音楽情報科学 44－8
（2002．2．16）

楽器における連成振動（その２）－ピアノの場合－

高澤　嘉光[†]　　森　太郎[‡]　　徳弘　一路[*]
takasawa@ice.uec.ac.jp　mori@ias.tokushima-u.ac.jp　tokuhiro@ic.kanagawa-it.ac.jp
[†]電気通信大学 情報通信工学科
[‡]徳島大学総合科学部 音響環境研究室
[*]神奈川工科大学 情報工学科

内容梗概：連成振動とは，同一あるいは非常に近い振動数を有する振動系の間に初期振幅，すなわち初期エネルギーの差があった場合，互いにエネルギーを移動しながら振動する現象である．このような現象は楽器において数多く存在しているが，ピアノの場合２種類ある．一つは１本の弦における垂直・水平の２方向間，もう一つは複弦間のものであるが，この２つは「和」と「差」の演算によって互いに変換できる関係になっている．連成振動では，２つの振動系の減衰率の差が大きい時に大き振動系は「2段減衰」になる．本稿では，これらのことを理論的に述べ，「ミスチューニング」から「パーフェクト・チューニング」への移行のメカニズムを解明する．またそれに対する実験計測結果も示す．

キーワード：連成振動，弦，うなり，２段減衰，重合わせの原理，２次元運動，ミスチューニング，パーフェクト・チューニング

On the Coupling Vibration in Music Instruments(the second report) – in a Case of Pianos –

TAKASAWA Yoshimitsu[†]　MORI Tarou[‡]　TOKUHIRO Ichiro[*]
takasawa@ice.uec.ac.jp　mori@ias.tokushima-u.ac.jp　tokuhiro@ic.kanagawa-it.ac.jp
[†]University of Electro-Communications
[‡]The University of Tokushima
[*]Kanagawa Institute of Technology

Abstract: When there is a difference of their initial amplitudes or energies among two or some vibration systems of which vibration numbers are same or similar, these systems exchange their energies each other. We call this phenomenon "coupling vibration". In musical instruments, there exist many kinds of coupling vibration. In pianos, there exist two; the first is the coupling between two perpendicular directions, the second is the coupling between two or three strings. These two have the relation of a "addition" and "subtraction" transformation. In a coupling vibration, if the difference of decay rate is large, the vibration of the greater decay rate has "multi-rate decay". In this paper, we discuss this phenomenon theoretically, present the mechanism of a transition from "mistuning" to "perfect tuning", and show the experiment data.

key words: coupling vibration, string, beat, multi rate decay, the principle of superposition, two dimensional motion, mistuning, perfect tuning

物理変数

弦に関するもの

L： 弦長

T： 張力

μ： 単位長当りの質量

m_s： 全長の質量 $m_s = \mu L$

c： 振動の伝播速度 $c = \sqrt{T/\mu}$

b： 振動の内部抵抗による減衰率

B： 響板の振動に起因する減衰率

f_s： 基本周波数 $f_s = c/2L$

ω_n： 第n固有振動の角速度 $\omega_n = 2\pi n f_s$

$\Delta\omega$： 響板の振動の影響によるω_nの増減

響板に関するもの

M： 質量

K： バネ定数

R： 抵抗

Q： Q値 $Q = \sqrt{MK}/R$

ω_b： 共振角速度 $\omega_b = \sqrt{K/M}$

f_b： 共振周波数 $f_b = \omega_b/2\pi$

両者に関するもの

σ： f_bとf_nの比 $\sigma = f_b/f_n$

§1 はじめに

弦の振動は一見単純そうに見えるが，その振る舞いを理論的に解析しようとすると実に様々な問題がある．その中で「弦の2次元的な運動」と「ピアノ弦の2段減衰」は，弦振動の研究が始まった1950年頃から研究の対象になっていた[1][2]．その代表的な研究として，前者に対しては，G.V.Anand[3]やColin Gough[6]の，後者に対しては，G. Weinreich[4]やT.C.Hundleyら[5]の研究を挙げることができる．Anandは，弦の振幅が大きい時の回転は非線形性によるものであるとして弦振動の3次元振動モデルの式を導出し，各倍音の軌跡は楕円が回転する，いわゆる「歳差運動」であることを示した．さらに，Colin Goughは，G.V.Anandの理論は不完全であるとし，コリオリの力や遠心力を加味して，歳差運動の際の楕円率と回転速度との関係を示した．一方，G.Weinreich[4]は，ピアノ弦の2段減衰は2〜3本の弦振動の周波数間での微妙な違いによって生じると述べ，その理論式を示し，その周波数の違いを「ミスチューニング(mistuning)」と名付けた．さらに，T.C.Hundleyらは2段減衰発生の原因となる可能性のある要因を網羅し，やはり垂直振動間の連成によるものであると述べ，それを電気回路で説明した．また，中村[7]も電気回路のシミュレーションによりミスチューニング説に対する理論式を示した．

