ゲーム情報学 1−6
(1999. 6. 24)

数理ゲーム理論の囲碁への応用

滝沢武信
takizawa@mse.waseda.ac.jp
早稲田大学政治経済学部

数理ゲーム理論 (Mathematical Game Theory) は組合わせゲーム理論 (Combinatorial Game Theory) とも呼ばれ, 組合わせ数学 (Combinatorial Mathematics) の一分野である. この理論は1960年代に本格的な研究が始められ, 1970年代に California 大学 Berkeley 校の E.Berlekamp 教授, 英国 Cambridge 大学の J.Conway 教授, カナダ Calgary 大学の R.Guy 教授らにより確立された.

筆者は Berlekamp 教授がこの理論を囲碁の最終盤に適用し始めた直後の1991年から, 同教授らの研究グループと共同研究してきた. 本論文では数理ゲーム理論の基礎とその囲碁の最終盤への適用について述べる.

Mathematical Game Theory and Its Application to Go Endgames

Takenobu TAKIZAWA
takizawa@mse.waseda.ac.jp
School of Political Science and Economics, Waseda University

Mathematical game theory is a field of combinatorial mathematics, and was established by Prof. Elwyn Berlekamp of the University of California at Berkeley, Prof. John Conway of Cambridge University, United Kingdom, and Prof. Richard Guy of Calgary University, Canada in the 1970's. The author has coresearched the theory with Professor Berlekamp's group, using the very late-stage endgame of Go as subject matter.

In this article, the author discusses the basics of mathematical game theory and also discusses how the theory works in Go endgames.

0. はじめに

数理ゲーム理論は組み合わせ数学の一分野であり,1970年代に E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy らにより確立された [1],[7],[15],[16]. 筆者は現在 UC, Berkeley の Berlekamp 教授の研究グループと, 囲碁の最終盤を題材とした本理論の共同研究を行なっている. 本論文では数理ゲーム理論の基礎と, その囲碁の最終盤への応用について述べる.

1. 数理ゲーム理論

数理ゲーム理論は20世紀初頭の Nim と呼ばれるゲームの研究が起源である [5] が, 1960年代の Berlekamp 教授による Dots and Boxes と呼ばれるゲームの研究の過程で, それはさらに抽象化された. ここでは数理ゲーム理論で用いられる術語や記号等について述べる.

定義1．1 (ゲーム)
G が2人のプレイヤ (L と R) のゲームであるとは, $G = \{g^{\mathrm{L}}|g^{\mathrm{R}}\}$ 但し $g^{\mathrm{L}}, g^{\mathrm{R}}$ はゲームの集合 (空集合でもよい), のことである. g^{L} の要素を G の左 Follower,g^{R} の要素を G の右 Follower という.

(注意) ゲームの定義には," 手番" は含まれない.

手番が L であり,g^{L}が空でなければ,L は g^{L} の要素の中の任意のゲーム G^{L}を選ぶことができる. 次に手番が R にうつり, R はそのゲーム G^{L}の右 Follower の中から可能ならば任意のゲームを選ぶことができる. 初めの手番が R の場合も同様である.

定義 1.2 (ゲームの勝敗)
G がゲームであり, 手番が L であるとき,g^{L}が空であれば, L は負けである. 同様に手番が R であるとき,g^{R}が空であれば, R は負けである. L と R のどちらかが負けのとき, 負けでないほうは勝ちである.

(注意) どちらも負けでないゲームも存在する.

例 1.3 (零ゲーム)
g^{L}も g^{R}も空であるゲームを零ゲームといい,0 と書く.

$$0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\{\}|\{\}\}$$

零ゲームでは, 手番の方が負けである.

定義 1.4 (ゲームの和)
$G = \{g^{\mathrm{L}}|g^{\mathrm{R}}\}, H = \{h^{\mathrm{L}}|h^{\mathrm{R}}\}$ がゲームのとき,

$$\{\{G^{\mathrm{L}}+H; G^{\mathrm{L}} \in g^{\mathrm{L}}\} \cup \{G+H^{\mathrm{L}}; H^{\mathrm{L}} \in h^{\mathrm{L}}\} | \{G^{\mathrm{R}}+H; G^{\mathrm{R}} \in g^{\mathrm{R}}\} \cup \{G+H^{\mathrm{R}}; H^{\mathrm{R}} \in h^{\mathrm{R}}\}\}$$

をゲーム G とゲーム Hの和といい,$G+H$と書く.$G+H$もゲームである.

