

多倍長環境における直交多項式理論に基づく 最適な PWM 波形の数値計算アルゴリズム

矢谷 健一^{†1} 木村 欣司^{†1} 中村 佳正^{†1}

最適 PWM 問題とは、与えられたアナログ波形に対して、対応する PWM(Pulse Width Modulation) 波形を求める問題である。この問題は、ある直交多項式の全ての零点を求める問題として再定式化される。本報告では、直交多項式の理論に基づき、零点を求める問題を行列固有値問題に変換し、多倍長計算により固有値問題の数値計算を行う。数値実験の結果、多倍長環境では、直交多項式の次数が大きい場合、対称 3 重対角行列の固有値問題として問題を解くアルゴリズムが、計算時間と誤差の両方において優れている結果となった。

Numerical Algorithms for Solving the Optimal PWM Problem on Multiple-Precision Arithmetic with Theory of Orthogonal Polynomials

KENICHI YADANI,^{†1} KINJI KIMURA^{†1}
and YOSHIMASA NAKAMURA^{†1}

The optimal PWM problem is the problem to find suitable PWM (Pulse Width Modulation) waveform for arbitrary given waveform. The problem can be reformulated as a problem to find all the zeros of an orthogonal polynomial. In this report, we transform the problem of zeros to certain matrix eigenvalue problems based on the theory of orthogonal polynomials and solve them with multiple-precision computation. It is shown by numerical experiments that an algorithm for solving a symmetric tridiagonal eigenvalue problem is better than others with respect to both computation time and accuracy if the degree of orthogonal polynomial is large under the multiple-precision arithmetic environment.

1. はじめに

PWM(Pulse Width Modulation) とは、パルス変調方式のひとつであり、パルス波のオンの状態とオフの状態の時間の比 (デューティ比) を調整することにより変調する方式である。与えられた波形に対して、そのフーリエ展開係数の最初の n 個が一致した、振幅一定のパルス波を求める問題を、最適 PWM 問題 (optimal PWM problem) と呼ぶことにする。PWM は電源の制御、DC/AC インバータ等に応用されている。近年では、スイッチングトランジスタの性能の向上により、入力波形を波形を電子回路で精密に制御することが可能となった。そこで、最適な PWM 波形を高速・高精度に求める方法が求められている。

最適な PWM 波形を数値計算する方法として、いくつかの方法が提案されている。Patel 等は、問題を 3 角関数を含む非線形な連立方程式の解を求める問題を解く方法を提案した⁷⁾。Sun 等は、多項式の連立方程式の解を求めることにより問題を解くアルゴリズムを提案した⁸⁾。そして Czarkowski 等は、最適な PWM 波形を求める問題が、ある 1 変数 n 次直交多項式の零点を求める問題に帰着されることを示し、直交多項式の零点を求めることにより最適 PWM 問題を解く方法を提案した³⁾。しかし、これらのアルゴリズムには、波形によっては計算が停止する、あるいは正確な解が得られないという問題点があった。本報告では、直交多項式の理論と多倍長計算によりこれらの問題点を解決するアルゴリズムを提案する。

直交多項式の理論によれば、直交多項式の零点を求める問題は、Hankel 行列束の一般化固有値問題や、3 重対角行列の固有値問題と等価である^{2),5)}。すなわち、最適 PWM 問題に対応した固有値問題が存在し、その固有値問題の数値計算を行うことにより、高速化・精度向上が期待される。

更に、最適 PWM 問題の数値計算には、数値的に不安定であるという、根本的な問題点がある。実際、5 章の数値実験から分かるように、倍精度計算では、問題によっては、情報落ちが原因となって最適 PWM 問題の数値計算が行うことが不可能である。そこで、情報落ちを防ぐために多倍長計算が必要となる。

本報告では、最適 PWM 問題を、直交多項式の零点を求める問題、一般化固有値問題、3 重対角行列の固有値問題の 3 つの問題に帰着し、多倍長環境において、5 種類の計算方法によって、最適 PWM 問題の数値計算を行い、計算時間と精度を比較する。数値実験の結果、

^{†1} 京都大学大学院情報学研究所
Graduate School of Informatics, Kyoto University

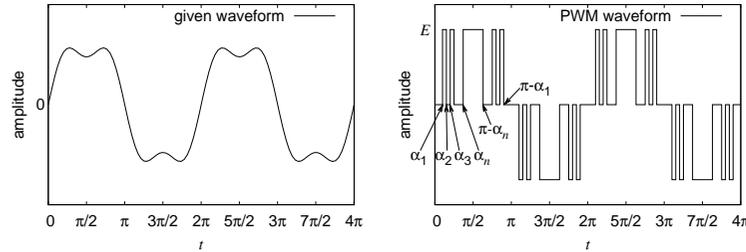


図 1 与えられたアナログ波形 f と対応する PWM 波形 \tilde{f} .
Fig. 1 A given waveform f and the corresponding PWM waveform \tilde{f} .