弦の2次元運動に対して，著者らはいろいろな状況下で弦を大きく振幅させてその運動をピエゾ素子を用いた測定器で2次元的に計測してみたが，G.V.Anandらが述べている歳差運動による楕円の回転は弦を大きく振動させた時にのみ現れ，しかもその回転は90°にも未たず，すぐに後述するリサージュ図形を描くような運動になってしまった[11]．このことは田中ら[10]も光素子を用いた計測器によって観測している．

ここで述べた「弦の2次元運動」と「ピアノ弦の2段減衰」は，これまで別個の問題として考えられて来たが，これらは「1本弦の2段減衰」および「うなり現象」も含めて「連成振動」の理論で統一的に説明することが出来る．連成振動とは，同一あるいは非常に近い振動数を有する振動系の間に初期振幅，すなわち初期エネルギーの差があった場合，互いにエネルギーを移動しながら振動する現象である．連成振動において重要なことは，2つの振動系の本来の振動数が全く同じであって両者間にエネルギーの差があれば連成振動が励起され，その結果として振動数に差が現れることである．さらに連成振動では，その振動の減衰率間の差が大きくなると減衰率の大きな振動のエレルギーが小さなものの方へ急速に移動され，それ以降はエレルギーの交換は行われない．これは一般に「2段減衰」と呼ばれている．本稿では,「弦の2次元運動」から「ピアノ弦の2段減衰」までを連成理論により統一的に述べ，1本弦の2段減衰と2本弦による2段減衰とは,「和」と「差」の演算により互いに変換できることを示し,「ミスチューニング」から「パーフェクト・チューニング」への移行の理論的メカニズムについて説明する．また，それらに対する実験計測ならびにシミュレーション結果を示す．

§2 響板の振動が弦振動に及ぼす影響

連成振動において2つの振動の減衰率の差が重要な意義を持つ．実際にピアノやギターや三味線などにおいて響板や共鳴膜に垂直な振動は水平方向の振動と比べてその減衰率は非常に大きい．ここでは，響板の振動，すなわちその質量的，バネ的，抵抗的な3つの物理特性によって弦振動の周波数と減衰率がどのように影響されるかを算出する公式[14]を示す．

弦振動の方程式は，高い次数の固有振動を考慮しないと仮定すれば次のように表すことができる．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial y}{\partial t} \tag{1}$$

弦の一端は固定され，他の一端は響板と共に振動するものとすれば，境界条件は次のようになる．

$$y = 0, \quad at\ x = 0 \qquad (2-1)$$

$$-T\frac{\partial y}{\partial x} = M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R\frac{\partial y}{\partial t} + Ky, \quad at\ x = L \qquad (2-2)$$

この時，響板の振動によって角速度および減衰率が変化する量は次のように表される．

$$\Delta\omega = 2\frac{m_s}{\pi M}\frac{f_s}{n}\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2/Q^2 + (1-\sigma^2)^2} \qquad (3-1)$$

$$B = 2\frac{m_s}{\pi M}\frac{f_s}{n}\frac{\sigma}{\sigma^2/Q + Q(1-\sigma^2)^2} \qquad (3-2)$$

さらに，次のようにも表すことができる．

$$\Delta\omega = \omega_n\frac{m_s}{(\pi n)^2 M}\frac{Q^2(1-\sigma^2)}{\sigma^2 + Q^2(1-\sigma^2)^2} \qquad (4-1)$$

$$B = \omega_n\frac{m_s}{(\pi n)^2 M}\frac{Q\sigma}{\sigma^2 + Q^2(1-\sigma^2)^2} \qquad (4-2)$$

図１および**図２**は下のデータを用いて角速度および減衰率が響板の共振周波数と弦の固有周波数の比であるσに対してどのように変化するかを描いたものである．これらの図から，２つの周波数が近づくと角速度も減衰率もともに変動量が大きくなるが，その両者の絶対量はほぼ同じであることが分かる．この例では角速度は3.0，減衰率は5.0であるが，角速度を周波数に変換すれば0.48Hzになり，これは実質的にはそれ程大きな影響を与えるとは言えない．これに対して減衰率が5.0増大することは振動が毎秒$\exp^{-5} = 1/148$の割合で小さくなることであり，これは弦振動においては重大な影響である．したがって，響板が振動することによる影響は，減衰率に大きく現れる．

弦（D＃１音　基本周波数　$f_s = 38.89$Hz）
　弦長$L = 1.244$m，線密度$\mu = 0.1289$kg/m
　張力$T = 1206$N，　周波数比$f_b/f_s = 1.093$
響板（共振周波数$f_b = 42.5$Hz）
　有効質量$M = 6.3$kg，Q値$Q = 7.6$