(注意),G と Hは互いに影響し合わないことを, 数理ゲーム理論においては仮定する. この和ゲームの概念が組合わせゲームとも呼ばれる所以である.

定義 1.5 (逆ゲーム)
$G = \{g^{\mathrm{L}}|g^{\mathrm{R}}\}$ のとき,$\{-g^{\mathrm{R}}|-g^{\mathrm{L}}\}$ を G の逆ゲームといい,$-G$ と書く. ここに, $-g^{\mathrm{R}} = \{-G^{\mathrm{R}}; G^{\mathrm{R}} \in g^{\mathrm{R}}\}$, $-g^{\mathrm{L}} = \{-G^{\mathrm{L}}; G^{\mathrm{L}} \in g^{\mathrm{L}}\}$ である.

例 1.6 正のゲーム, 負のゲーム
定義 1.3 の 0 は一番簡単なゲームであるが, それを用いて, いくつかのゲームが構成できる. それらの性質を述べる.
ゲーム $G = \{\{0\}|\{\}\}$ においては,L の手番のときは $G^{\mathrm{L}} = 0$ があるが, R の手番のときは,G^{R}は存在しない. したがって,R が手番のときは R の負けであることがわかる. 次に L の手番のとき, G の左 Follower $G^{\mathrm{L}} = 0$ では,R の右 Follower $(G^{\mathrm{L}})^{\mathrm{R}}$は存在しないので G^{L}において, R は負けである. したがって, ゲーム G においては, 現在の手番がどちらであっても,R の負け (すなわち L の勝ち) であることがわかる. このようなゲームを正のゲームという.

特にこのゲーム $G = \{\{0\}|\{\}\}$ を 1 と書く.

ゲーム $H = \{\{\}|\{0\}\}$ においては, 上のゲーム 1 と全く逆に現在の手番がどちらであっても,L の負け (すなわち R の勝ち) であることがわかる. このようなゲームを負のゲームという.

特にこのゲーム $H = \{\{\}|\{0\}\}$ を-1 と書く.

ここで,$G = \{\{0\}|\{\}\}$ のとき, 定義 1.5 によれば, $-G = \{-g^{\mathrm{R}}|-g^{\mathrm{L}}\}$ であった. この G の場合,

$$-g^{\mathrm{R}} = -\{\} = \{-G^{\mathrm{R}}; G^{\mathrm{R}} \in \{\}\} = \{\}, -g^{\mathrm{L}} = -\{0\} = -\{\{\}|\{\}\} = \{-\{\}|-\{\}\} = \{\{\}|\{\}\} = \{0\} \text{ である.}$$

すなわち, $1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\{0\}|\{\}\}$ であれば, $-1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\{\}|\{0\}\}$ である.

省略記法

以後ゲームの左および右 Follower の集合の記号 ($\{\}$) は曖昧さがなければ, 省略することとする. すなわち,

$$0 \stackrel{\text{def}}{=} \{|\},\ 1 \stackrel{\text{def}}{=} \{0|\},\ -1 \stackrel{\text{def}}{=} \{|0\}$$

等と表わす.

例 1.7 ファジイなゲーム
ゲーム $S = \{0|0\}$ においては,$S^{\mathrm{L}} = S^{\mathrm{R}} = 0$ であるので, 現在 L の手番であっても,L の負けではない. ところが,S^{L} においては, $(S^{\mathrm{L}})^{\mathrm{R}} = \{\}$ であるので,R の負けである. すなわち, 現在 L の手番であれば,L の勝ちである. 一方, 現在 R の手番のときも同様に R の勝ちになることが分かる. このように, 現在手番の方が勝つゲームをファジイなゲームという.
特にこのゲーム S を*(スター) と呼ぶ. このゲームは数理ゲーム理論で重要な役割をはたす.

$$* \stackrel{\text{def}}{=} \{0|0\}$$

例 1.8 ゲーム $1 + (-1)$
ゲーム $1 + (-1)$ は, 零ゲームではないが零ゲームと同じ性質を持つ.

