベクトルになり, $f(x)$ は物体を表す。また, Hilbert 空間 H の再生核とは, 次の 2 条件を満足する $S \times S$ 上の関数 $K(x, y)$ のことである。

(i) 任意に固定した $y \in S$ に対して, x の関数として $K(x, y)$ は H に属する。

(ii) 任意の $f \in H$ と $a \in S$ に対して

$$f(a) = (f(x), K(x, a)) \quad (67)$$

が成立する。

式(67)は、 H に属する任意の関数 f の点 a における値 $f(a)$ が、 $f(x)$ 自身と $K(x, a)$ の内積によって表現されることを表している。これが“再生核”と呼ばれる所以である。換言すれば、再生核は空間 H の中でデルタ関数の働きをしているのである。

H が無限次元空間の場合、再生核は必ずしも存在しない。しかし、有限次元の場合は常に存在し、しかも一意に定まる。具体的には、 H の任意の PBOB $\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を使って、次式により求めることができる⁵⁾。

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^M \phi_m(x) \overline{\phi_m^*(y)}. \quad (68)$$

本章では、観測システムの入出力関係を表す作用素 A が H 上の有界線形作用素である場合について論じる。したがって、 A は必ずしも正則であるとは限らないし、位置移動に対して不変な変換であるとも限らない。 M 個の標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M (\subset S)$ が与えられているとする。ここで標本点は、等間隔であっても不等間隔であってもかまわない。この標本点と H の再生核 K を使って、次の関数を定義する(図-6)：

$$\phi_m(x) \equiv K(x, x_m), \quad (69)$$

$$u_m(x) \equiv (A^* \phi_m)(x). \quad (70)$$

$\{u_m\}_{m=1}^M$ によって張られる H の部分空間を X_1 とし、 X_1 の次元を N_1 とする。一般に、 $N_1 \leq M$ なる関係が成立している。すなわち、標本点を M 個用意しても、必ずしも X_1 は M 次元空間にならない。そして $N_1 < M$ のとき $\{u_m\}_{m=1}^M$ が一次従属になり、擬似双直交性理論が必要になってくるのである。

$\{u_m\}_{m=1}^M$ から構成される X_1 の PBOB を $\{u_m, u_m^*\}_{m=1}^M$ とし、 $f \in H$ の X_1 への正射影を f_1 とすれば、次の定理が成立する。

【定理 7】 任意の $f \in H$ に対して、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{m=1}^M g(x_m) u_m^*(x), \\ (f_1, u_m) = g(x_m). \end{cases} \quad (71)$$

定理 7 より次のことが分かる。まず復元公式(71)は $f_1 \in X_1$ の $\{u_m, u_m^*\}_{m=1}^M$ に関する擬似双直交展開に

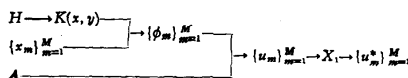


図-6 画像復元公式の構成手順

っている。 $f \in X_1$ のとき、復元公式(71)によって、 $\emptyset$ から f を完全に復元することができる。 $f \notin X_1$ のとき、 $\emptyset$ から f を復元することはできない。しかし、 f の X_1 への正射影 f_1 は求めることができる。これは、 X_1 で見ている限り、 f の最良近似になっている。

$\{u_m\}_{m=1}^M$ に対して PBOB となるような $\{u_m^*\}_{m=1}^M$ は無限に多く存在する。したがって、復元公式(71)も $\{u_m^*\}_{m=1}^M$ に応じて無限に多く存在し、それらが同じ f_1 を復元することになる。これは、 $\{u_m\}_{m=1}^M$ の一次従属性による事柄である。もし、 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が一次独立になるように標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M$ を選び、しかも観測装置の特性 A が良い性質(たとえば正則性)をもてば、 $\{u_m\}_{m=1}^M$ は一次独立になり、 $\{u_m^*\}_{m=1}^M$ は一意に定まり、PBOB $\{u_m, u_m^*\}_{m=1}^M$ は B O B になる。さらに、 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が正規直交系になるように標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M$ を選ぶことができ、しかも A がさらに良い性質(たとえばユニタリ性)をもてば、 $\{u_m\}_{m=1}^M$ 自身が X_1 の O B になり、 $u_m^* = u_m$ となるのである。