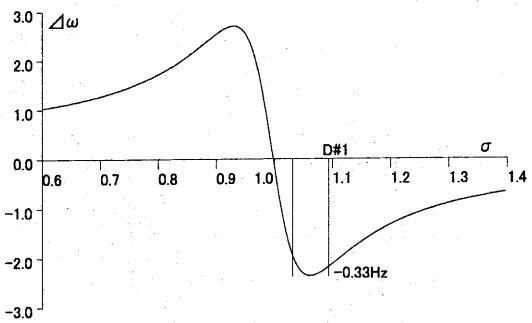

図１　周波数の比率σと角速度変動$\Delta\omega$との関係

§３　１本弦における連成現象

連成現象とは，２つの振動系が互いにエネルギーを交換し合いながら振動することである．一般に，２次元的な弦の振動は，直交する２方向の独立した振動系y_1とy_2によって合成されたものであると考えることができる．ここで，それらは単独の場合に，式(1)で表されるとすれば，この弦振動における連成現象は次の数式モデルで表すことができる．

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \gamma_{12}c^2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - 2b_1\frac{\partial y_1}{\partial t} \qquad (5-1)$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \gamma_{21}c^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - 2b_2\frac{\partial y_2}{\partial t} \qquad (5-2)$$

ここでγ_{12}とγ_{21}は連成係数である．この数式モデルは，張力による復元力が互いに影響し合っていることを意味している．ここで弦長をLとし，境界条件を固定端とすると，次式のように固有振動$\sin(n\pi\frac{x}{L})$により変数分離ができる．なお以下の式において，f_sを基本周波数として，$\omega_n = n\pi\frac{c}{L} = 2\pi f_s\ n$とする．

$$y_1(x,t) = z_1(t)\sin(n\pi\frac{x}{L}) \qquad (6-1)$$

$$y_2(x,t) = z_2(t)\sin(n\pi\frac{x}{L}) \qquad (6-2)$$

この式を(5)に代入し，境界条件を考慮すると，次の式を得る．

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + 2b_1'\frac{dz_1}{dt} + \omega_n^2 z_1 + \gamma_{12}\omega_n^2 z_2 = 0 \qquad (7-1)$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} + 2b_2'\frac{dz_2}{dt} + \omega_n^2 z_2 + \gamma_{21}\omega_n^2 z_1 = 0 \qquad (7-2)$$

この結果，式(5)によって表される弦の振動は，それを構成する固有振動に分離して個々に考えることができることが示された．

さて，前節で示したように響板に垂直な振動による周波数や減衰率の変化の絶対量はほぼ同じであるが，相対量として見れば前者は微小であるのに対して，後者は非常に大きい．ここで，式(7)の振動系z_1(系１)

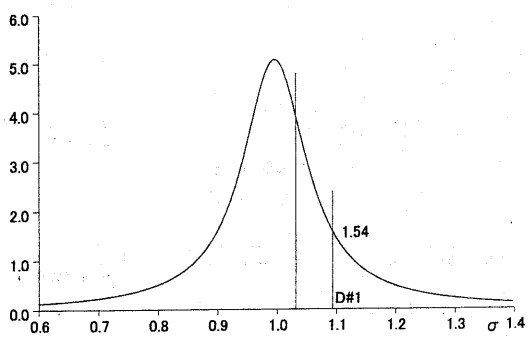

図２　比率σと響板に起因する減衰率Bの関係

を水平方向に，振動系z_2(系２)を垂直方向に取れば，系２の減衰率b_2'を響板の振動の影響を受けたBに置き換えることができる．一方，系１の減衰率b_1'を弦の内部抵抗に起因するbにする．このように２つの連成振動系において，両者の減衰率に差がある場合，その減衰率と周波数は次のようになる[8].

なお，ここで，$\gamma^2 = \gamma_{12}\gamma_{21}$とし，$\omega_n$を$\omega$と簡略する．さらに，$B > b$である．

(1) $B - b < \gamma\omega$ の時

$$b' = B' = \frac{b+B}{2} \qquad (8-1)$$

$$\omega_1' = \omega\sqrt{1-\gamma^4/4} + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2\omega^2 - (B-b)^2} \qquad (8-2)$$

$$\omega_2' = \omega\sqrt{1-\gamma^4/4} - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2\omega^2 - (B-b)^2} \qquad (8-3)$$

(2) $B - b > \gamma\omega$ の時

$$b' = \frac{b+B}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(B-b)^2 - \gamma^2\omega^2} \qquad (9-1)$$

$$B' = \frac{b+B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(B-b)^2 - \gamma^2\omega^2} \qquad (9-2)$$

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega\sqrt{1-\gamma^4/4} \qquad (9-3)$$

(3) $B - b = \gamma\omega$ の時

$$b' = B' = \frac{b+B}{2} \qquad (10-1)$$

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega\sqrt{1-\gamma^4/4} \qquad (10-2)$$

ここで，$f = 250\text{Hz}$,$\omega = 2\pi f$, $\gamma = 0.001$ に設定し，$B - b$を変数にして，減衰率と周波数の増減の様子を描いたグラフを**図３**に示す．