定理 1.1 (ゲームの分類)
G をゲームとすると G は次の (1) $\sim$ (4) のいずれかに分類される.
(1)(どちらの手番でも左 (L) の勝ち)G は正のゲーム. このとき,$G > 0$ と書く.
(2)(どちらの手番でも右 (R) の勝ち)G は負のゲーム. このとき,$G < 0$ と書く.
(3)(手番の負け)G は零ゲームと同じ性質をもつ. このとき,$G = 0$ と書く.
(4)(手番の勝ち)G はファジイなゲーム. このとき, $G \gtrless\!\!\!\!\!\diagdown 0$ と書く.

記号 ($\equiv$と$=$)
$G \equiv H$とは$G = H = \{\}$ であるか, $g^{\mathrm{L}} \equiv h^{\mathrm{L}}, g^{\mathrm{R}} \equiv h^{\mathrm{R}}$ であることをいう. $G = H$とは$G + (-H) = 0$ であることをいう. また,$G + (-H)$ を $G - H$と書く.
たとえば, $1 + (-1) \not\equiv 0$ であるが,$1 + (-1) = 0$ である.

定義 1.9 (ゲームの整数倍)
n が自然数でGがゲームのとき,Gのn個のコピーを$n{\cdot}G$(但し,$0{\cdot}G = 0$) と表わす. たとえば,$2{\cdot}G = G{+}G$,$3{\cdot}G = G + G + G$ である. また,$n \cdot G$ の逆ゲーム $-(n \cdot G)$ を $(-n) \cdot G$ と表わす.

例 1.10 ゲーム $2 \cdot *$
ゲーム $2 \cdot * = * + * = 0$ である. $*$は 0 でも正でも負でもないが,$* + * = 0$ すなわち,$-* = *$ となるゲームである.

定義 1.11 (ゲームの大小関係)
G, Hを二つのゲームとする. このとき,
$G > H \Leftrightarrow G - H > 0$
$G < H \Leftrightarrow G - H < 0$
$G = H \Leftrightarrow G - H = 0$
$G \gtrless\!\!\!\!\!\diagdown H \Leftrightarrow G - H \gtrless\!\!\!\!\!\diagdown 0$
また,
$G \geq H \Leftrightarrow G > H$または$G = H$
$G \leq H \Leftrightarrow G < H$または$G = H$
と表わす.

(記号) G, Hがゲームであり, $\forall n \in \mathbf{N}$ に対し, $n \cdot G < H$のとき, $G << H$ と表わす. たとえば, $* << 1$ である.

定理 1.2 (ゲームの集合の性質その 1)

gをすべてのゲームの集合とすると, 次の性質が成り立つ.

(0)$\forall G, \forall H \in g$のとき,$G+H \in g$

(1)$\forall G, \forall H, \forall \mathrm{F} \in g$のとき,$(G+H)+\mathrm{F}=G+(H+\mathrm{F})$

(2)$\forall G, \forall H \in g$のとき,$G+H=H+G$

(3)$\exists O \in g, G+O=O+G=G$

(4)$\forall G \in g$のとき,$\exists H \in g; G+H=H+G=O$

すなわち,gは加法に関してアーベル群をなしている.

定理 1.3 (ゲームの集合の性質その 2)

gをすべてのゲームの集合,**Z** をすべての整数の集合とすると, 次の性質が成り立つ.

(0)$\forall G \in g, \forall n \in Z$のとき,$n \cdot G \in g$

(1)$\forall G, \forall H \in g, \forall n \in Z$のとき,$n \cdot (G+H)=n \cdot G+n \cdot H$

(2)$\forall G \in g, \forall m, \forall n \in Z$のとき,$(m+n) \cdot G=m \cdot G+n \cdot G$

(3)$\forall G \in g, \forall m, \forall n \in Z$のとき,$(mn) \cdot G=m \cdot (n \cdot G)$

(4)$\forall G \in g$のとき,$1 \cdot G=G$

これと, 定理 1.2 により,gは整数環上のモジュールであることが分かる.

定理 1.4 (ゲームの集合の性質その 3)

gをすべてのゲームの集合とすると, gは上の定義 1.6 で述べた大小関係により, 半順序集合となる.

