

Newton's Cradle を用いた同時多点衝突運動モデルの実験と評価

鈍渡 敬一郎, 登尾 啓史

大阪電気通信大学大学院 総合情報学研究科 コンピュータサイエンス専攻

我々はこれまで、剛体物体の衝突現象に着目し、Mirtich の撃力ベース法 [1] に改良を加えた衝突運動モデルを構築し、エアホッケーゲームを題材とした単点衝突現象における有効性の検証を行ってきた [2]。我々の構築した衝突運動モデルは、Mirtich の手法では考慮されていない、衝突中に発生する力の変化を表現することが大きな特長である。これは、触覚体感型シミュレーションにおいて、操作者に与える反力を提示する上で有効な手法の 1 つである。本論文では、これまでの衝突運動モデルを多点衝突現象にも対応できるモデルに拡張し、Newton's Cradle と呼ばれる実験器を題材とした同時多点衝突現象における本衝突運動モデルの有効性を検証する。

Experiment and evaluation of multi-collision movement model using Newton's Cradle

Keiichiro Dondo, Hiroshi Noborio

Division of Computer Science, Graduate School of Informatics,
Osaka Electro-Communication University

We built the collision movement model for rigid body that added improvement to Mirtich's impulsive force base method, and we evaluated the effectiveness in the single-collision experiment using an air hockey game in the past. It is a big good point for haptic rendering that our method can express a change of the power to occur during the collision. That is not considered by Mirtich's method. In this paper, we gave the expansion applied to a multi-collision phenomenon to our method, and we evaluate our method in multi-collision experiment using Newton's Cradle.

1 はじめに

近年、計算機上に構築した物体を実際の物理運動モデルを用いて運動計算を行う、ダイナミックアニメーションの作成や、ハプティクスツールと呼ばれる触覚フィードバックデバイスを用いて操作者が計算機上の仮想物体にデバイスを使って触れたとき、接触力を体感できることを可能とする研究が盛んに行われている。これらには物理運動モデルが必要であり、本研究室でも物体の衝突現象に着目した剛体物体同士の衝突時に発生する力を撃力ベース法によって求める衝突運動モデルの構築と、その検証を行ってきた。

我々のこれまでの研究では、我々が構築した衝突運動モデルを単点衝突での実験による検証を行った。そこで、本研究では我々の衝突運動モデルを同時多点衝突現象への拡張を行い、Newton's Cradle を題材とした実験で、有効性の検証を行う。

2 撃力ベース法

本研究では、Mirtich の提案する撃力ベース法 [1] に改良を加えた手法を利用する。主な改良点として、
1. 衝突中の時間と力の変化を考慮に入れること、
2. 衝突中の力の変化を人工撃力波形を生成することによって表現すること、
3. 各物体が持つ衝突前から持つ運動量によって摩擦力の計算を行うことが

挙げられる。

我々の手法は、衝突点に対して垂直方向の力を人工撃力波形を用いて表現し、衝突点に対して接線方向の力を摩擦力として表現する。本章では、これらを求める手順について述べた後、同時多点衝突への拡張手法について述べる。

2.1 撃力と速度の関係

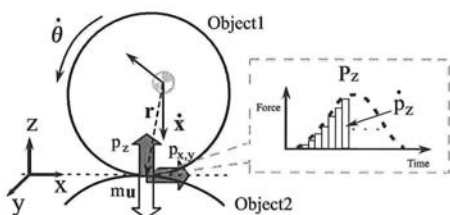


図 1: 剛体物体の衝突現象と座標系

i : 物体番号, $\dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\theta}_i$: 速度, 角速度

$\mathbf{r}_i$: 物体の重心から衝突点までの距離ベクトル

$\mathbf{v}_i$: 絶対速度, $\mathbf{u}$: 相対速度, $\mathbf{J}_i$: 慣性テンソル

まず、物体 i の衝突点における衝突中の物体の絶対速度は、式 (1) を用いて求める。

$$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \dot{\mathbf{x}}_i(t) + \Delta \dot{\theta}_i(t) \times \mathbf{r}_i \quad (1)$$

次に、速度の変化量と撃力の関係式 (2)、角速度の変化量と角撃力の関係式 (3)、そして相対速度を表す式 (4) より、速度と撃力の関係式 (5) を導くことができる。