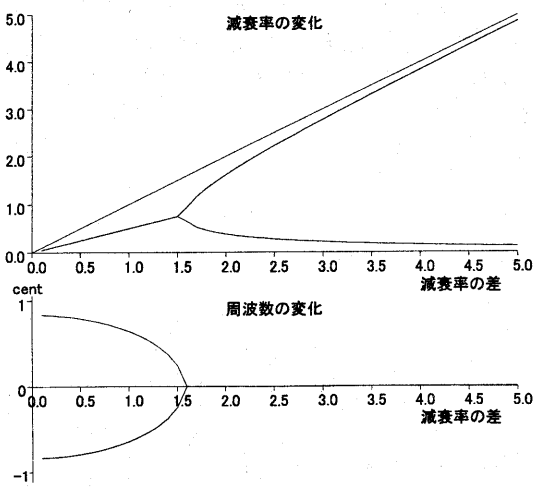

図３　減衰率の差による減衰率と周波数の変化

§４　弦の２次元運動

弦は何故２次元運動をするのか? これはG.V.Anand[3]らの非線型理論を持ち出さなくても非常にかんたんに説明することができる．弦や響板などあらゆる振動体の振動は，固有の振動数を有する固有振動から構成されている．一般に楽器では，ほとんどの場合その振幅は振動体の大きさに比べて非常に小さいので線型性が成り立ち，各振動モードは互いに独立である．したがって,「重合わせ(superposition)の原理」が成り立ち，その振動は各固有振動毎に分けて考えることができる．さらに弦の場合には，一つの固有モードの振動は，互いに直交する２方向の振動系の合成になっている．ここで，２つの座標系を**図４**のようにy軸とz軸とする．しかし，実際の弦振動においては，この座標系は必ずしも響板に垂直あるいは水平ではなく響板面に対して回転角を有しており，しかもその回転角は各振動モード毎に異なっていることを強調しておく．

弦の２次元運動はこの直交する２つの座標系で振動数が異なることに起因する．しかし，この振動数が異なる原因として２つのことが考えられる．１つは，この２つの振動系は独立であり，元から振動数が異なっている場合であり，もう１つは２つの振動系が連成している場合であるが，この両者で２次元運動の様子が異なる．そこで，まず２つの振動系が独立している場合から考えてみる．２つの振動系の初期振幅をaとbとし，また周波数をf_aとf_bとすると，この２つの振動系によって合成される振動は次のようになる．なお，ここでは減衰はないものとする．

$$y(t) = a\cos(2\pi f_a t) \qquad (11-1)$$

$$z(t) = b\cos(2\pi f_b t) \qquad (11-2)$$

もし，$f_a = f_b$であれば，この振動の方向は永久に図４(a)におけるABである．ところが，２つの周波数に$f_b = f_a + \delta f$のように微小差があった場合，式(1)は次のようになる．

$$y(t) = a\cos(2\pi f_a t) \qquad (12-1)$$

$$z(t) = b\cos(2\pi f_a t + 2\pi\delta t) \qquad (12-2)$$

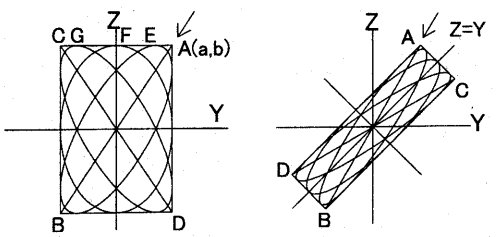

図４　２次元運動(a)独立系の場合　(b)連成系の場合

この振動はδが微小であるので，その軌跡は$t=0$に近い時はほぼ直線ABに一致するが，$t=1/(8\delta), 1/(4\delta), 3/(8\delta)$のように時間が経過すると，次々とE→F→Gの楕円になり，$t=1/(2\delta)$において直線CDに一致する．さらに，時間とともにG→F→E→ABと再び直線ABになる．このように２つの振動数に差があれば，その軌跡は直線ABとCD間を往復し，その途中は四角形ADBCに４点で内接する楕円になる．式(12)によって描かれる軌跡はリサージュ図形と呼ばれている．

連成系に対しては，２次元運動は図４(b)のように対称軸を直線z=yとするリサージュ図形になり，打弦方向が同じであっても，回転方向は独立系と逆になる．

さて，実際の弦振動を測定する場合，その振動系と初期振幅と測定系の間の関係は独立系においては**図５**のようになる．なお，初期振幅は撥弦の場合であるが，打弦の場合には矢印のように打弦方向が与えられる．通常，測定系は響板に垂直な方向と水平な方向か，あるいはそれに対して４５度回転した方向で行われる．後者の場合，それらの和と差を$\sqrt{2}$で割ったものは響板に垂直な方向と水平な方向の値になる．さらにピアノの場合には**図６**のように打弦方向が響板に垂直になっている．田中らが測定した２次元振動の図(Fig.7[10])の振動系の軸は図６のように約10度時計方向に回転したものになっており，そのシミュレーション結果の図(Fig.9[10])はこの回転した座標系の上でリサージュ図形を描かない限り得ることはできない．