これまでは、 $X = X_1$ という一見特殊な部分空間について議論をしてきた。しかし、次の定理に示すように、部分空間 X への正射影 f_x を $\emptyset$ から求めることができる最も大きな部分空間が X_1 になるのである。この意味で、式(71)を最適復元公式と呼ぶことができる。

【定理 8】 $\emptyset$ から f_x を求めることができるための必要十分条件は、 $X \subset X_1$ となることである。

6. 標本化定理への応用^{20), 7)}

前章で論じた画像復元問題は、数学的には、標本化定理の問題と全く同じである。Whittaker に源を発し、染谷、Shannon によって通信へ応用された標本化定理も、その後の流れを大別すれば、“理想的パルスによる標本化定理”と“現実的パルスによる標本化定理”の2つに分類できる。前者は、信号 $f(x)$ の唯一点 x_n における値 $f(x_n)$ の組を使って $f(x)$ を再構成しようとするものであり、これまでの研究のほとんどのもものが、これに属している。一方、実際の装置を使って信号を観測する場合、ただ一点の値を知ることには物理的に不可能である。観測のためには、必ず時間的あるいは空間的な広がりが必要である。このように、時間的あるいは空間的にある意味で平均化された値から原信号を再構成するものが、後者の標本化定理

である。

この両者に対してそれぞれ, band-pass 形帯域制限を受けた信号空間の標本化定理, 不等間隔標本点に対する標本化定理, 多変数関数に対する標本化定理, 周波数の概念を Fourier 変換から一般の積分変換に拡張した場合の標本化定理, 及び, 信号空間に対して標本点のとり方が少なすぎる場合, あるいは, 多すぎる場合に対する標本化定理を考えることができる。

これらの問題を数学的に定式化すれば, 前章の画像復元問題と全く同じ問題になる。したがって, その解である式(71)は, 上述のあらゆる形の標本化定理を含んだ一般標本化定理になっているのである。たとえば, 信号空間 H 上の恒等変換を I とするとき, $A=I$ の場合が理想的パルスによる標本化定理であり, $A \neq I$ の場合が現実的パルスによる標本化定理である。 $H=X_1$ かつ $M=N_1$ の場合が通常の標本化定理であり, $H=X_1$ かつ $M>N_1$ が標本点数が多すぎる場合, $H \supset X_1$ かつ $M=N_1$ が標本点数が少なすぎる場合, $H \supset X_1$ かつ $M>N_1$ が, 両者が混在している場合である。

7. 計算機トモグラフィへの応用²⁴⁾

投影像からの断層像再構成技術 (CT: computerized tomography) は, [1971 年英国の EMI 社が頭部診断用 CT スキャナの開発に成功して以来, 俄に脚光を浴びるようになった。この CT 画像再構成法の中に, 級数展開法と呼ばれるものがある。その一つを次に示す。

再構成すべき 2 次元断層像を $f(x, y)$ で表す。直角座標 (x, y) を角度 α だけ回転してできる新しい直角座標を (X, Y) で表す。 $f(x, y)$ の投影像 $g(X, \alpha)$ は,

$$g(X, \alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY \quad (73)$$

で定義される。投影像 g の属する空間 H_2 を, 内積

$$(g_1, g_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(X, \alpha) \overline{g_2(X, \alpha)} dX d\alpha \quad (74)$$

から導かれるノルムが有限な関数の全体とする。実際の投影像 g の全体は,

$$g(-X, \alpha - \pi) = \overline{g(X, \alpha)} \quad (75)$$

を満足する関数でできている H_2 の部分空間と一致している。断層像 f の属する空間 H_1 を, 内積

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) \overline{f_2(x, y)} dx dy \quad (76)$$