実対称 3 重対角行列の固有値問題として解くアルゴリズムが、計算時間・精度の意味で優れている結果となった。

2. 最適 PWM 問題の定式化

2.1 最適 PWM 問題

周期 2π の周期的なアナログ波形 $f(t)$ が与えられたとする。 $f(t)$ に対応する、振幅 E の最適な PWM 波形を $\tilde{f}(t)$ とし、 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \pi/2$ を PWM 波形 \tilde{f} のスイッチングのタイミングとする。すなわち、 $\tilde{f}(t)$ は $t = \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$ においてパルスがオンになり、 $t = \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$ においてパルスがオフになる (図 1)。本報告では、 f 及び \tilde{f} は周期 2π の周期関数であり、 $f(\pi - t) = f(t)$, $f(t) = -f(2\pi - t)$, $\tilde{f}(\pi - t) = \tilde{f}(t)$, $\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(2\pi - t)$ を満たすものとする。これらの条件より f 及び \tilde{f} は奇関数であるから、

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kt, \quad f_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin ktdt \quad (k:\text{奇数}), \quad f_k = 0 \quad (k:\text{偶数}) \quad (1)$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \sin kt, \quad \tilde{f}_k = \frac{4E}{\pi k} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cos k\alpha_i \quad (k:\text{奇数}), \quad \tilde{f}_k = 0 \quad (k:\text{偶数}) \quad (2)$$

と Fourier 級数展開される。ここに、 f_k, \tilde{f}_k はそれぞれ f, \tilde{f} の Fourier 係数である。ここで、 f_k と \tilde{f}_k ($k = 1, 3, \dots, 2n - 1$) が等しくなるように \tilde{f} を決めることにすると

$$f_k = \frac{4E}{\pi k} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \cos(k\alpha_i) \quad (k = 1, 3, \dots, 2n - 1) \quad (3)$$

が得られる。最適 PWM 問題は、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ についての方程式系 (3) を解く問題である。 Patel 等は、 (3) を多変数 Newton 法により解くことにより最適 PWM 問題を解く方法を提案した⁷⁾。

2.2 直交多項式の零点と求める問題への再定式化

変数変換 $x_k = (-1)^{k+1} \cos \alpha_k$ により、 (3) は

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = t_1, \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = t_3, \\ \vdots \\ x_1^{2n-1} + x_2^{2n-1} + \dots + x_n^{2n-1} = t_{2n-1} \end{cases} \quad (4)$$

となる。ここで、定数 t_k ($k = 1, 3, \dots, 2n - 1$) は、

$$c_{k,m} = (-1)^{k-m} \frac{2k-1}{2} \frac{(k+m-2)! 2^{2m-1}}{(k-m)! (2m-1)!}, \quad (5)$$

$$h_k = \frac{\pi k f_k}{4E} \quad (k = 1, 3, \dots, 2n - 1), \quad (6)$$

$$t_1 = \frac{h_1}{c_{1,1}}, \quad t_{2k-1} = -\frac{1}{c_{k,k}} \left(\sum_{m=1}^{k-1} c_{k,m} t_{2m-1} - h_{2k-1} \right) \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

により与えられる。 $c_{k,m}$ は Chebyshev 多項式の係数である。連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n p_{n,n} \\ (-1)^{n-1} p_{n,n-1} \\ \vdots \\ (-1)^1 p_{n,1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_n \\ s_{n+1} \\ \vdots \\ s_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

により定まる $p_{n,k}$ ($k = 1, \dots, n$) を係数とする多項式

$$P_n(x) = x^n + p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} + \dots + p_{n,n} \quad (9)$$

を考える。ここで、 s_k ($k = 1, \dots, 2n - 1$) は

$$v_{2k-1} = -\frac{2t_{2k-1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

$$s_{-1} = -1, \quad s_i = \frac{1}{i+1} \sum_{k=1, \text{odd}}^{i+1} kv_k s_{i-k} \quad (i = 0, \dots, 2n-1) \quad (11)$$