ここで「うなり」と２次元運動との関係について考察する．「うなり」とは振幅が変化することによって生じるが，その「深さ」あるいは「明瞭度」は振幅の最小値をa_1，最大値をa_2とした場合$1-a_1/a_2$によって定義することができる．実際の「深さ」は弦の２次元振動の軌跡のみによって決まるものではなく，測定方向も加わる．図４の場合，振動はAB⇔CDの往復運動であるが，これを響板に垂直な方向から見るとその振幅の変化はほとんどなく，そのため「うなりの深さ」は非常に小さい．しかしABに垂直な方向からは振動がABに一致した時には振幅は0になり，したがってその深さは1になり，「うなり」は明瞭に現れることになる．音は響板方向に働く振動によって発生することから，音圧における「うなり」は２次元運動を響板方向から測定した時に現れる「うなり」に一致する．

さて，弦の２次元運動は，２つの振動系が独立している場合と連成している場合とでその発生の要因が異なる．発生要因の１つとして直交する２つの座標系の振動数が異なっていることが必要であるが，独立系では元から振動数が異なっている必要があり，発生してもその周波数に変化はない．これに対して連成系では振動数は異なっている必要がない．発生すれば振動数が異なって来る．もう１つの発生要因である初期振幅(エネルギー)に関しては，独立系では２つの系がともに初期振幅を有している必要があり，もし一方が0であれば直線運動になる．２次元運動が一番大きくなるのは２つの初期振幅が等しい時である．これに対して連成系では初期振幅に差があることが必要である．したがって，両方の初期振幅が等しい時には連成振動は起こらず直線運動になる．２次元運動が一番大きくなるのはどちらかの系の振幅が0の時である．このことから図４の座標系を用いて言えば，独立系ではy軸とz軸が節になり，直線z=y，z=-yが腹の方向になり，連成系では直線z=y，z=-yが節になり，y軸とz軸が腹の方向になる．

では，現実の弦においてはどちらの系で２次元運動が起こっているのであろうか．ここで重要なことは現実の弦振動では第１節で示したように響板に垂直方向の振動の減衰率が水平方向のものに比べて非常に大きいことである．このような場合，独立系においては最初のうちは２次元運動を行うが時間の経過と共に減衰率の大きい振幅がなくなり，直線運動になってしまう．これに対して連成系においては図３からも分かるように，減衰率の差が$B-b=\gamma\omega$を境として，２次元運動の状況が大きく違っている．その差が$\gamma\omega$より小さい時には，２つの振動系の減衰率がともに両者の平均になる．この時，減衰率の大きな系のみに振動を励起した場合の２つの振動系の減衰の様子を$b=0.1$，$B=0.5$

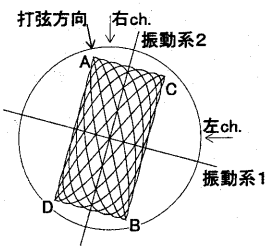

図５　振動系と初期振幅と測定系の間の関係

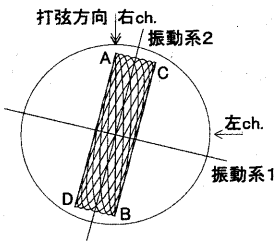

図６　打弦方向と測定軸が一致

として描くと**図7**のようになる．２つの振動は同じ減衰率で小さくなるため，最初の２次元運動の形状が変化することはない．これに対して，減衰差が$\gamma\omega$より大きい時には，２つの振動系の減衰率が異なり，その差が大きくなるに従ってそれぞれ本来の減衰率に近づく．この時の２つの振動系の減衰の様子を$b=0.1$，$B=3.0$として描くと**図8**のようになり，減衰率の大きい系２が最初急激に減衰するが，その振幅が一旦0になった後振幅を少し回復し，その後はゆっくりと減衰していることが分かる．これは，まさに２段減衰である．また，この減衰の様子を２次元的に表したものが**図9**である．最初，垂直方向のみに振動しているが，すぐに減衰し，それとともに水平方向の振動が大きくなって来る．垂直振動の減衰率は，それが0になる時点までほぼその固有の減衰率Bである．しかし，その後は水平方向のゆっくりとした減衰率bで減衰して行く．

図１０は，一端が駒を通して響板に固定された弦を響板に垂直な方向に打弦した時の振動を，駒に装着したピエゾ素子で測定した結果であり，固有振動(部分音)のうち低い方から５個の減衰の様子を示したものである．その中で第４固有振動は図７の「うなり」に，また第２固有振動は図８の「２段減衰」になっている．このように同じ固有振動でも全く異なる減衰の様子を呈していることは，まさにこの弦振動は連成振動であることを示している．