から導かれるノルムが有限であり, しかも, その投影像が H_2 に属するような関数の全体とする。

Hermite 多項式 $H_m^*(X)$ を使って, Hermite 関数 $\phi_m(X)$ を,

$$\phi_m(X) \equiv \frac{1}{\sqrt{2^m m! \sqrt{m}}} e^{-\frac{X^2}{2}} H_m^*(X) \quad (77)$$

で定義し, n 次 Bessel 関数を $J_n(z)$ とする。そして

$$\begin{cases} \varphi_n(\theta) \equiv e^{in\theta} \\ b_{m,n}(r) \equiv \frac{(-i)^{m-n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \phi_m(\rho) J_n(\rho r) \rho d\rho \\ b_{m,n}^*(r) \equiv (1+(-1)^{m-n}) \frac{\sqrt{2\pi}}{(-i)^{m-n}} \int_0^\infty \phi_m(\rho) J_n(\rho r) d\rho \end{cases} \quad (78)$$

とおき, $m=0, 1, 2, \dots, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対して

$$\begin{cases} \Phi_{m,n}(X, \alpha) \equiv \phi_m(X) \varphi_n(\alpha) \\ \hat{B}_{m,n}(r, \theta) \equiv b_{m,n}(r) \varphi_n(\theta) \\ \hat{B}_{m,n}^*(r, \theta) \equiv b_{m,n}^*(r) \varphi_n(\theta) \end{cases} \quad (79)$$

なる関数を導入する。 $\hat{B}_{m,n}(r, \theta)$, $\hat{B}_{m,n}^*(r, \theta)$ の直角座標表示を $B_{m,n}(x, y)$, $B_{m,n}^*(x, y)$ とする。 $\{\Phi_{m,n}\}$ は H_2 の OB となり, $\{B_{m,n}, B_{m,n}^*; m-n=\text{偶数}\}$ は H_1 の BOB になっている。このとき, 次の復元公式が成立する。

[定理 9]

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \langle g, \Phi_{m,n} \rangle B_{m,n}(x, y). \quad (80)$$

ここで $\sum' \sum'$ は, $m-n$ が偶数になるものだけについての和を表す。

式(80)の復元公式は, 式(74)で定義される積分形の内積 $(g, \Phi_{m,n})$ を含んでいる。もしこの内積が有限個の標本点における値だけで表現できれば (内積の選点表現), 式(80)がそのまま実際の画像再構成に使用できる。しかし, H_2 の全ての元に対して式(74)の内積を選点表現することはできない。有限個の標本点を使っている限り, g の範囲を H_2 の有限次元部分空間に制限しなければいけないのである。それはまた, f の範囲を H_1 の有限次元部分空間に制限することに相当している。そのような部分空間の一例として, $\{B_{m,n}; 0 \leq m \leq M, |n| \leq N, m-n=\text{偶数}\}$ で張られる H_1 の部分空間 $H_1(M, N)$ と, $\{\Phi_{m,n}; 0 \leq m \leq M, |n| \leq N\}$ で張られる H_2 の部分空間 $H_2(M, N)$ を採用してみる。極座標表示された関数系 $\hat{B}_{m,n}(r, \theta)$ は, 番号 n が大きくなるほど, 円周方向 θ に対して激しく振動し, 番号 m , n がともに大きくなるほど, 動径方向 r に対して激しく振動する関数である²⁴⁾。したがって, f の範囲を $H_1(M, N)$ に制限するということは, f を, あまり急激に変化しない画像に限ることを意味してい

る。さらに標本点として、

$$\alpha_n \equiv \frac{2\pi n}{2N+1} \quad (n=0, \pm 1, \dots, \pm N) \quad (81)$$

及び $H_{M+1}^*(X)$ の零点 $\{X_m\}_{m=0}^M$ を採用してみる。このとき、次の復元公式が成立する。

[定理 10] $H_1(M, N)$ の任意の元 f に対して

$$f(x, y) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M g(X_m, \alpha_n) u_{m,n}(x, y) \quad (82)$$

