ゲーム情報学 3－6
(2000. 6. 1)

スーパーパズの状態遷移に関する考察

新谷敏朗
福山大学工学部情報処理工学科
shintani@fuip.fukuyama-u.ac.jp

GPCC の課題のひとつであるスーパーパズはトランプのカード 1 組を使用する一人遊びである。その状態空間はある初期局面を開始節点とする有向グラフを形成する。本論文では、1)その有向グラフが強連結成分と無閉路有向成分からなること、2)ある節点が強連結成分に属するための必要十分条件、3)強連結成分の中で移動可能なカードの種類と位置、4)成功局面を含む無閉路有向成分が 24 個の互いに素な部分集合に分割できること、などを明らかにした。これらの性質や条件を利用すれば、成功局面に至るまでに保持すべき局面数を減らすことができる。

Consideration about state transition in Superpuzz

Toshio Shintani
Dept. of Information Processing Engineering, Fukuyama University

Superpuzz, a problem on GPCC, is a solitaire game with one deck of cards. The state space of a game forms a directed graph with an initial state as the starting node. In this paper, I pointed out the facts that the directed graph consists of strongly connected components (SCCs) and directed acyclic components (DAGs), and DAGs which contain a solution can be divided into 24 disjoint subsets . Furthermore, I found the necessary and sufficient condition for a node to belong to SCC and the numbers and columns of the cards that can move in SCC. Using these facts and conditions, it is possible to reduce the number of nodes that must be held in main memory until a solution is found.

1. はじめに

「スーパーパズ(Superpuzz)」は CMU の Berliner 教授が提唱したトランプの一人あそびである。[1] このゲームはトランプのカード１組を４行１３列に並べてプレイするものであるが、ルール上列数を縮小してもプレイが可能である。完全情報ゲームなので原理的には、初期局面を根とするゲーム木を完全探索すれば解を得ることができる。（ただし初期局面によっては理論的に解答不可能な場合も存在する。）文献［2］において、厳密には有向グラフであるゲーム木の中に同じ局面が重複して現れることを防ぐ工夫をして深さ優先探索により解を得るプログラムが示された。そして、現在のパソコンレベルの計算機（32 ビットアドレス、主記憶 1GB 以下、補助記憶 10GB 程度）によって列数が６以下の場合はゲーム木の完全探索が可能であることが示された。しかし、本来の 13 列の場合は部分的にしか解が得られていなかった。本論文ではこのゲームのある局面から別の局面への状態遷移（移動）が、同じ局面に戻ってくる可能性がある可逆的遷移と戻ってくる可能性がない非可逆的な遷移に分けられることに着目して、前者の状態遷移によって生成される節点からなる「強連結成分」と後者の状態遷移によって生成される節点からなる「無閉路有向成分」の各々の性質について考察する。さらに、成功局面が存在するのは無閉路有向成分のうちエースが４枚とも左端に位置するものだけであることにも着目して、文献［2］のプログラムで必要であった主記憶中に保持すべき局面（＝既に探索したすべての局面）の数を減らすことができることを示す。

2. ゲームのルールと特徴

2.1 ルール

スーパーパズのルールは以下の通りである。以下ではスートをH,D,S,Cで表し、数字はエースをA, 絵札をJ,Q,K、10は0、それ以外は数字そのもので示す。

1. トランプ1組をよくシャッフルした後、表向きに4行13列に並べる。
2. 4枚のKを取り除く。それによって生じた空白を「穴」と呼ぶ。
3. 穴が左端にある場合は、任意のスートの A をそこに移動できる。穴が左端でない場所にある場合は、穴の左隣のカードに続くカードをそこに移動できる。例えば、H6 の次には H7 が続く。穴の左隣がQまたは穴の場合は、いかなるカードもそこには移動できない。
4. カードの移動によって新たに生じた穴には、3.の規則に従ってカードを移動できる。
5. すべてのカードが左端のAを先頭に昇順に並べば成功である。4つの行のスートの並び順は任意である。どのカードも移動できない状態（穴の左隣がすべて Q または穴）で成功局面でなければ失敗である。