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \mathbf{P} \quad (2)$$

$$\Delta \dot{\theta} = \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{P} \times \mathbf{r}] \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{v}_1 - \Delta \mathbf{v}_2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{I} - (\mathbf{r}_1 \tilde{\mathbf{J}}_1^{-1} \mathbf{r}_1 \tilde{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_2 \tilde{\mathbf{J}}_2^{-1} \mathbf{r}_2 \tilde{\mathbf{r}}_2) \right] \mathbf{P} \\ &= \mathbf{M} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathbf{I}$: 3×3 の単位行列, $\tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i$ の 3×3 歪対称行列

$\mathbf{M}$: 物体の位置姿勢を表す 3×3 行列

(衝突中は一定)

撃力とは、物体が衝突時に発生する反力であり、微小な力の合計 (力積) であるといえる。また、運動量保存則から衝突前後の運動量の変化量に等しいことを前提とする。

2.2 人工撃力波形の生成

人工撃力波形の生成には、3つのパラメータ (波形の高さ: H , 衝突時間: W , 反発係数: E) を使用し、形状を決定する。式 (6) は、過去の実験より求めた人工撃力波形の高さ H と衝突時間 W と物体の運動量との関係であり、 S_h, S_w, E は未知パラメータ、定数 $7.5[\text{msec}]$ は平均衝突時間である。

$$H = S_h \cdot m u_z, \quad W = S_w \cdot \frac{1}{m u_z} + 7.5 \quad (6)$$

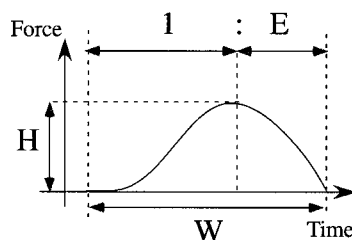


図 2: 人工撃力波形

2.3 摩擦力の提示

時刻 (t) における衝突中の物体の運動状態をクーロンの最大静止摩擦の式 ((7) 式) を用いて判定する。式 (7) が真のとき、接線方向の力が最大静止摩擦力より小さいので、衝突中に接線方向に滑ることがない、固着状態 (Sticking Mode) と判定し、偽のとき、接線方向の力が最大静止摩擦力を超えるので、衝突中に接線方向に滑る、滑り状態 (Sliding Mode) と判定する。また、式 (8) に示す時刻 (t) における運動量

$mu(t)$ は、衝突前の運動量 $mu(t_0)$ に、時刻 (t) までに発生した撃力の合計 $P(t)$ を加算することによって求める。

$$\sqrt{(mu_x(t))^2 + (mu_y(t))^2} \leq \mu_s |mu_z(t)| \quad (7)$$

$$mu(t) = mu(t_0) + P(t) \quad (8)$$

式 (9) は滑り状態に対して適用される。固着状態では、撃力は垂直方向のみ発生し、接線方向には発生しないものとする。また、接線成分は、動摩擦係数 μ_d を用いて動摩擦力として表現する。

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x(t) \\ \dot{p}_y(t) \\ \dot{p}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_d \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \cdot \dot{p}_z(t) \\ -\mu_d \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \cdot \dot{p}_z(t) \\ \dot{p}_z(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.4 同時多点衝突現象

多点衝突モデルでは、同時多点衝突も単点衝突の連続として扱う。衝突点ごとに人工撃力波形を生成し、パラメータ α_k で定数倍することで、同時多点衝突時の撃力を表現する。また、 α_k は生成される人工撃力波形の個数 (k) だけ個別に存在する。図 3(a) の現象では、図 3(b) に示すように、共通の人工撃力波形をパラメータ α_k によって撃力波形を変化させる。

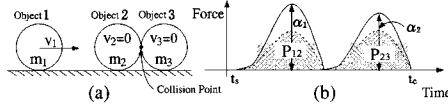


図 3: (a) 同時多点衝突現象

(b) 同時多点衝突時の人工撃力波形生成

式 (10), (11), (12) は、図 3(a) の現象の衝突前後の運動量と撃力との関係式である。このようにパラメータ α_k を使って波形の大きさを変化させることで、同時多点衝突で生じる衝突力の伝播を表現する。ここで、 $t(s)$ は衝突開始時、 $t(e)$ は衝突終了時、 $P_{ij} = -P_{ji}$ とする。

$$m_1 v_1(t_e) = m_1 v_1(t_s) + \alpha_1 P_{12} \quad (10)$$

$$m_2 v_2(t_e) = m_2 v_2(t_s) + \alpha_1 P_{21} + \alpha_2 P_{23} \quad (11)$$

$$m_3 v_3(t_e) = m_3 v_3(t_s) + \alpha_2 P_{32} \quad (12)$$

2.5 キャリブレーション

未知パラメータの同定には遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm) を使用する。表 1 に示すパラメータのそれぞれの範囲内を、刻み幅の間隔で探索を行う。データ 1 つに対しての評価値は、各球の (運動量の変化量 - 撃力) の絶対値を足し合わせた値で、この値を 1 パターンにつき計測したデータ個数分 (10 個) 計算し、その平均値を 1 パターンにおける評価値として探索を行う。よって、本論文では評価値が少なくなるほどよい結果であるといえる。