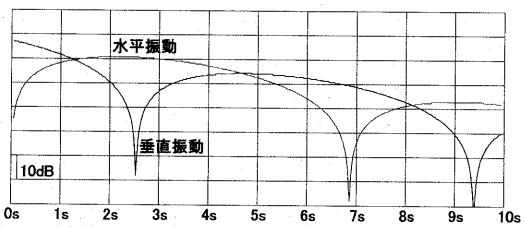

図7　減衰率の差が小さい時の減衰(数値結果)

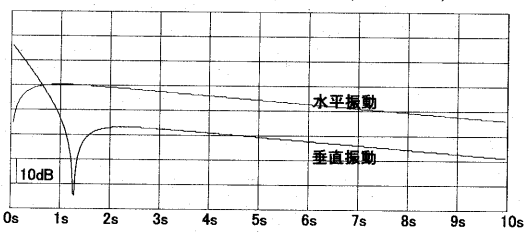

図8　減衰率の差が大きい時の２段減衰(数値結果)

なお，図７のように減衰率の差が小さい場合，式(8)から周波数が低下するのは振動系２の方であることが分かる．すなわち，減衰率の大きな垂直振動の方が低下するが，これは弦振動の実測結果とも一致する．

§５　２本弦による連成振動

複数弦の振動周波数間に違いがある場合，響板に垂直方向の２つの振動の連成によって２段減衰が起こるが，そのメカニズムを連成理論を用いて説明する．

響板上の駒にその一端が固定された弦の響板に垂直方向の振動の強さが関数$z(t)$で表されるならば，響板の振動に起因する弦の減衰項は$B\frac{dz}{dt}$になり，その減衰率Bは式(3)あるいは式(4)で表される．したがって，２本の弦が同時に振動する場合には，その振動の強さの関数をz_1とz_2とすれば，２本の弦の減衰項はともに$B\frac{d(z_1+z_2)}{dt}$になる．このことから，２本の弦の垂直振動の連成モデルは次式で表すことができる．ここで，ω_1およびω_2は，弦振動の角速度であり，それらの間に比率δの差がある．なお，弦の内部抵抗による減衰率bはBに比べて非常に小さいので省略した．

$$\omega_1=(1-\frac{1}{2}\delta)\omega,\quad \omega_2=(1+\frac{1}{2}\delta)\omega \qquad (13)$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2}+2B\frac{d}{dt}(z_1+z_2)+\omega_1^2z_1=0 \qquad (14-1)$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2}+2B\frac{d}{dt}(z_1+z_2)+\omega_2^2z_2=0 \qquad (14-2)$$

この式は，２本の弦はその減衰率，あるいはエネルギー消失率の項を通して連成していることを意味している．ここで，(14-2)－(14-1)および(14-2)＋(14-1)を求めると次のようになる．

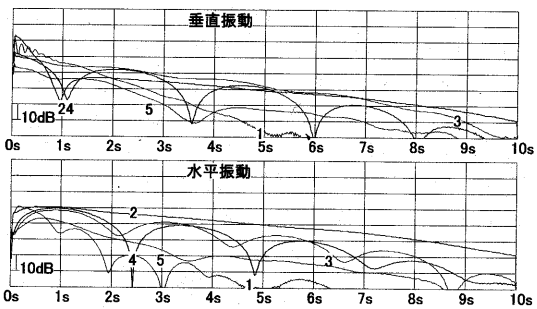

図１０　響板を有する弦振動の減衰(実測結果)

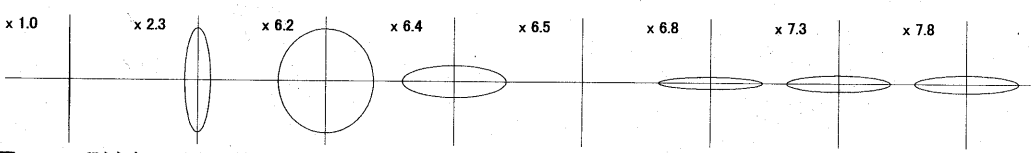

図9　２段減衰の２次元的表示(左肩の数は倍率)

$$\frac{d^2(z_2-z_1)}{dt^2}+\omega_2^2 z_2-\omega_2^1 z_1=$$

$$\frac{d^2(z_2-z_1)}{dt^2}+\omega^2(1+\frac{1}{4}\delta^2)(z_2-z_1)+\delta\omega^2(z_2+z_1)=0 \qquad (15-1)$$

$$\frac{d^2(z_2+z_1)}{dt^2}+4B\frac{d}{dt}(z_1+z_2)+\omega_2^2 z_2+\omega_2^1 z_1=$$

$$\frac{d^2(z_2+z_1)}{dt^2}+4B\frac{d}{dt}(z_2+z_1)$$

$$+\omega^2(1+\frac{1}{4}\delta^2)(z_2+z_1)+\delta\omega^2(z_2-z_1)=0 \qquad (15-2)$$