2.2 特徴

スーパーパズの局面のうち二つの例を図1、2に示す。図1の局面では左端に穴がふたつ、Aがひと

HA	H2	S9	S5	D4	DA	D9	DJ	C9	C3	D3	S8	H0
		S2	C8	DQ	CJ	CQ	H9	H4	H8	H3	S4	H7
	D5	HJ	H6	D7	S3	SJ	S7	SA	C5	H5	D8	S0
C7	D0	D6	C6		S6	SQ	HQ	C4	D2	CA	C2	C0

図 1　局面の例(1)

HA	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H0	HJ		HQ
DA	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D0	DJ	SJ	
SA	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S0		SQ	DQ
CA	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C0	CJ	CQ	

図 2　局面の例(2)

つ存在する。ルールにより左端のAは左端の穴に可逆的に移動できる。さらに2列目に左端のAと同じスートの2と穴が存在するので、左端のAの移動に対応した2の動きを考えると図3のような状態遷移図（の部分グラフ）が描ける。図3では可逆的な状態遷移に着目するため左から2列分の上3行だけを描いている。図3の6つの局面はそのうちのどのふたつについても相互に移動可能なので強連結成分である。この例では最大6回のカードの移動で元の局面に戻ってくる。文献[2]では288回のカードの移動で元の局面に戻ることがある場合が示されている。また、図2の局面を初期局面とする状態遷移図を描くと図4のようになる。（右端の3列分の上3行のみ）この例では、閉路は存在しないので局面の集合は無閉路有向成分を成す。図4からも、ある局面から別の局面に至る長さの異なる道が複数個存在することがわかる。以上の例から、既に存在する無閉路有向成分の局面を挿入することは無駄な探索をすることになるし、既に存在する強連結成分の局面を挿入すれば閉路を回