定義 1.12 (ゲームの標準形)

$G=\{G^{\mathrm{L}_1}, G^{\mathrm{L}_2}, ..., G^{\mathrm{L}_m} | G^{\mathrm{R}_1}, G^{\mathrm{R}_2}, ..., G^{\mathrm{R}_n}\}$ とする.

(1) このとき,G の二つの左 Follower$A$ と Bで,$A \geq B$ならば,B は考えなくてもよい. また, 右 Follower$C$と Dで,$C \leq D$ならば, Dは考えなくてもよい.

(2)G の左 Follower$A$ の右 FollowerA^{R}が存在し, かつ,$A^{\mathrm{R}} \leq G$ ならば, G の左 Follower$A$ は A^{R}の左 Follower(複数でもよい) で置き換えてよい. また, 右 Follower$C$の左 FollowerC^{L}が存在し, かつ,$C^{\mathrm{L}} \geq G$ ならば, G の右 Follower$C$は C^{L}の右 Follower(複数でもよい) で置き換えてよい.

(3) 上の (1) における Bまたは Dを削除し,(2) の置き換えを行ない, 必要ならばさらにこれらを繰り返し, それ以上これらの操作が行なえなくなったものをゲーム G の標準形 (Canonical Form) という.

(注意) これは, ゲームの木の最小のものを求めることと同じである.

例 1.13 整数であるゲーム

$n \in N$(自然数の集合) のとき,$G=\{n|\}$ はゲームであり, それを $n+1$ と表わす.

たとえば,$2 \equiv \{1|\}$ である. また, これより,$-2 \equiv \{|-1\}$ もゲームである.

例 1.14 $\frac{m}{2^k}$ 型のゲーム

$m, k \in N$のとき, $G=\{\frac{(m-1)}{2^k}|\frac{(m+1)}{2^k}\}$ はゲームであり, それを $\frac{m}{2^k}$ と表わす.

たとえば,$\frac{1}{2} \equiv \{0|1\}$, $\frac{1}{4} \equiv \{0|\frac{1}{2}\}$, $\frac{3}{4} \equiv \{\frac{1}{2}|1\}$ である. また,$-\frac{1}{2} \equiv \{-1|0\}$ もゲームである.

定義 1.15 (ゲームの平均値)

ゲーム G に対し, ある実数 m と t があり, 任意の自然数 n に対し

$$nm-t \leq nG \leq nm+t$$

が成り立つとき,m をゲーム G の平均値 (mean) という.

定義 1.16 (ゲームの冷却)

ゲーム $G=\{G^{\mathrm{L}}|G^{\mathrm{R}}\}$ とする. また,t を実数とする. このとき,

$$G_t=\{G_t^{\mathrm{L}}-t|G_t^{\mathrm{R}}+t\}$$

を G の t だけ冷却したゲームという．但し,G が既に数のときは $G_t = G$ とする.
特に $t=1$ のとき,$G_t = G_1$を G のチルド・ゲーム (Chilled Game) という．また,G から G_1を作ることを G をチルするという.

定義 1.17 (サーモグラフ)
$G = \{G^{L_1}, G^{L_2}, ..., G^{L_m} | G^{R_1}, G^{R_2}, ..., G^{R_n}\}$ とする.
(1) 左 Scaffold および右 Scaffold の計算 ($t \in [0, +\infty)$)

