2006－EC－5　(1)
2006／12／16

数独の推論規則と難易度に関する考察

松原康夫
文教大学情報学部情報システム学科

抄録：数独，あるいはナンバープレース，と呼ばれるパズルを多くの人が楽しんでいる。人間がこれを解くときは，コンピュータが探索するように，あらゆる可能性を試してみるようなことはしない。いくつかの推論規則を考えることができ，それによってあるマス目の数字を確定するのである。この問題には様々なレベルがある。問題の難易度は，数字を確定するために，どれだけ高度な推論規則が必要かによって決まるものと考えられる。本発表では，どのような推論規則が使えるのかを整理して，それによってヒントを与えることを試みる。また，各推論規則を適用することがどれくらい困難であるかによって，難易度を判定することを目指す。

Difficulty of Inference Rules on Suudoku

Yasuo MATSUBARA
Department of Information Systems,
Faculty of Information and Communication,
Bunkyo University

abstract: Many people are solving suudoku or number place puzzles. A man does not take a method of backtracking, which is taken by computers. Some inference rules can be considered to determine the number of a cell. There are a variety of problems from very easy one to hard one. A problem becomes hard when a high level rule is necessary to solve it.

In this presentation, we list up inference rules, and we apply these to give a hint. We intend to decide the hardness of a problem by the hardness of applying the rule.

１．はじめに

多くのパズルゲームの中でもナンバープレースは，最近になって日本においても多くのファンを集めつつあるものである。実際に多くの雑誌や単行本［１－５］が出ている。理由としては，多くの変種を考えることができること，様々な難易度の問題を作ることができること，試行錯誤によるのでなく，論理的な推論によって解くことができること，などによるものと考えられる。

マス目を９×９でなく，１２×１２あるいは，２５×２５などのように拡張することも良く行われているが，その場合はマス目に入れる数は２桁になる。少なくとも基本形の９×９程度の問

題では，コンピュータで組み合わせの探索を行えばすぐに解を得ることができる。このことから，この問題のコンピュータによる解法について研究する意味はほとんどない。人間が解く場合にはコンピュータが行うように，あらゆる可能性を試すことは困難であり，まったく別の解法を用いることになる。

本発表では，人間がナンバープレースを解く場合に用いる解法を，コンピュータで実現することを試みる。このことによって，問題の難易度をコンピュータで判別する可能性が出てくる。また，以前から問題をコンピュータで作成することが行われてきているが，このことによって，望むレベルの問題を作成することにつながるものと考えられる。あるいは，基本的には人間が問題を解くのであるが，なかなか問題が解けないときにヒントを与えるようなプログラムを書くことも可能となるのである。

２．ナンバープレースの基本形と解法

ナンバープレースの基本形は次のようなものである。図２．１に示すように，９×９のマス目があり，その中のいくつかのマス目に予め数が置かれている。　さらに，内部が３×３のブロックに分かれている。また，以下において，横につながった９つのマスの集まりを行と呼び，縦につながった９個のマスの集まりを列と呼ぶことにする。

3	5		8			6		
			2		3			
		4			6		2	3
5			4				6	
			7	6	1			
	2				9			1
2	1		9			8		
			6		8			
		9			7		5	2

図２．１ナンバープレースの問題例

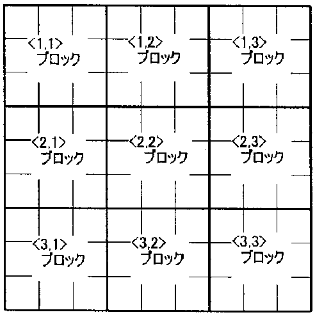

図２．２ブロックの呼び方

上から順に，最初の行を１番目の行，次の行を２番目の行などと呼ぶ。列は左端の列を１番目の列その右となりを２番目の列などと呼ぶ。

ブロックについては図２．２のように呼ぶこととする。また特定のマス目に言及するときは第ｉ行と第ｊ列の共通部分ということで<i, j>マスと呼ぶ。

以上のブロック，行，列のそれぞれを統合領域と呼ぶことにする。すると，この問題の完成形においては，それぞれの統合領域において，１から９の数が丁度一つずつ存在することが必要である。