表 1: 未知パラメータの種類, 探索範囲, 刻み幅

パラメータ	探索範囲	刻み幅
S_h	100.0 ~ 250.0	0.01
S_w	0.001 ~ 2.0	0.001
E	0.001 ~ 1.0	0.001
μ_s	0.001 ~ 1.0	0.001
μ_d	0.001 ~ 1.0	0.001
α_1	0.001 ~ 1.5	0.001
α_2	0.001 ~ 1.5	0.001

3 金属球による衝突波形の計測

振り子の状態に設置した金属球による衝突実験を行い、衝突中に発生する力の変化を力覚センサ (Nitta Co.) を用いて計測する。

同じ条件下で複数回の実験を行うことにより、人工撃力波形の形状が極端に変化しないものであるかを確認するとともに、2.4 節で述べた同時多点衝突への拡張手法が正しいものであるかを検証する。

3.1 計測方法

図4のように、1つの金属球を振り子の状態に吊り、球が最も振り下ろされた位置で力覚センサに衝突する位置に置く。このとき、力覚センサは金属バーで床面・背面を固定し、衝突中に移動しないよう固定する。

ある程度の高さまで球を持ち上げてから放し、力覚センサに衝突させる。同じ条件の下、計測を10回行う。

本計測で使用した力覚センサのサンプリングは40[khz]、使用した球は 質量：115[g] 直径：30[mm] である。また、力覚センサと金属球との衝突面には機器の故障を防ぐため、アクリル板をつけて行う。

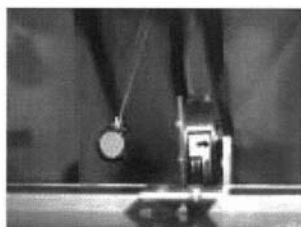


図4: 金属球による衝突波形計測実験

3.2 計測結果と評価

計測の結果、図5から金属球の衝突実験により計測した力波形の成す基本的な形状はほぼ一定であると確認できる。また、各々で大きさの異なる力波形の高さや衝突時間（力波形の幅）、最大圧縮点に到達するまでの時間は、2.2節で述べた手法により、それぞれに適した形状に人工撃力波形の形状を調整できる。

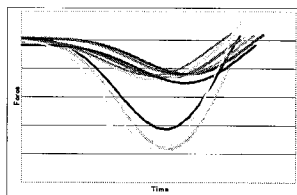


図5: 波形の形状

図5のグラフを積み上げグラフ表示に直したものを図6に示す。これは、値を積み上げる形で表示し、その総和を示しており、ここでは力積を表している。図6より、衝突中に発生する力波形の力積の変化は、高さを除いてほぼ違いが現れないことが確認できる。これにより、2.4節で述べたように、同時多点衝突現象における撃力計算を行う手法として、衝突点ごとに高さのみ変化させた人工撃力波形を生成することが正しい手法であるといえる。

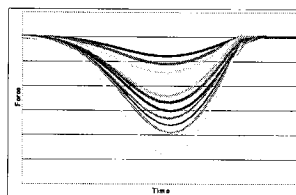


図6: 波形の形状 (力積)

4 Newton's Cradle による 3球衝突実験

Newton's Cradle と呼ばれる実験器具による3球衝突実験を行うことにより、我々の衝突運動モデルの同時多点衝突への拡張手法の有効性を検証する。

Newton's Cradle とは、図7のように、金属球を振り子状態に直線状に紐で吊るしたもので、外部から力を与えていない静止状態のとき、隣り合う球同士がちょうど接触する位置になるように配置したものである。端にある1球を持ち上げ、振り落とすことにより同時多点衝突を発生させる。