が成立する。ここで

$$u_{m,n}(x, y) \equiv \frac{\sum_{p=0}^M \sum_{q=-N}^N \overline{\phi_{p,q}(X_m, \alpha_n)} B_{p,q}(x, y)}{(2N+1)(M+1)\{\phi_M(X_m)\}^2} \quad (83)$$

である。

式(82)で使用する関数 $u_{m,n}$ の数は、空間 $H_2(M, N)$ の次元数 $(M+1) \cdot (2N+1)$ と同じであり、空間 $H_1(M, N)$ の次元数の約倍である。つまり、式(82)は一次従属関数系による展開になっている。よりくわしくいえば、次のようになる。部分空間 $H_1(M, N)$ への正射影作用素を P_1 とする。式(83)に対応して

$$u_{m,n}^*(x, y) \equiv \sum_{p=0}^M \sum_{q=-N}^N \overline{\phi_{p,q}(X_m, \alpha_n)} P_1 B_{p,q}^*(x, y) \quad (84)$$

とおけば、 $\{u_{m,n}, u_{m,n}^*\}$ は $H_1(M, N)$ の PBOB になる。そして式(82)は、この PBOB による擬似双直交展開になっているのである。すなわち、 $f \in H_1(M, N)$ に対して、

$$(f, u_{m,n}^*) = g(X_m, \alpha_n) \quad (85)$$

が成立する。

8. あとがき

擬似双直交性理論は、本稿で紹介したもの以外にも、擬似直交標本化基底による離散 Fourier 変換の意味付け³⁾、加法演算、内積演算、線形演算における比例性ノイズの抑制^{4), 14)~17)}など、多方面にわたって応用されている。また、計算の手段として役立つこともある。たとえば、

$$\sum_{m=-M}^M \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \left(x - \frac{2\pi m}{2M+1} \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(x - \frac{2\pi m}{2M+1} \right)} = 2M+1 \quad (86)$$

$$(0 \leq N \leq M)$$

のような有限関数項級数の求和も、容易に行える。

Winograd の高速 Fourier 変換アルゴリズム²⁷⁾、しきい値関数の機能評価のための空間分割問題²⁸⁾、

ノルム空間における近似理論で現われる non-Čebyšev 部分空間 (最良近似が一意に定まらない部分空間)²⁹⁾ なども、そこで得られている結果を、擬似直交基底を使って表現できる。しかし、これらの問題と擬似双直交性理論の関係は、まだ現象論的なものであって、その本質を解明することは今後の課題である。

擬似直交基底の概念が提案されて9年目¹⁰⁾、そして擬似双直交性理論ができて4年目¹⁸⁾を迎えているが、その間に発表された文献は巻末に掲げる25件にすぎない。これを機会に、多くの読者に関心をもっていただければ幸いである。

最後に、本稿を著すにあたり有益なご意見をいただいた電子技術総合研究所井良明博士に感謝する。

参 考 文 献

[擬似双直交基底に関する論文]