従って，ナンバープレースの問題は，与えられた数を書き換えることなく，空欄を埋めて全体を完成形に持ってゆくことであると言える。

以上のようなナンバープレースの問題に対して，様々な解法が存在する。
最も基本的な解法は，特定の数に着目して，それが存在し得る場所を限定してゆくことである。そして一箇所にしか存在し得ないということを使って数を確定してゆくことができる。

次に容易な解法と思われるのが，あるマスに存在し得る数を限定してゆく方法である。

こうした方法とは異なり，何ステップもの推論の結果，特定のマスの数字が定まる場合がある。

このように，何ステップの推論を行ったか，とそれぞれの推論の困難さによって，あるステップから次のステップにいたる困難さが決まると考えてよいであろう。

３．ナンバープレースにおける推論規則

前節で示したように，ある状況から新たに数が確定されるには様々な推論が行われる。こうした推論を精確に記述するためには，確定した数のみを表現していたのでは不十分である。ここでは，まだ数が確定していないマス目においてどのような数がそこに存在し得るかを表すために，**候補**という概念を導入する。これは，少なくとも現段階ではどのような数が存在し得るかを表すものである。そして、これが推論を進めてゆくにつれて，次第に確定してゆくのである。つまりこの方法は制約が伝播してゆくのを追ってゆくことで，パズルを解くものである。

これをプログラミングするならば，各々の数が可能であるかどうかを表すのは論理型変数によることになる。

最初に，与えられた問題においてすでに確定している数から，各マス目において存在し得ない数を消しておくのである。そして，新たに数が確定するごとに，それによって各マス目において存在し得ない数を消す，という作業を常に行うものとする。

こうしたことを前提として，いくつかの推論規則を考えることができる。

[推論規則１]（単一候補）候補となる数が一つしかないマス目はその候補の数で確定する。

これは自明な規則である。しかしながら，人間がこれを適用する場合は，この条件が成り立つことを見出すことは必ずしも容易ではない。

[推論規則２]（単一マス目）いずれかの統合領域の中で，ある数が一つのマスにしか候補として存在しないならば，そのマス目にその候補の数を確定する。

これは，統合領域のなかでどこかにその数が存在するはずなのであるから，妥当な規則である。ただ，実際に適用するに当たっては，統合領域がブロックであるときのほうが，行や列であるときに比べて，人間には容易に適用できるように思われる。