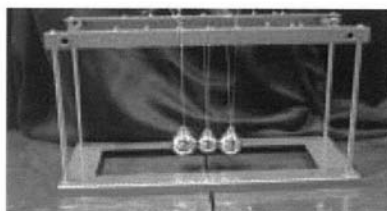


図7: Newton's Cradle

4.1 実験方法

Newton's Cradle に金属球を 3 つ配置し、3 球同時多点衝突を行う。図 8 のように、衝突の様子を高速度カメラを 2 台使ったステレオビジョン撮影を行い、各球の衝突前後の重心位置変位の 3 次元計測から、各球の衝突前後の速度をそれぞれ取得する。



図 8: 実験環境

本実験で使用した球の種類は以下の 2 種類である。
球 A : 直径:30.0[mm] 質量:115[g]
球 B : 直径:38.1[mm] 質量:230[g]

(※) 表 2 の表記方法

例) 衝突パターン $A \rightarrow B - B$

- ・ 球 A, 球 B, 球 B の順番に球を配置
- ・ 初めに持ち上げて、振り下ろす球は球 A

($\bigcirc \rightarrow$: $\bigcirc$ は衝突する球)

($\triangle - \triangle$: $\triangle$ は衝突される球)

2 種類の球を表 2 に示す配置で、合計 8 パターンの衝突実験を、それぞれ 1 パターンにつき 10 回ずつ実験を行う。

実験から得られた各球の [衝突前後の速度] と、衝突点ごとの [衝突方向ベクトル] を入力として、各球のもつ、実験から得られた [運動量の変化量] と、入力データを使って、計算によって得られた [撃力] を比較し、両値が近い値をとるための最適な未知パラメータを探索するプログラムを実験パターンごとに実行する。

これにより、実験パターンごとに最適な未知パラメータの同定を行う。そして、各球のもつ [運動量

表 2: 3 球衝突実験 衝突パターン

No.	衝突パターン
1	$A \rightarrow A - A$
2	$A \rightarrow A - B$
3	$A \rightarrow B - A$
4	$A \rightarrow B - B$
5	$B \rightarrow A - A$
6	$B \rightarrow A - B$
7	$B \rightarrow B - A$
8	$B \rightarrow B - B$

の変化量] と同定されたパラメータを使って計算された [撃力] を求め、キャリブレーションの評価値と、実際の力誤差値から、有効性の検証を行う。

また、高速度カメラはそれぞれ、Motion-ProX2000(Redlake co.) と MotionProX3(Redlake co.) を使用し、設定はどちらもフレームレート: 500[Hz]、解像度: 1280 × 1024[pixel] で、同期をとりながら撮影を行った。

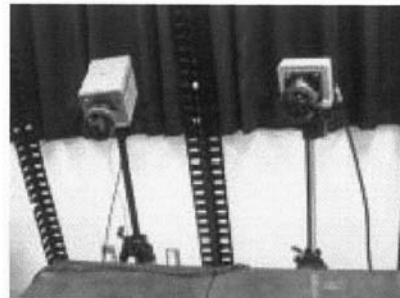


図 9: 高速度カメラ

4.2 実験結果 (各衝突パターンの評価値とパラメータ)

キャリブレーションにより同定した衝突パターンごとのパラメータを表 3 に示す。評価値から判断して、どのパターンにおいても [運動量の変化量] に近い [撃力] が求まっていると考える。

4.3 実験結果 (各衝突パターンの運動量の変化量と撃力)

衝突パターンごとの各球の [運動量の変化量] と、キャリブレーションによって同定したパラメータを使って計算した [撃力] のデータ数 (10 個) 平均値を表 4～11 に示す。

この結果から、いずれのパターンにおいても [運動量の変化量] とほぼ同等の [撃力] が求められている。よって、我々の構築した衝突運動モデルを同時多点衝突に拡張した手法が有効であるといえる。

表 4: 衝突パターン No.1 A1 → A2 – A3

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.006118	0.004378	-0.056927
A2	0.000087	-0.000301	0.003436
A3	0.004325	0.000444	0.054129
	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.001401	0.000370	-0.057701
A2	-0.001794	-0.000448	0.003563
A3	0.000393	0.000078	0.054137

表 5: 衝突パターン No.2 A1 → A2 – B1

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.004467	0.003606	-0.076708
A2	0.000087	-0.000301	0.003436
A3	0.006871	-0.004571	0.071262
	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.002646	-0.000004	-0.076344
A2	-0.001794	-0.000448	0.003563
A3	0.001755	-0.000059	0.071685

表 6: 衝突パターン No.3 A1 → B1 – A2

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.006118	0.004378	-0.056927
A2	0.000174	-0.000601	0.006871
A3	0.004325	0.000444	0.054129
	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.001063	0.000172	-0.067456
A2	-0.001272	-0.000195	0.028454
A3	0.000209	0.000023	0.039003