$$\mathrm{LS}(G)(t) = -t + \max_{1 \leq i \leq m} (\mathrm{R}W(G^{L_i})(t))$$

$$\mathrm{RS}(G)(t) = t + \min_{1 \leq j \leq n} (\mathrm{L}W(G^{R_j})(t))$$

(2) 左 Wall および右 Wall の計算 ($t \in [0, +\infty)$)
G が数 x であるときは $\mathrm{LW}(G) = \mathrm{RW}(G) = x$, G が数でないときは,
(I) $\mathrm{LS}(G)(t) \geq \mathrm{RS}(G)(t)$ のとき $\mathrm{LW}(G)(t) = \mathrm{LS}(G)(t), \mathrm{RW}(G)(t) = \mathrm{RS}(G)(t)$
(II) $\mathrm{LS}(G)(t) \leq \mathrm{RS}(G)(t)$ のときは, t より小さな実数τで,$\mathrm{RS}(G)(\tau) = LS(G)(\tau)$ を満たす最大のものを求め,そのときの共通の値を $v = \mathrm{RS}(G)(\tau) = \mathrm{LS}(G)(\tau)$ とする.
(i) $\mathrm{LS}(G)(t) \leq v \leq \mathrm{RS}(G)(t)$ のとき, $\mathrm{LW}(G)(t) = \mathrm{RW}(G)(t) = v$
(ii)$\mathrm{LS}(G)(t) \leq \mathrm{RS}(G)(t) \leq v$のとき, $\mathrm{LW}(G)(t) = \mathrm{RW}(G)(t) = \mathrm{RS}(G)(t)$
(iii)$v \leq \mathrm{LS}(G)(t) \leq \mathrm{RS}(G)(t)$ のとき, $\mathrm{LW}(G)(t) = \mathrm{RW}(G)(t) = LS(G)(t)$
とする.
(3) プロット
上の (2) で定義した左および右 Wall のペアを,$t-v$グラフで表わしたものを G のサーモグラフ (Thermograph) という．但し, 伝統的にサーモグラフは t を縦軸 (上が正の方向) に,vを横軸 (左が正の方向) にとり, 表わす.

定義 1.18 (ゲームの温度)
$\mathrm{LS}(G)(t) > \mathrm{RS}(G)(t)$ を満たす t がなければ 0 を, あれば,$\sup\{t; \mathrm{LS}(G)(t) > \mathrm{RS}(G)(t)\}$ の値をゲーム G の温度 (Temparature) という.

定義 1.19　スイッチ (Switch)
$G = \{F|H\}$, ただし $F > H$, であるゲームをスイッチという.
例 1.20 ゲーム $\{1|-1\}$
$G = \{1|-1\}$ は数でないゲームであるが,$G + G = 0$ である.
したがって,G の平均値は 0 である. また,G を 1 だけ冷却すると,

$$G_1 = \{G_1^L - 1 | G_1^R + 1\} = \{1_1 - 1 | (-1)_1 + 1\} = \{1 - 1 | (-1) + 1\} = \{0|0\} = *$$

である. ここで,$1_1 = 1, (-1)_1 = -1$ であることに注意する.
G のサーモグラフは図 1.1 の通りであり,G の温度は 1 である. また,$1 > -1$ であるので, このゲーム $\{1|-1\}$ はスイッチである.

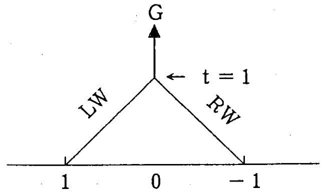

図 1.1 ゲーム $\{1|-1\}$ のサーモグラフ

例 1.21 無限小 (Infinitecimal) ゲーム

$$\uparrow \overset{\text{def}}{=} \{0|*\}(\text{Up})\ \uparrow > 0$$

$$\downarrow \overset{\text{def}}{=} \{*|0\}(\text{Down})\ \downarrow < 0$$

$$\downarrow = -\uparrow,\ \uparrow << 1, \uparrow \not\gtrless *$$

$$\uparrow * \overset{\text{def}}{=} \uparrow + *\ (\text{UpStar}),\ \uparrow * > *\ \ \uparrow * \not\gtrless 0$$

$$\downarrow * \overset{\text{def}}{=} \downarrow + *\ (\text{DownStar}),\ \downarrow * < *\ \ \downarrow * \not\gtrless 0,\ \downarrow * = -\uparrow$$