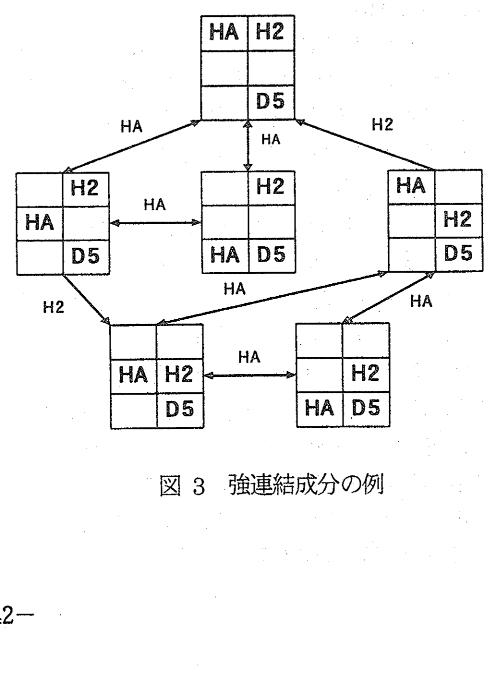

図 3　強連結成分の例

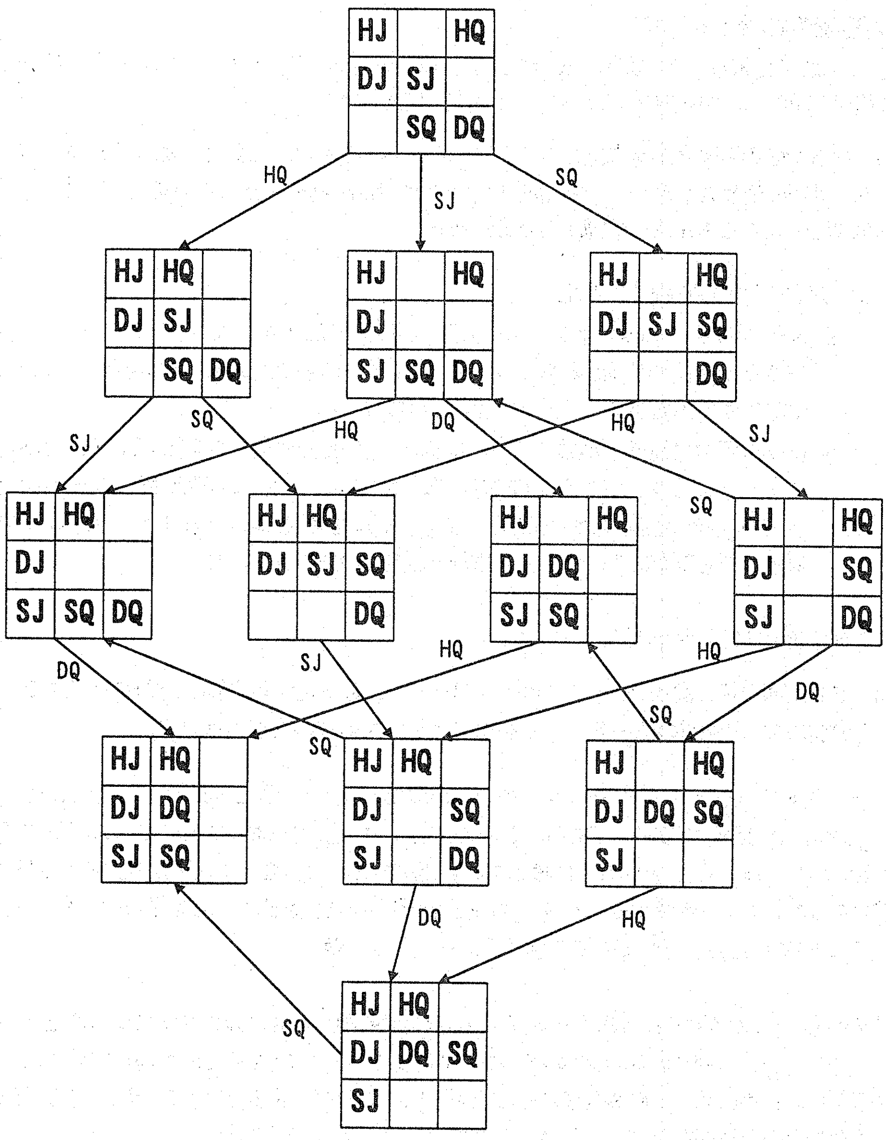

図 4　無閉路有向成分の例

り続けて探索が先に進まないことがわかる。つまり、成功局面に至るためには新しく生成された局面は既にゲーム木の中に存在する局面と比較して同じものがあればゲーム木に挿入しないようにする必要がある。そのためには生成した局面の情報をすべて保持しておけばよいが、現在のパソコンレベルの計算機では実行が難しい。なぜならば、文献［2］によれば 13 列の場合、ゲーム木の節点数は平均で 10^9 個、最大では 10^{10} 個のオーダーと予想されるので、1 カードあたりスートに 2 ビット、数字に 4 ビットとして 1 局面 52 枚のカードでは数十バイトが必要であるとすると、最悪の場合数百 GB 以上のオーダーのデータを保持しなければならないからである。次節以降で、保持すべき局面数を減らすために必要となる局面の状態遷移に関する性質について考察する。

3. 状態遷移に関する性質

スートが、X(=H,D,S,C)で、数字が m(=1,2,…,12)のカードを X_m と表すことにする。スーパーパズの局面から別の局面への状態遷移について、次の性質が成り立つ。

性質 1　ある局面から数字が 2 以上のカード X_m が n(>=1)回移動するためには、その前に X_m の直前のカード X_{m-1} が元の局面で、① X_{m-1} の右隣が X_m でない場合は少なくとも(n-1)回、② X_{m-1} の右隣が X_m である場合は少なくとも n 回、移動する必要がある。

証明：n に関する数学的帰納法による。

1) n=1 の場合、①の場合ルールより X_m が移動するためには、その前に X_{m-1} は移動する必要がなく(0 回の移動が必要)、X_{m-1} の右隣が穴であればよい。②の場合は、まず X_{m-1} が先に移動する必要がある。よって性質 1 は成立する。
2) n=k の場合に性質 1 が成り立つとする。X_m が k 回移動した直後には X_{m-1} は X_m の左隣にある。よって X_m がもう 1 回移動するためにはまず X_{m-1} が先に移動する必要がある。よって X_m が(k+1)回移動するために X_{m-1} は①の場合は(k-1)+1=k 回、②の場合は(k+1)回、移動する必要がある。よって、やはり性質 1 が成り立つ。■

性質 1 から次の性質が導かれる。

性質 2　ある局面から、数字が 2 以上のカードカード X_m が n(≧2)回移動した後に元の局面に戻るためには、その前に X_m の直前のカード X_{m-1} も少なくとも n 回移動する必要がある。