[推論規則３]（偏り）これについては，いくつかの場合に分けて述べる。

[推論規則３－１]（ブロック中の行の偏り）ブロックの中で，ある数が特定の行の中にのみ存在するときは，その行の中でこのブロック外のこの数の候補を消去する。

[推論規則３－２]（ブロックの中の列の偏り）ブロックの中で，ある数が特定の列の中にのみ存在するときは，その列の中でこのブロック外のこの数の候補を消去する。

[推論規則３－３]（行の中のブロックの偏り）行の中で，ある数が特定のブロックの中にのみ存在するときは，そのブロック内の，この行外にあるその数の候補を消去する。

[推論規則３－４]（列の中のブロックの偏り）列の中で，ある数が特定のブロックの中にのみ存在するときは，そのブロック内の，この列外にあるその数の候補を消去する。

これは，二つの統合領域が重なるときの問題である。行と列は互いに一つのマスでのみ重なるので推論規則２で対処できる。問題はブロックが行または列と重なる場合である。

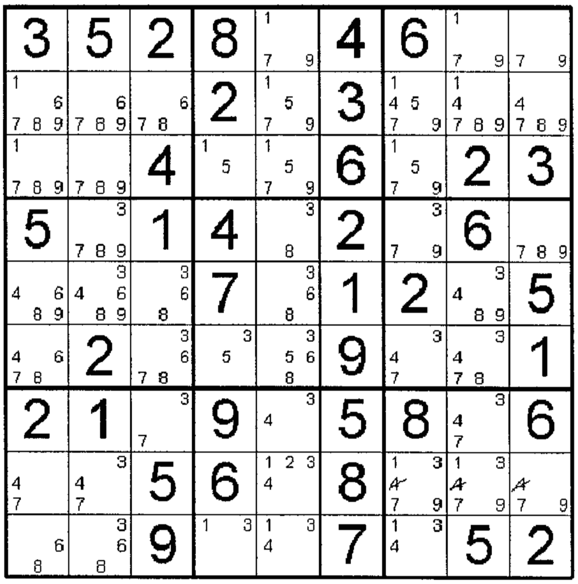

図３．１　行の中のブロック偏り

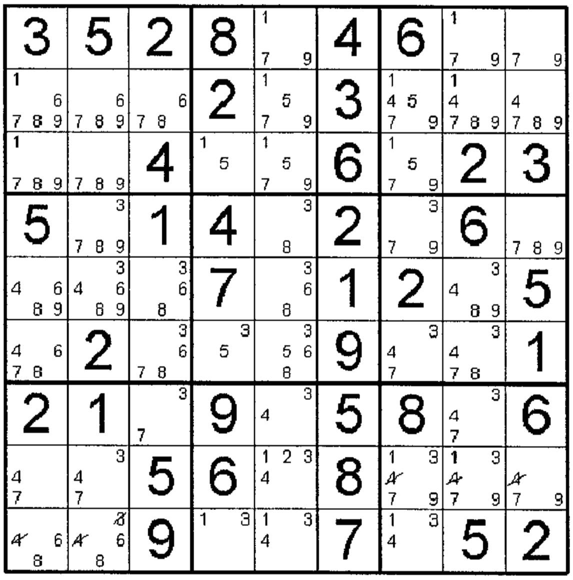

図３．２　マス目占有

二つの統合領域ＡとＢのあいだに三つのマス目が共有されるものとする。ある数ｎが，統合領域Ａの中で，Ｂとの共有マス目にのみ存在したとする。Ａの中に必ず一箇所ｎが存在するので，これらの共有されたマス目にいずれかにｎは存在することになる。従って，Ｂの中でｎはこれらの共有されたマス目にｎが存在するのであるから，それ以外の部分にｎが存在する可能性はなくなるのである。

例を持って説明する。図３．１は小さい数字で候補を表示している。そして第8行に着目すると，4の候補が〈3, 1〉ブロック内にのみ存在する。つまり4は〈8, 1〉か〈8, 2〉のいずれかのマスに必ず存在するのである。このことから，第8行の中の他の4の候補を消去するのである。

次の規則は少し高度である。

［推論規則４］(マス目占有)ｎ個の数からなる集合Ｓについて，統合領域の中のｎ個のマス目に，Ｓの要素だけで占有されている場合，その統合領域内の他のマス目からはＳの要素の候補を消去する。

ｎ個のマス目が，ｎ種類の数だけが可能であるということは，それらの数は，これらのマス目のいずれかに存在することになる。従って，同じ統合領域の中では他の場所にこれらの数が存在することはないのである。

これも例を示す。図３．２の第9行に着目する。

第9行には，〈9, 5〉, 〈9, 6〉, 〈9, 7〉のマス目が集合 S＝{1, 3, 4}の要素で占有されている。つまり，第9行の中で1, 3, 4が存在するのはこれらの3つのマス目だけである。従って，第9行の中のほかのマス目〈9, 1〉, 〈9, 2〉における3と4の候補を消去するのである。

最後に次の推論規則を示そう。

［推論規則５］(マス目集中)ｎ個の数からなる集合Ｓの要素が，統合領域内のｎ個のマス目の中だ

けに存在するとき，これらのマス目の中のＳの要素以外の候補を消去する。

これは，ｎ個のマス目の中に集合Ｓの要素が必ず存在するので，これらのマス目はＳの要素で占有されてしまうことになる。従って他の数が入る余地はなくなるのである。

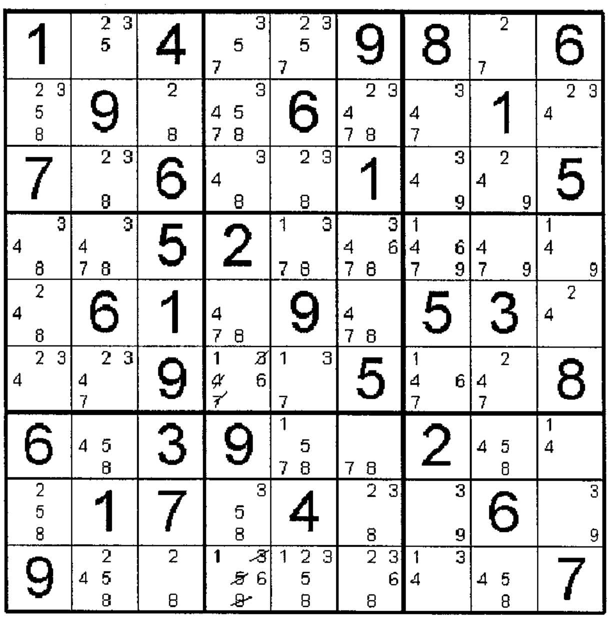

図３．３　マス目集中

図３．３に例を示す。第４列において Ｓ＝｛1,6｝の要素が，〈6, 4〉,〈9, 4〉のマスに集中している。つまり，これら二つのマス目は１または６が入り、他の数が入る余地はない。そこでこれら以外の数を消去するのである。