により与えられる．このとき， $P_n(x) = 0$ の解は，(4)の解 x_1, x_2, \dots, x_n に等しいことが示されている³⁾．すなわち，1変数 n 次代数方程式 $P_n(x) = 0$ の全根を求めることにより，最適 PWM 問題を解くことができる．

そして， $P_n(x)$ は直交多項式であり，3項間漸化式

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x + \frac{s_1}{s_0}, \quad P_k(x) = xP_{k-1}(x) - r_{k-1}P_{k-2}(x) \quad (k = 2, \dots, n), \quad (12)$$

$$r_k = \frac{\sum_{l=0}^k (-1)^l p_{k,l} s_{2k-l}}{\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l p_{k-1,l} s_{2k-2-l}} \quad (13)$$

を満たすことが示される．ここで， s_k ($k = 0, \dots, 2n-1$) は $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ のモーメント列の最初の $2n$ 項である．

Czarkowski 等は， $P_n(x)$ の全ての零点を Newton 法により求めることにより，最適 PWM 問題を解くアルゴリズムを提案した³⁾．

3. 直交多項式の理論と行列固有値問題

直交多項式の理論により，直交多項式の全ての零点を求める問題，Hankel 行列対の一般化固有値問題，3重対角行列の固有値問題は等価であり， $O(n^2)$ で互いに移り変わることができることが示される(図2)．

$P_n(x)$ のコンパニオン行列 F を

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & (-1)^n p_{n,n} \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & (-1)^1 p_{n,1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

で定義すると， F の n 個の固有値は $P_n(x)$ の n 個の零点と一致する．Hankel 行列 A, B を

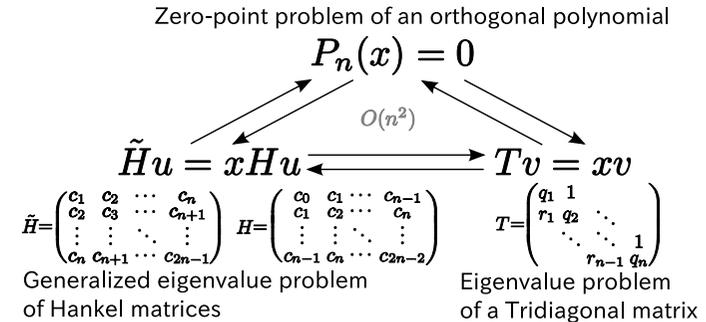


図2 直交多項式の零点問題に付随した行列固有値問題
Fig.2 Relationship of some matrix eigenvalue problems associated with zero-point problem of orthogonal polynomials.

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

により定義すると，(8)から $BF = -A$ が成り立つことが分かる． B が正則であると仮定すると，固有値問題 $Fu = xu$ は，一般化固有値問題

$$Au = -xBu \quad (16)$$

と等価である．すなわち，一般化固有値問題(16)を解けば，得られた一般化固有値の符号を付け替えることにより， $P_n(x)$ の全ての零点を求めることができる．

Golub と Welsch は，直交多項式の零点を求める問題は3重対角行列の固有値問題に変換することができ，直交多項式の零点を数値計算する代わりに，対応する3重対角行列の固有値を数値計算することで，精度が向上するという数値実験の結果を報告した⁵⁾．この方法は最適 PWM 問題にも適用することが可能である．すなわち，3項間漸化式(12)が成り立つことから，3重対角行列の固有値問題

より、情報落ちが数値計算に悪影響を及ぼさないようにする。

5. 数値実験

この章では、以下の5種類の最適PWM問題を解くためのアルゴリズムで数値実験を行い、計算時間と計算誤差の比較を行う。

OP-DKA

$P_n(x)$ の零点をDurand-Kerner-Aberthの方法¹⁾により解く。Czarkowski等は、最適PWM問題を、 P_n の零点をNewton法により数値計算するアルゴリズムを提案したが³⁾、ここではNewton法の代わりにDurand-Kerner-Aberthの方法を利用する。