証明：元の局面で、① X_{m-1} の右隣が X_m でない場合にカード X_m が n 回移動するためには、性質 1 により X_{m-1} は(n-1)回移動する必要がある。この時、X_{m-1} は X_m の左隣にあるので元の場所に戻るためにもう 1 回、つまり(n -1)+1= n 回以上は移動する必要がある。② X_{m-1} の右隣が X_m である場合に X_m が n 回移動するためには、性質 1 により X_{m-1} は n 回移動する必要がある。この場合はこれで X_{m-1} も元の場所（X_m の左隣）に戻っているので、性質 2 が成り立つ。■

性質 2 から、ある局面から、あるカード X_m が n(≧2)回移動した後に元の局面に戻ったとすると、X_{m-1}, X_{m-2},… , X_2, X_1 も n 回は移動しているので、特にそのスートの A も n 回移動していることになる。ある局面から何回かのカードの移動後にその局面に戻ることができるということは、その局面に対応する節点を含む有向閉路が存在するということなので、次の定理が成り立つ。

定理 1　ある局面が強連結成分に属するための必要十分条件は、その局面の左端に A と穴が各々少なくともひとつ以上は存在することである。

証明：十分性は明らかなので、必要性について考える。ある局面から何回かのカードの移動によって元の局面に戻ったとする。すると、少なくとも 1 枚以上のカードが 2 回以上移動して元の場所に戻っている。その場合性質 2 によって、そのカードと同じスートの A も同じ回数以上は移動している。ルールによって A の移動は左端に穴がある場合に限られる。また元の位置に戻るために元の局面でその A は左端にある必要がある。■

さらに強連結成分において A 以外のカードが移動する場合について考えると、次の性質が成立する。

性質 3　あるカードX_mがひとつの強連結成分の中で移動するためには、X_mと同じスートで数字が$i(\leqq m)$のカードX_iは左からi列目に存在し、かつその列には穴がひとつ以上存在する必要がある。

証明：mに関する数学的帰納法による。

1) m=1の場合、ルールよりAがある局面から移動して元の場所に戻るためには左端にある必要があり、かつ左端に穴がひとつ以上なければならない。よって性質3は成立する。
2) m=kの場合に性質3が成り立つとする。ルールによりX_{k+1}は常にX_kの右隣に移動する。従って、性質3によりX_kは左からk列目にあるので、X_{k+1}は(k+1)列目にある。かつX_{k+1}の移動のために(k+1)列目に穴がひとつ以上なければならない。よってm=k+1の場合も性質3が成り立つ。■

性質3の証明から直ちに、次の性質が成立する。

性質 4　ひとつの強連結成分の中では、数字が5以上のカードが移動することはない。

証明：ある強連結成分の中で数字が5以上のカードが移動するためには、性質 4 より少なくとも左端から5列目までに各々ひとつ以上穴がなければならない。しかし、「穴が5個以上存在する」ということは「スーパーパズでは穴の数は4である」ことに矛盾する。■

性質4からひとつの強連結成分の中で移動できるカードは数字がA,2,3,4で本来の列（各々左から第1,2,3,4目）にあるものに限られることがわかる。また定理 1 により左端に、A が1枚もないかあるいは穴が全然ない局面は強連結成分には属さないので、無閉路有向成分に属することになる。その中で特にAが4枚とも左端にある局面について考えると、性質1から次の性質が導かれる。

性質 5　Aが4枚とも左端にある局面からは、数字がmのカードは高々(m-1)回しか移動しない。

証明：mに関する数学的帰納法による。

1) m=1の場合、Aが4枚とも左端にあるので、ルールより明らかにAは0回しか移動しない。よって性質5は成立する。
2) m=k の場合に性質 5 が成り立つとする。X_kは高々(k-1)回しか移動しない。よって元の局面で、① X_kの右隣がX_{k+1}でない場合X_kが最初に移動する前にX_kの右隣にX_{k+1}が移動すればX_{k+1}の移動回数は高々(k-1)+1=kであり、それを越えることはない。また② X_{m-1}の右隣がX_mである場合は、X_{k+1}はX_kと同じ回数しか移動できない。よってm=k+1の場合も性質5が成り立つ。■