ここで，変数変換$\xi_1=z_2-z_1$，$\xi_2=z_2+z_1$を行う．また，$\delta^2/4$は1に比べて非常に小さいので省略することができるので，式(15)は次のようになる．

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2}+\omega^2\xi_1+\delta\omega^2\xi_2=0 \qquad (16-1)$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2}+4B\frac{d}{dt}\xi_2+\omega^2\xi_2+\delta\omega^2\xi_1=0 \qquad (16-2)$$

この式は１本弦における水平方向と垂直方向の連成振動の式(7)に対応しており，連成係数はδであり，また$\xi_1=z_2-z_1$は水平振動に，$\xi_2=z_2+z_1$は垂直振動に対応している．ここでは，ξ_1の減衰率は0である．すなわち，全く抵抗を受けることはない．これに対してξ_2の減衰率は2Bと２倍になっている．したがって，式(8)〜(10)と$\delta^4\ll 1$とから次の式が導出される．

(1) $\delta\omega>2B$ の時

$$b'=B'=B \qquad (17-1)$$

$$\omega_1'=\omega+\sqrt{\delta^2\omega^2/4-B^2} \qquad (17-2)$$

$$\omega_2'=\omega-\sqrt{\delta^2\omega^2/4-B^2} \qquad (17-3)$$

(2) $\delta\omega\leq 2B$ の時

$$b'=B-\sqrt{B^2-\delta^2\omega^2/4} \qquad (18-1)$$

$$B'=B+\sqrt{B^2-\delta^2\omega^2/4} \qquad (18-2)$$

$$\omega_1'=\omega_2'=\omega \qquad (18-3)$$

２本の弦の振動数の違い，すなわち「ミスチューニング度」である$\delta\omega$が大きい時の振動の減衰の様子は図７と，また小さい時は 図８と同様になるが，ここで改めて**図１１**に示す．太線は$\xi_2=z_2+z_1$，すなわち，響板に垂直な方向の2つの振動の和を表し，細線は$\xi_1=z_2-z_1$を表す．図１１ならびに式(16)から，１本弦の垂直と水平方向の振動と２本弦の個々の垂直振動との対応は**図１２**のように表すことができ，座標系が４５度回転した関係になっていることが分かるが，これは座標変換$\xi_1=z_2-z_1$，$\xi_2=z_2+z_1$から当然のことである．