OP-companion

$P_n(x)$ の零点を、 $P_n(x)$ のコンパニオン行列 F の固有値を計算することにより最適PWM問題を解く。

GEP

行列束 (A, B) の一般化固有値を計算することにより最適PWM問題を解く。 B が正定値であると仮定すると、 $B = LL^T$ とCholesky分解可能である。ここに、 L は正則な下三角行列である。このとき、一般化固有値問題(16)は、固有値問題

$$L^{-1}A(L^T)^{-1}u' = -xu' \quad (20)$$

と等価である。そこで、(16)の代わりに、(20)の数値計算を行うものとする。

Tridiag- T

3重対角行列 T の全ての固有値を計算する。

Tridiag- T'

実対称3重対角行列 T' の全ての固有値を計算する。

以上の5種類のアルゴリズムを、以下の2種類の最適PWM問題の例題を用いて評価を行った。

例題1 (harmonic elimination problem)³⁾: Harmonic eliminationとは、低周波成分(最も低い周波数成分を除く)の無いパルス波を生成する問題である。Harmonic eliminationは最適PWM問題の特別な場合であり、 $f(t) = 4Ea/\pi \sin t$, $h_1 := a$ (const.), $h_k := 0$ ($k = 3, 5, \dots, 2n-1$)とした場合である。数値実験では、 $a = 0.6$, $E = 1$ とした。

例題2: 目的とするアナログ波形が $f(t) = 4/\pi \times 0.6 \sin t + 4/\pi \times 0.15 \sin 3t$ の場合、すなわち $h_1 := 0.6$, $h_3 := 0.15$, $h_k := 0$ ($k = 5, 7, \dots, 2n-1$)とする。パルスの振幅は $E := 1$ とする。

誤差評価の指標としては、(4)が成り立つことに注意して、

$$E_n := \frac{1}{n} \max_{k=1,3,\dots,2n-1} |x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k - t_k| \quad (21)$$

により定義する。 x_k ($k = 1, \dots, n$)が真の根の場合 $E_n = 0$ であり、 E_n が小さい程誤差が小さい。

数値実験では、多倍長計算ライブラリExflib⁴⁾を利用し、有効数字115桁の精度で数値計算を行った。LAPACK⁶⁾の非対称Hessenberg行列用固有値計算ルーチンDLAHQR、及び実対称3重対角行列用固有値計算ルーチンDSTERFをExflibに移植し、OP-companion, Tridiag- T でExflib版DLAHQR, GEP, Tridiag- T' でExflib版DSTERFを利用している。数値実験に用いた計算機環境は、CPU Intel Core 2 Extreme X9650 (3.00GHz), 8GB DRAM, Linux kernel 2.6.27, g95 0.91である。図4, 図5, 図6, 図7に数値実験の結果を示す。多倍長計算と倍精度計算の比較のため、例題1を倍精度で計算した場合の誤差評価の指標 E_n を図3に示した。図の横軸は問題の次数 n であり、縦軸に計算誤差、計算時間を対数軸で示している。

倍精度計算の場合では、GEPの場合は $n = 25$ で、Tridiag- T' の場合は $n = 27$ で計算が不能となった。他のアルゴリズムでは、計算誤差が $n = 31$ 及び $n \geq 45$ で大きくなった(図3)。すなわち、 $n \geq 45$ の場合、倍精度計算では情報落ちのため例題1を解くことができなくなる。従って、大きな n に対して最適PWM問題の数値計算を行う場合には、多倍長計算が必要となる。

図4, 図6に多倍長で計算した場合の計算誤差 E_n を示す。結果から、Tridiag- T 及びTridiag- T' 、すなわち問題を3重対角行列の固有値問題として扱う場合、 n が増大しても E_n が小さいことが分かる。それに対して、OP-DKA, OP-companion, GEPの場合は n が増大するにつれて E_n も急激に増大する。

図5, 図7には計算時間を示している。対称行列の固有値計算ルーチンを利用するGEP, Tridiag- T' は他のアルゴリズムと比較して高速である。GEPでは B のCholesky分解に $O(n^3)$ の計算量が必要であるのに対し、Tridiag- T' のアルゴリズムでは、 $P_n(x)$ から T' を計算するのに $O(n^2)$ しか計算量を必要としない。このことがGEPとTridiag- T' の計算時間の差になっていると考えられる。

結果として、先に示した5種類のアルゴリズムの中で、問題の次数が大きくなると、Tridiag- T' が最も高速であり、かつ誤差評価指標 E_n が最小となった。

6. 結 論

本報告ではまず、最適 PWM 問題をある直交多項式の零点を数値計算する問題として扱う 3) による定式化を示した。従来の最適な PWM 波形を計算するアルゴリズムには、情報落ちのため計算が途中で破綻したり、誤差が大きくなる場合があるという問題点があった。この問題を回避するため、直交多項式の理論と多倍長計算を利用したアルゴリズムを提案した。