$$\Uparrow \overset{\text{def}}{=} \{0| \uparrow *\}(\text{DoubleUp})$$

$$\Downarrow \overset{\text{def}}{=} \{\downarrow *|0\}(\text{DoubleDown})$$

$$\Uparrow * \overset{\text{def}}{=} \Uparrow + *\ (\text{DoubleUpStar})$$

$$\Downarrow * \overset{\text{def}}{=} \Downarrow + *\ (\text{DoubleDownStar})$$

$$\Uparrow = 2\cdot \uparrow,\ \Uparrow > *$$

$$\Downarrow = 2\cdot \downarrow,\ \Downarrow < *$$

$$\Uparrow * > 0,\ \Downarrow * < 0$$

例 1.22　ゲーム $G = \{0||0|-1\}$
ゲーム G においては,G の左 Follower は 0 であり, 右 Follower はスイッチ $H = \{0|-1\}$ である. ところが, H の左 Follower は 0 であるから, ゲーム G においては, L の手番でも R の手番でも L の勝ちであることがわかる. すなわち, $G > 0$ である. このゲームを$+_1$ (tiny 1) という.
同様に, ゲーム $F = -G = \{1|0||0\} < 0$ であるが, このゲームを$-_1$ (miny 1) という.
定義 1.23　ゲーム Tiny x, Miny x
x が正の数のとき, $+_x \equiv \{0||0|-x\}$ を Tiny x, $-_x \equiv \{x|0||0\}$ を Miny x という.

2. 囲碁の最終盤への適用

現在, 筆者らは囲碁 (数理碁) の最終盤 (日本の囲碁ルールにしたがえばすべての石は単独での活き死にがすでに決定されていて, 残っているのは先手 1 目, 後手 2 目, 後手 1 目の寄せだけしかない状況) を題材として数理ゲーム理論の研究を進めている. ここでは, その一部を示す.
例 2.1 囲碁の部分局面
図 2.1 は囲碁の部分局面である. 但し, 黒石も白石も活きているものとする.

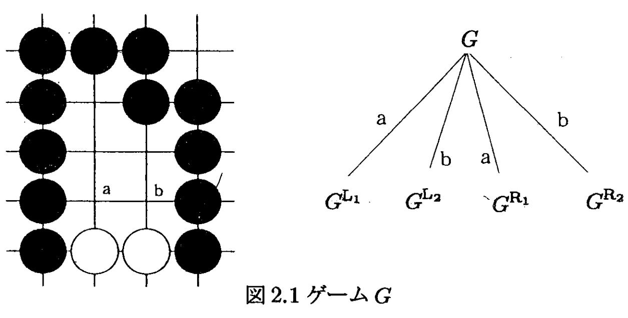

図 2.1 ゲーム G

この局面をゲーム G とすると,G からの黒の次の手の候補は a または b に打つ手である. また, 白の次の手の候補も a または b に打つ手である. 一般のゲームにおける L は囲碁では黒,R は白であるので, G から黒が a に

打った局面を G^{L_1}, 黒が b に打った局面を G^{L_2} とする. 同様に白が a に打った局面を G^{R_1}, 白が b に打った局面を G^{R_2} とする.
次に G^{L_1} においては, 黒が打てば黒地 3 目ができるのは明らかである. また, 白が打てば, 次に黒が打てば黒地 2 目ができ, 次も白が打てばその次に黒が打てば黒地 1 目, その次も白が打てば, さらにその次はどちらが打っても 0 目となる. これをゲームの記号で表わせば, $G^{L_1} = \{3|\{2|\{1|\{0|0\}\}\}\}$ となるが, これを省略記法で $G^{L_1} = \{3||||2|||1||0|0\}$ または,$G^{L_1} = 3||||2|||1||0|0$ とも表わす.
囲碁の最終盤の局面では 1 手につき 1 目寄せるのが標準的である. このような場合, 定義 1.9 で示したチルド・ゲームを用いるのがよい. そこで, まず, G^{L_1} をチル (1 だけ冷却) すると,

$$G_1^{L_1} = \{(G^{L_1})^{L_1} - 1|(G^{L_1})^{R_1} + 1\} = \frac{1}{8} + 2$$

同様に $G^{L_2} = \{3||2|0\}$ をチルすると,

$$G_1^{L_2} = \{3-1|\{2-1|0+1\}+1\} = \{2|\{1|1\}+1\} = \{2|2*\} = 2 + \{0|*\} = 2+\uparrow$$

ところで, $\frac{1}{8} > \uparrow$であるから, $G_1^{L_1} > G_1^{L_2}$であり,G^{L_2} は考えなくてよいことが分かる. 次に
$G^{R_1} = \{\{2|\{1|1\}\}|\{0|0\}\}$ をチルすると,

$$G_1^{R_1} = \{\{2|\{1|1\}\}_1 - 1|\{0|0\}_1 + 1\} = \frac{3}{4}$$

また, $G^{R_2} = \{\{2|\{1|\{0|0\}\}\}|\{\{3|\{0|0\}\}|0\}\}$ をチルすると,

$$G_1^{R_2} = \{\{2|\{1|\{0|0\}\}\}_1 - 1|\{\{3|\{0|0\}\}|0\}_1 + 1\} = \frac{1}{2}$$