ここで2段減衰が現れる場合，２本弦の周波数ならびにその位相差がどのように変動するかについて考察する．図１１において振動が励起された瞬間P1では振

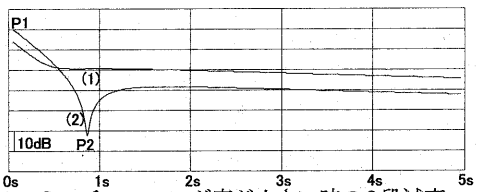

図１１　ミスチューニング度が小さい時の２段減衰

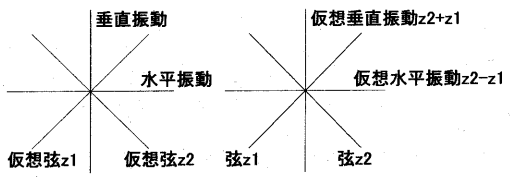

図１２　１本弦の振動と２本弦の振動の対応関係

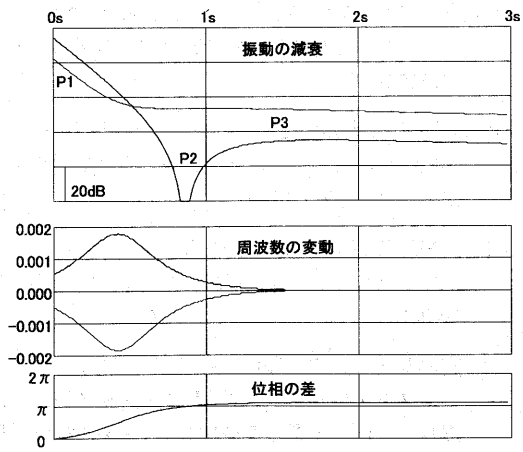

図１３　２段減衰における周波数と位相の変動

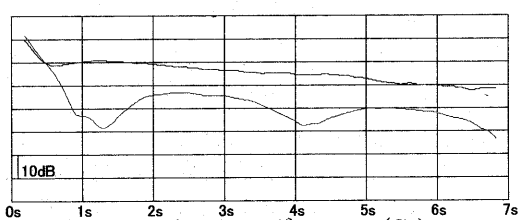

図１４(a)　ミスチューニング　1cent（C4）

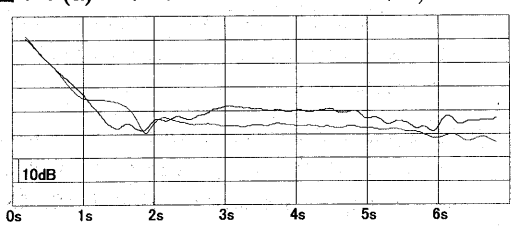

図１４(b)　パーフェクト・チューニング（C4）

動の位相は完全に同じである．すなわち，位相差は0である．しかし，点P2では逆位相になり，２本弦の変位は逆方向になっている．この時の位相差はπである．この例では，$\delta = 0.001$，$\omega = 2\pi \times 250$であるので，単純にP2での位相差を計算すると0.5πにしかならない．そこで，２本の弦の周波数の変動と位相差を計算し，図示してみると**図１３**のようになる．この図から，２つの垂直振動による連成現象に関して非常に興味深いことが分かる．振動が励起された瞬間から暫くの間２本の弦のうちの一方の周波数が急速に高く，他方は低くなり，その差が大きく開いてしまう．その後はゆっくりと元の周波数に近づいて，最後は一致してしまい，励起された瞬間に存在していた周波数の差がなくなってしまう．一方，周波数の差が蓄積（積分）されたものが位相差であるが，図から分かるように点P2においてそれはπ，すなわち完全に逆位相になり，さらに少し通り越して周波数差が0になった時点で，位相差は定着してしまう．したがって位相差による「うなり」は生じなくなる．

２本弦の垂直振動による２段減衰においてその周波数の違い，すなわち「ミスチューニング度」が小さくなると，当然のこととして逆位相に成るまでの時間が長くなる．したがって垂直振動によるエネルギー減少量が多くなる．このような時，エネルギーの減少を防ぐために１本弦の２段減衰，すなわち我々がこれまで述べてきた「パーフェクト・チューニング」[13][14]が起こるのではないかと図１２の対応関係から推測することが出来る．その切り替わりは，２本弦の周波数の差δと１本弦の水平と垂直振動の連成度γが等しくなった時$\delta = \gamma$であろう．別の言い方をすれば，２種類の２段減衰のうちエネエルギー損失の少ない方が現れる．**図１４**はこのことを示している．この図は，実際にグランドピアノ (Steinway model D serial No.359570) において２本の弦の周波数差を小さくして行った時の測定結果である．その差が１cent，すなわち$\delta = 0.0006$の時までは図１４(a)の「ミスチューニング」であったものが，それより小さくなると図１４(b)の「パーフェクト・チューニング」になってしまった．

６．おわりに

連成振動はエネルギーの消費を少なくするという観点から考えるとその生成が理解しやすい．まさに「ミスチューニング」から「パーフェクト・チューニング」に移る過程はその一例である．さらに，連成振動は楽器の音を長引かせたり，響かせたりする働きをしていると思われるが，これは今後の研究課題である．

参考文献

[1] D.W.Martin, Decay rates of piano tones, J. Acoust. Soc. Am. **19**, 535-541(1947).

[2] Henry Harrison, Plane and Circular Motion of a String, J.Acoust.Soc.Am. **20**, 874(1948).

[3] G.V.Anand, Large-Amplitude Damped Free Vibration of a Stretched String, J.Acoust.Soc.Am. **45**(5), 1089-1096(1969).

[4] G. Weinreich, Coupled piano strings, J. Acoust. Soc. Am. **62**(6), 1474-1484(1977).

[5] T.C.Hundley, H.Benioff, D.W.Martin, Factors contributing to the multiple rate of piano tone, J. Acoust. Soc. Am. **64**(5), 1303-1309(1977).

[6] Colin Gough, The nonlinear free vibration of a damped elastic string, J.Acoust.Soc.Am. **75**(6), 1770-1776(1984).

[7] I.Nakamura, Fundamental theory and computer simulation of the decay characteristics of piano sound, J. Acoust. Soc. Kpn.(E)**10**, 289-297(1989).

[8] 坪井忠二, 振動論, 現代工学社(1942).

[9] 柳沢猛, 森岡幹夫, 中村喜十郎, 三木達哉, 響板の影響をうけるピアノ弦の部分振動の減衰率, 日本音響学会誌 **40**-1,2-9(1984).

[10] 田中秀幸, 永井啓之亮, 水谷孝一, ピアノ弦の２次元振動測定, 日本音響学会誌**56**-3, 148-155(2000).

[11] 高澤嘉光, 徳弘一路, 一本弦における連成振動について, 日本音響学会音楽音響研究会資料 **MA00**-57(2000).

[12] 高澤嘉光, 大井聖也, 徳弘一路, 弦振動において境界条件が連成運動に及ぼす影響, 音楽音響研資料 **MA2001**-8(2001).

[13] 高澤嘉光, 森太郎, 徳弘一路, ピアノにおけるパーフェクト・チューニング, 音楽音響研資料 **MA2001**-19(2001).

[14] 高澤嘉光, 森太郎, 徳弘一路, ピアノにおけるパーフェクト・チューニング(第２報)–境界条件が弦振動に及ぼす影響と連成振動–, 音楽音響研資料 **MA2001**-46(2001).