推論規則４と５は互いに裏腹な関係にある場合も多い。実際，図３．３においては，第４行において，集合｛3, 4, 5, 7, 8｝の要素で，５つのマス目〈1, 4〉，〈2, 4〉，〈3, 4〉，〈5, 4〉，〈8, 4〉を占有しているのである。これによって消去する候補はマス目集中によるものと同じである。しかし，これを人間が見出すには，この場合には要素の数が少ないマス目集中のほうが容易であろう。

４．確定性な推論規則の可能性

ここで述べたのは，試しにある数をおいてみて，うまくゆかないときには元に戻るというバックトラックを前提としたものではない。

ナンバープレースの問題として，どのような問題が相応しいのかに関しては特に決まりがあるわけではない。ある本では，一つの候補で試して駄目なら別の候補を選ぶ，という方法論を明確に述べていた。しかしながら，コンピュータならぬ人間が解く問題としては如何なものであろうか。筆者としては原則としてバックトラックなしで解ける問題が本来のナンバープレースの問題であるべきと考えたい。

本発表で述べた推論規則が，それぞれ妥当なものであることは示したが，もっと強力な規則が他にないということは言い切れない。別の推論規則を用いれば，これまでバックトラックによってはじめて解けた問題が，バックトラックなしで解けるようになるという可能性も残っている。実際，文献［１］では，「四角の対角線」および「浜田ロジック」と名づけた推論規則が紹介されている。これらの規則は，本文で述べた枠組みでは捉えることのできないパターンを前提としている。これらをさらに一般的な枠組みで捉えることは今後の課題とする。

５．ヒントプログラム

第３節においては，候補という概念を導入し，これを小さい数字で表示した例を示した。非常に長い推論ステップで，その途中を説明しようと思えば，こうした候補の数字を表示する必要がある。候補数字を表示した場合は，推論規則１（単一候補）を適用することはきわめて容易となるが，候補を表示しなければ，逆にかなり時間を要する作業となる。

またマス目占有やマス目集中などの規則については，候補数字を表示しない限り，かなり困難な作業といわざるを得ない。このことからすると，やさしい問題については候補を表示しないほうが楽しめるが，高度な問題については候補を表示したほうが良いように思われる。

ヒントプログラムは，少し改造すれば自動的に問題を解くプログラムとなる。それと同時に，そのとき適用した推論規則によって問題の難易度を評価することができるはずである。ある数が確定してから，次の数が確定するまでにかかったステップ数が長ければ長いほど，高度な推論と考えてよいであろう。

６．終わりに

本発表では，ナンバープレースを確定的に解くための方法について考察した。ここで示した，制約の伝播によって問題を解く方法は，人間が実行するのに適したアルゴリズムといえるであろう。そのために提案した推論規則については，容易なものから高度なものまでがある。これらを使って問題の難易度を自動的に評価すること，あるいは望むレベルの問題を自動的に作成することなどは今後の課題としたい。

また，与えられた問題を解く過程で，高度な推論を行ったときは高い得点をつけ，ヒントプログラムに頼ったときは低い得点をつける，などのゲーム性を持たせることでナンバープレースの楽しみ方を増加させることも考えられる。

引用文献：

［1］西尾徹也編著，「ナンプレ超上級編１２」，世界文化社（2006 年 8 月刊）
［2］海外脳トレパズル研究会編，「ポケット脳トレ」，ソフトバンククリエイティブ（2006 年 9 月刊）
［3］ニコリ編著，「ニコリ『数独』名品１００選」，文芸春秋２００６年５月刊）
［4］「数独通信　vol1」，ニコリ（２００６年７月刊）
［5］「数独通信　vol.2」，ニコリ（２００６年９月刊）