この結果,$G_1^{R_2} < G_1^{R_1}$であり, G^{R_1} は考えなくてよいことが分かる.
最後に G 自身をチルしてみる. 但し,G は標準形で考えることとする.

$$G_1 = \{G_1^{L_1} - 1|G_1^{R_2} + 1\} = \{(2 + \frac{1}{8}) - 1|(\frac{1}{2}) + 1\} = \{1 + \frac{1}{8}|1 + \frac{1}{2}\} = 1 + \frac{1}{4}$$

すなわち, 黒も白も 1 手で 1 目稼ぐことを前提として, G は黒地 $1 + \frac{1}{4}$目と考えられることが分かる. ここで,$\{\frac{1}{8}|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$に注意する.

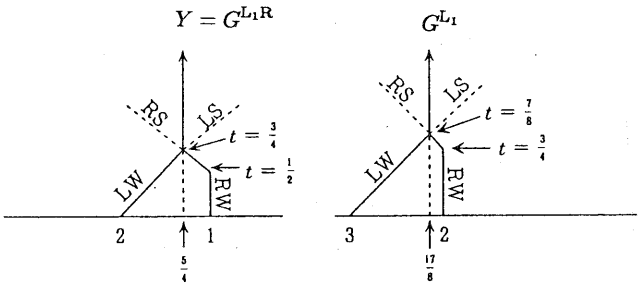

図 2.2 ゲーム G^{L_1}のサーモグラフ

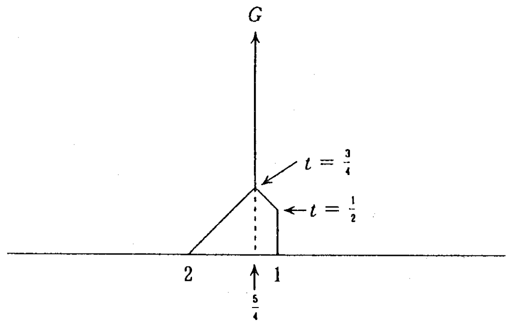

図 2.3 ゲーム G のサーモグラフ

例 2.2 サ-モグラフ
図 2.2 は,G^{L_1}のサ-モグラフの作る手順を示している. たとえば $X = (G^{L_1})^L = 3$ であるので, そのサ-モグラフは $LS(X) = RS(X) = 3$ より $LW(X) = RW(X) = 3$ となる. また,$Y = (G^{L_1})^R = \{2|Z\}, Z = ((G^{L_1})^R)^R$ であり,Zのサ-モグラフが $t \leqq \frac{1}{2}$のとき $LW(Z) = -t + 1$
$RW(Z) = t$ $t \geq \frac{1}{2}$のとき $LW(Z) = RW(Z) = \frac{1}{2}$ であるから, $LS(Y) = -t + 2$ $RS(Y) = 1$ $(t \leq \frac{1}{2})$ $RS(Y) = t + \frac{1}{2}$ $(t \geq \frac{1}{2})$ となり, $LW(Y) = -t + 2$ $(t \leq \frac{3}{4})$ $RW(Y) = 1$ $(t \leq \frac{1}{2})$ $RW(Y) = t + \frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4})$ $LW(Y) = RW(Y) = \frac{5}{4}$ $(t \geq \frac{3}{4})$ である.