4. 局面の分類

この節ではスーパーパズの局面を左端にあるAと穴の数で分類して、それらの間の関係をまとめる。左端にあるAの数がi、穴の数がj (i, j=1,2,3,4, $0\leqq i+j\leqq 4$)のものを (i, j)要素成分と呼ぶことにする。すると、(0, 0), (0, 1),..., (3, 0), (3, 1),(4, 0) の15種類の要素成分が存在する。カードを移動して局面が移動した場合、局面が属する要素成分が変わる場合と変わらない場合があることは明らかである。ルールより左端の A はほかの列には移動しないので、各々の要素成分を単位とした状態遷移の様子は図5のように表すことができる。図 5 では、カードの移動によって属する要素成分が変わらない場合の遷移（自己ループに対応する）は省略している。図5の描き方の場合、右斜め下への遷移は A 以外の左

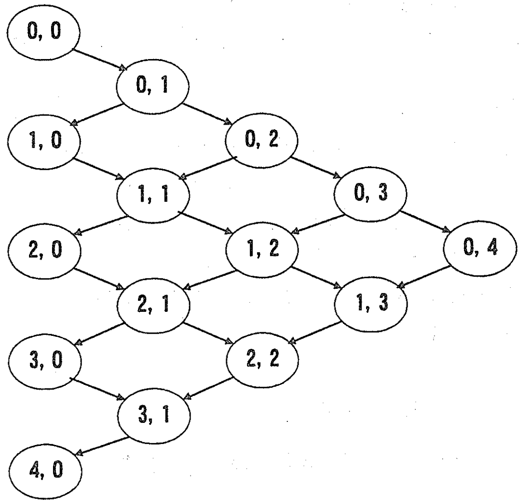

図 5　要素成分に着目した状態遷移図

端のカードが移動して左端に穴が増えた場合に、左斜め下への遷移は A が左端に移動して左端の穴が減った場合に各々対応する。定理１より強連結成分は、

(1, 1), (1, 2), (1, 3),　(2, 1), (2, 2),　(3, 1)

の６つの要素成分のなかにある。残りの

(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4),　(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)

の９個の要素成分は無閉路有向成分を形成する。図５が閉路を含んでいないことは明らかなので次の性質が成立する。

性質 6　ある要素成分から別の要素成分に移動した後は元の要素成分に戻ることはない。

成功局面は(4,0)要素成分に含まれている。また、(4,0)要素成分に属する局面では左端の A は移動できないので、次の性質が成立する。

性質 7　(4,0)要素成分に属する局面から生成される局面は 24 個の互いに素な部分集合に分割される。

証明：左端の A の異なる並び方は 4!=24 通り存在する。それらの各々は、左端の列が異なるので 2 列目以降のカードがどのように移動しても一致することはない。■

ただし、たとえば成功局面はスートの並び順によって 24 通り存在するが、行の交換によって同じ局面をなる場合にそれらを同一視する場合は成功局面は 1 通りしか存在しないことになる。本論文では、それらを別の局面として扱うことにしている。

5. 解の探索への適用

前節の性質 6 からたとえば初期局面が(0,1)要素成分に属する場合は、(0,1)要素成分に属する局面をすべて生成し終えた後に(1,0)と(0,1)要素成分に進めば、それ以後同一局面の重複をチェックするために(0,1)要素成分の局面は保持しておく必要がなくなる。従って、性質 7 も利用すると、スーパーパズの解を探索する場合の方針として次のようなことが考えられる。

方針 1　ある局面の子孫の局面を生成するときに、親局面の属する要素成分と同じ要素成分に属するものをまずすべて生成する。その後に異なる要素成分に進む。

方針 2　方針 1 によって、初期局面から到達可能な(3,1)要素成分に属する局面をすべて生成する。その際(3,1)要素成分の子局面で(4,0)要素成分に属する局面もすべて生成する。

方針 3　方針 2 によって得られた(4,0)要素成分の局面を左端の A の並び順によって 24 の互いに素な部分集合に分割して、別々に解を探索する。

列数が 3 から 6 の場合に、各々100 個の初期局面に対して全探索を実行して各要素成分の割合を計算したものが表 1 である。この表から、(3,1)要素成分と(4,0)要素成分の占める割合が他の要素成分に比べて大きく、特に(4,0)要素成分が過半数を占めることがわかる。また、(4,0)要素成分について、24 個の互いに素な部分グラフの割合を計算したものが表 2 である。表 2 から(4,0)要素成分はほぼ均等に分割されていることがわかる。以上のことより方針 1～3 により、13 列の場合では主記憶中に保持すべき局面数を、低く見積もっても 100%／24(≒ 4%) 程度に減らすことが可能であると推測できる。