表 7: 衝突パターン No.4 A1 → B1 – B2

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.006118	0.004378	-0.056927
A2	0.000174	-0.000601	0.006871
A3	0.008651	0.000888	0.108259
	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.001490	0.000352	-0.068952
A2	-0.001949	-0.000424	-0.000375
A3	0.000459	0.000072	0.069328

表 3: 3 球衝突実験 各衝突パターンの評価値とパラメータ

衝突パターン	評価値	S_w	S_h	E	μ_s	μ_d	α_1	α_2
A $\rightarrow$ A - A	0.002100	0.487	191.500	0.541	0.007	0.024	1.300	1.136
A $\rightarrow$ A - B	0.001252	0.396	222.000	0.768	0.005	0.002	1.243	1.071
A $\rightarrow$ B - A	0.002406	1.844	209.000	0.933	0.003	0.007	1.017	0.519
A $\rightarrow$ B - B	0.002869	0.345	224.600	0.552	0.002	0.014	1.355	1.071
B $\rightarrow$ A - A	0.003428	1.759	120.100	0.721	0.075	0.054	1.381	1.268
B $\rightarrow$ A - B	0.001458	1.976	177.400	0.539	0.003	0.001	1.283	0.983
B $\rightarrow$ B - A	0.003057	1.966	133.700	0.490	0.002	0.021	1.448	0.972
B $\rightarrow$ B - B	0.002403	0.635	188.800	0.766	0.016	0.008	1.134	1.142

表 10: 衝突パターン No.7 B1 $\rightarrow$ B2 - A1

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$		P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]	object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.012236	0.008756	-0.113854	A1	0.002555	0.000711	-0.094905
A2	0.000174	-0.000601	0.006871	A2	-0.003016	-0.000816	0.037367
A3	0.004325	0.000444	0.054129	A3	0.000462	0.000105	0.057538

表 8: 衝突パターン No.5 B1 $\rightarrow$ A1 - A2

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.012236	0.008756	-0.113854
A2	0.000087	-0.000301	0.003436
A3	0.004325	0.000444	0.054129
	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.002023	0.000520	-0.086685
A2	-0.002373	-0.000628	0.054178
A3	0.000350	0.000109	0.032508

表 9: 衝突パターン No.6 B1 $\rightarrow$ A1 - B2

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.012236	0.008756	-0.113854
A2	0.000087	-0.000301	0.003436
A3	0.008651	0.000888	0.108259
	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.001170	0.000041	-0.113893
A2	-0.001650	-0.000045	0.030401
A3	0.000480	0.000004	0.083492

表 11: 衝突パターン No.8 B1 → B2 - B3

	$m\Delta v_x$	$m\Delta v_y$	$m\Delta v_z$
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.012236	0.008756	-0.113854
A2	0.000174	-0.000601	0.006871
A3	0.008651	0.000888	0.108259

	P_x	P_y	P_z
object	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
A1	0.001711	0.000300	-0.103025
A2	-0.002086	-0.000352	0.039869
A3	0.000375	0.000052	0.063157

5 まとめ

本論文において、我々は、剛体物体同士の衝突運動モデルを同時多点衝突現象にも適用できるよう拡張を行った。実際に衝突中に発生する力の変化の力積が、力波形の高さのみ変化する点から衝突点ごとに生成した人工撃力波形の高さを変化させるパラメータ α を用いて同時多点衝突に対応する手法を採用した。そして、拡張手法の有効性を検証するために、Newton's Cradle を用いた 3 球衝突実験を 8 パターン行った。実験の結果として、それぞれが [運動量の変化量] と同等の [撃力] が求まる結果を得られたことから、本拡張手法の有効性が確認されたものと結論付ける。

参考文献

- [1] B.V.Mirtich: Impulse-based Dynamic Simulation of Rigid Body Systems, Ph.D Dissertation (1996)
- [2] Toshiko Iguchi, Tetsuya Kodama and Hiroshi Noborio, "A Precise Approach Calibrated by Experimental Data to Make an Artificial Impulse," Eurographics 2003, Short Presentations, Granada Spain, pp.241-248, 2003.
- [3] V.Ceanga and Y.Hurmuzlu, "A New Look at an Old Problem:Newton ' s Cradle", *Proc. of the ASME Journal of Applied Mechanics* Vol.68, pp.575-583, 2001.