- 1) 小川英光, 飯島泰蔵: 擬似直交性理論, 電子通信学会論文誌(D), Vol. 58-D, No. 5, pp. 271-278 (1975).
 - 2) 佐藤 誠, 飯島泰蔵: 空間情報伝送系における比例性ノイズ抑制法, 同上, Vol. 58-D, No. 5, pp. 279-286 (1975).
 - 3) 小川英光: 擬似直交性理論からみた標本点数の偶奇性に関する一考察, 同上, Vol. J 60-D, No. 10, pp. 854-860 (1977).
 - 4) 佐藤 誠, 飯島泰蔵: 最適分散性特徴パラメータ, 同上, Vol. J 61-D, No. 1, pp. 49-55 (1978).
 - 5) 小川英光: 擬似双直交性理論, 同上, Vol. J 64-D, No. 7, pp. 555-562 (1981).
 - 6) 小川英光: O形擬似双直交基底, 同上, Vol. J 64-D, No. 7, pp. 563-569 (1981).
 - 7) 小川英光: 電子計算機による画像復元問題の原理的考察, 同上, Vol. J 64-D, No. 7, pp. 570-576 (1981).
 - 8) 井宮 淳, 小川英光: 与えられた元の組を含む擬似直交基底の構成法とその標本化問題への応用, 同上, Vol. J 64-D, No. 8, pp. 669-675 (1981).
 - 9) 趙 南元, 小川英光: 正規双直交基底の正射影による擬似双直交基底の表現, 同上, Vol. J 64-D, No. 11, pp. 1059-1060 (1981).
- [擬似双直交基底に関する口頭発表]
- 10) 飯島泰蔵: 擬似直交性理論とその空間回路網への応用, 昭和48年度電子通信学会全国大会, S8-1 (1973).
 - 11) 小川英光, 飯島泰蔵: 擬似直交性理論, 電子通信学会パターン認識と学習研究会, PRL 73-44 (1973).
 - 12) 佐藤 誠, 飯島泰蔵: 空間情報伝送系におけるノイズ抑制法, 同上, PRL 73-45 (1973).
 - 13) 小川英光: 擬似直交性理論からみた標本点数の偶奇性に関する一考察, 同上, PRL 76-20 (1976).

- 14) 飯島泰蔵, 上田裕巳: 等分散性特徴パラメータの最適抽出法, 同上, PRL 76-49 (1976).
 - 15) 上田裕巳, 飯島泰蔵: 空間情報処理系における比例性ノイズ抑制法, 同上, PRL 76-66 (1977).
 - 16) 上田裕巳, 飯島泰蔵: 空間情報処理系における比例性ノイズの最適抑制法, 昭和52年度電子通信学会総合全国大会, 1166 (1977).
 - 17) 佐藤 誠, 飯島泰蔵: 最適分散性特徴パラメータ, 電子通信学会パターン認識と学習研究, PRL 77-11 (1977).
 - 18) 小川英光: 擬似双直交性理論, 同上, PRL 77-60 (1978).
 - 19) 小川英光: 擬似双直交系とその応用, 昭和53年度電子通信学会総合全国大会, 1274 (1978).
 - 20) 小川英光: 擬似双直交性理論による標本化定理の統一的取扱い, 電子通信学会パターン認識と学習研究会, PRL 80-4 (1980).
 - 21) 小川英光: 擬似双直交性理論とその応用, 電気学会情報処理研究会, IP-80-61 (1980).
 - 22) 井宮 淳, 小川英光: 与えられた元の組を含む擬似直交系の構成法とその応用, 電子通信学会パターン認識と学習研究会, PRL 80-29 (1980); 昭和56年度電子通信学会総合全国大会, 1311 (1981).
 - 23) 小川英光: 電子計算機による画像の復元, 電子通信学会パターン認識と学習研究会, PRL 80-36 (1980).
 - 24) 小川英光: 計算機トモグラフィのための新しい再構成理論, 同上, PRL 81-4 (1981); テレビジョン学会画像技術応用研究会 (日本ME学会医用画像のデジタル処理研究会共催), ITA 48-3 (1981).
 - 25) 小川英光: 制御角投影像からの断層像再構成理論, 昭和56年度電子通信学会情報・システム部門全国大会, S6-5 (1981).
- [その他の参考文献]
- 26) 上坂吉則: 乱数の定義とパターンの複雑さ, AVIRG 研究会 (1980).
 - 27) Winograd, S.: On computing the discrete Fourier transform, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., Vol. 73, No. 4, pp. 1005-1006 (1976).
 - 28) 斉藤静昭, 黒子猛夫, 奥野治雄: しきい関数による2分法の数と空間分割公式, 電子通信学会論文誌(D), Vol. 60-D, No. 11, pp. 952-958 (1977).
 - 29) 小川英光: ノルム空間における近似理論からみた主成分分析, 数理科学, 1973年12月号, pp. 63-67 (1973).

(昭和56年10月7日受付)