よって,G^{L_1}のサ-モグラフは$\mathrm{L}S(G^{\mathrm{L}_1}) = -t + 3$ $\mathrm{R}S(G^{\mathrm{L}_1}) = 2$ $(t \leq \frac{3}{4})$ $\mathrm{R}S(G^{\mathrm{L}}1) = t + \frac{5}{4}$ $(t \geq \frac{3}{4})$ となり, $\mathrm{L}W(G^{\mathrm{L}_1}) = -t+3$ $(t \leq \frac{7}{8})$ $\mathrm{R}W(G^{\mathrm{L}_1}) = 2$ $(t \leq \frac{3}{4})$ $\mathrm{R}W(G^{\mathrm{L}}1) = t+\frac{5}{4}$ $(\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{7}{8})$ $\mathrm{L}W(G^{\mathrm{L}}1) = \mathrm{R}W(G^{\mathrm{L}}1) = 1\frac{7}{8}$ $(t \geq \frac{7}{8})$ である.
図 2.3 はGのサ-モグラフを表わす. 図 2.3 より, 温度が$\frac{3}{4}$より高ければ,Gの値は$\frac{5}{4}$で一定となることが分かる. より多くの事例については, 講演のおりに述べる.

3. おわりに

これは早稲田大学特定課題 (課題番号 98A-502) 研究助成費に基づく研究成果である.

本研究にあたり, 多大なご指導とご助言を賜わった UC,Berkeley の Elwyn Berlekamp 教授に深謝する., 同教授のセミナーで, 熱心な討論をし, かつ多くのご助言をいただいた同教授の研究グループ, 特に David Wolfe, Yonghoan Kim, William Spight, Martin Müller, Kuo-Yuan Kao, William Fraser の各氏に感謝する. 岡崎正博, 氣賀康夫の両氏には囲碁の文献等をご提供いただいたことに感謝する [13].

数理ゲーム理論を応用して囲碁の最終盤での最善手を求める研究が始められ, 一部の形についてはすでに一定の成果を得ているが, 逆に, 囲碁の最終盤の研究により数理ゲーム理論が拡張された [2],[3],[4],[6]. 現在, この理論をさらに拡張して, より複雑な形の寄せにおける最善手の検出方法の研究, 劫を含む寄せの研究, 最終盤より少し前の局面 (先手 1 目, 後手 2 目より少し大きな寄せがある局面) における最善手を求める研究への応用が行なわれている. 特に劫を含む寄せは繰り返しを含むゲーム (Loopy Game) の良い例を提供するので興味深く研究を進めている [8],[9],[10],[11],[12],[14]. 本理論の研究は組み合わせ数学の発展に寄与するが, さらに本理論は社会科学分野への応用も期待されている.

参考文献

[1] Elwyn Berlekamp, John Conway, Richard Guy: *Winning Ways*, Academic Press, 1982.

[2] Elwyn Berlekamp: *Introductory Overview of Mathematical Go Endgames*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 43, American Mathematics Society, 1991.

[3] Elwyn Berlekamp: *The Economist's View of Combinatorial Games*, Games of No Chance, Cambridge University Press, 1996.

[4] Elwyn Berlekamp, David Wolfe: *Mathematical Go*, A K Peters, 1994.

[5] Charles Bouton: *Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory*, Annals of Mathematics, Second Series Vol. 3, 1902.

[6] Richard Bozulich(Ed.): *The Go Player's Almanac*, Ishi Press, 1992.

[7] John Conway: *On numbers and Games*, Academic Press, 1976.

[8] Yonghoan Kim: *New Values in Domineering and Loopy Games in Go*, Ph. D. Thesis, UC, Berkeley, 1995.

[9] Kuo-Yuan Kao: *Sums of Hot and Tepid Combinatorial Games*, Ph. D. Thesis, UNC, Charlotte, 1997.

[10] Martin Müller: *Computer Go as a Sum of Local Games: an Application of Combinatorial Game Theory*, Ph. D. Thesis, ETH Zürich, 1995.

[11] Martin Müller, Elwyn Berlekamp, William Spight: *Generalized Thermography: Algorithms, Implementation, and Application to Go Endgames*, International Computer Science Institute, Berkeley TR-96-030, 1996.

[12] William Spight: *Extended Thermography for Multiple Kos in Go*, Computers and Games, Springer-Verlag, 1999.

[13] 氣賀康夫 : 貝石の烏鷺談義 (第 2 版)(日本棋院「棋道」抜刷),1993.

[14] 瀧澤武信 : 数理ゲーム理論とその応用 (1)–(4), 早稲田大学政治経済学部教養諸学研究 1996–1999.

[15] 一松信 : 石取りゲームの数理, 森北出版,1968.

[16] 山崎洋平 : 組み合わせゲームの裏表, シュプリンガ-・フェルラ-ク東京,1989.