倍精度の場合の議論 5) を参考にし、直交多項式の理論により最適 PWM 問題を一般化固有値問題及び 3 重対角行列の固有値問題に帰着した。また、最適 PWM 問題は、倍精度で計算すると数値不安定な問題であるため (図 3)、多倍長計算により数値計算を行った。

多倍長環境における数値実験の結果、実験を行った 5 種類のアルゴリズムのうち、実対称 3 重対角行列の固有値問題 (19) の数値計算により最適 PWM 問題を解く *Tridiag-T'* が、計算時間・計算誤差の両方において、他のアルゴリズムと比較して優れている結果となった。

参 考 文 献

- 1) O.Aberth: Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, *Math. of Comput.*, Vol. 27, no. 122. pp. 339-344 (1973).
- 2) T.S. Chihara: *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York (1978).
- 3) D.Czarkowski, D.Chudnovsky, G.Chudnovsky: I.Selesnick, Solving the optimal PWM problem for single-phase inverters, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 49, no. 4, pp.465-475 (2002).
- 4) Exflib: <http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/exflib/>
- 5) G. Golub, J. Welsch: Calculation of Gauss Quadrature Rules, *Math. Comput.*, Vol. 23, No. 106, pp. 221-230, s1-s10 (1969).
- 6) LAPACK: <http://www.netlib.org/lapack/>
- 7) H.S. Patel, R.G. Hoft: Generalized technique of harmonic elimination and voltage control in thyristor inverters: Part I - harmonic elimination, *IEEE Trans. Indust. Appl.*, Vol. IA-9, issue 3, pp. 310-317 (1973).
- 8) J. Sun, S. Beineke, H. Grotstollen: DSP-based real-time harmonic elimination of PWM inverters, *Rec. IEEE Power Electronics Specialists Conf. (PESC '94)*, Vol. 1, pp. 679-685 (1994).

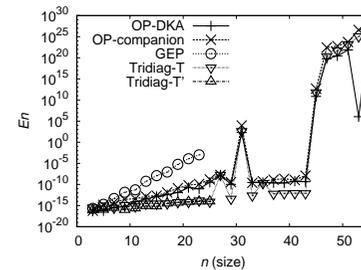


図 3 例題 1 を倍精度で計算した場合の誤差 E_n .
Fig. 3 Error E_n in Problem 1 with double-precision arithmetic.

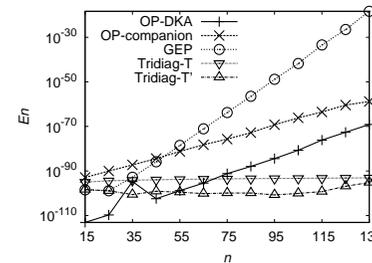


図 4 例題 1 の誤差 E_n
Fig. 4 Error E_n in Problem 1

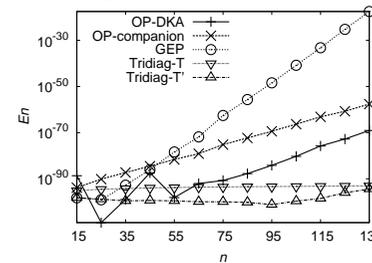


図 6 例題 2 の誤差 E_n
Fig. 6 Error E_n in Problem 2

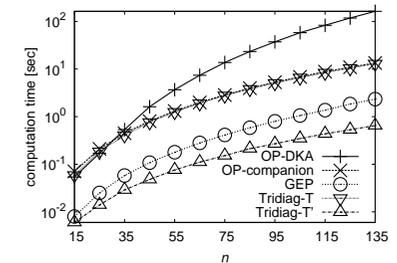


図 5 例題 1 の計算時間
Fig. 5 Computation time in Problem 1

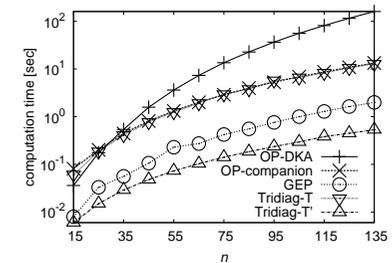


図 7 例題 2 の計算時間
Fig. 7 Computation time in Problem 2