表 1　各要素成分の割合 (単位 : %)

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)
3列	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4列	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
5列	1.00	0.01	0.01	0.00	0.00
6列	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00

	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,0)	(2.1)	(2,2)	(3,0)	(3,1)	(4,0)
3列	2.02	0.12	0.16	0.04	3.39	2.96	2.47	6.67	36.46	45.70
4列	1.11	0.41	0.21	0.00	1.39	2.86	0.61	7.41	29.80	56.18
5列	5.05	0.20	0.07	0.00	0.79	1.31	0.25	6.59	23.61	61.11
6列	0.09	0.08	0.02	0.00	0.49	1.15	0.28	4.93	23.89	69.05

表 2　(4,0)要素成分における「左端の A の並び順による部分集合」の割合 (単位 : %)

	HDSC	HDCS	HSDC	HSCD	HCDS	HCSD	DHSC	DHCS	DSHC	DSCH	DCHS	DCSH
3列	4.17	4.13	4.11	4.13	4.12	4.17	4.13	4.12	4.07	4.07	4.11	4.12
4列	4.17	4.21	4.16	4.23	4.16	4.18	4.11	4.16	4.15	4.20	4.16	4.16
5列	4.20	4.23	4.15	4.18	4.19	4.18	4.15	4.18	4.14	4.14	4.17	4.14
6列	4.18	4.15	4.17	4.14	4.17	4.17	4.19	4.15	4.17	4.12	4.16	4.15

	SHDC	SHCD	SDHC	SDCH	SCHD	SCDH	CHDS	CHSD	CDHS	CDSH	CSHD	CSDH
3列	5.18	4.13	4.11	4.07	4.13	4.06	4.15	4.19	4.16	4.15	4.14	4.09
4列	4.10	4.17	4.15	4.20	4.16	4.14	4.13	4.15	4.19	4.18	4.19	4.17
5列	4.16	4.17	4.19	4.18	4.16	4.13	4.17	4.16	4.20	4.16	4.14	4.12
6列	4.20	4.17	4.19	4.14	4.17	4.16	4.18	4.21	4.18	4.18	4.17	4.15

6. あとがき

スーパーパズの状態遷移に関してルールに則した考察を加え、以下のことを明らかにした。

1) スーパーパズの局面は強連結成分と無閉路有効成分のふたつに分けられる。
2) ある局面が強連結成分に属するための必要十分条件は、左端に A と穴が各々ひとつ以上存在することである。
3) ひとつの強連結成分の中で移動可能なカードは数字が A,2,3,4 で本来の列（各々左から第 1,2,3,4 目）にあるものに限る。
4) 成功局面が存在する可能性がある A がすべて左端にある無閉路有向成分は 24 個の互いに素な部分グラフに分割できる。

これらの結論と列数 3～6 の場合の探索結果から 13 列の場合でも主記憶中に保持すべき局面数をすべての局面を保持する場合と比べて 4%以下に減らすことができる可能性が高いことを示した。2.2 節で述べたように、13 列の場合の平均節点数が平均で 10^9 個、最大では 10^{10} 個のオーダーとすると、平均の場合では必要な主記憶容量が 2～3 GB 程度でよいことになる。この程度の主記憶容量でよいのであれば、現在のパソコンレベルの計算機でも 13 列の場合の解の完全探索が実行可能であると考えられる。

今後、スーパーパズでゲーム木の節点の大部分を占める「A がすべて左端にある局面」で効果的な枝刈りが可能かどうかを検討していきたい。

文献

[1] 南雲，GPCC ウルトラナノピコ問題 フットステップとスーパーパズ，bit，Vol.23，No.5，共立出版，1991
[2] 新谷，スーパーパズを解くプログラム，ゲーム・プログラミングワークショップ '99 情報処理学会シンポジウム論文集，Vol.99，No.14，pp84-91，1999