コンピュータと教育　19−17
（1991．11．16）

問題演習支援システムPASにおける問題分類と問題演習支援機能

平嶋 宗　柏原 昭博　豊田 順一
大阪大学　産業科学研究所

本稿では，ＩＴＳにおける問題演習支援の高度化を指向した算数の文章題の体系的整理と，その整理に基づいて設計された問題演習支援機能について述べる．ツルカメ算等の算数の文章題は，それぞれ固有の数量関係を含んでおり，この数量関係によって各算数の文章題を定義した．さらに，同様な数量関係を含んだ問題の分類を，問題よりその数量関係を生成するために必要な操作，扱われている数量の性質，数量の付属している概念的意味によって行った．また，それぞれの問題に対する解法は，数量関係の算術的な解決方法として定義した．この問題分類に基づいて設計・開発中である問題演習のための出題機能と問題間対応付け機能についても述べる．

Classification of Arithmetical Word Problems and Support Facilities for Exercising in ITS

Tsukasa HIRASHIMA　Akihiro KASHIHARA　Ju'ichi TOYODA

I.S.I.R., Osaka Univ.

This paper describes classification of arithmetical word problems and support facilities for problem exercising in ITS. Each arithmetical word problems, such as crane-turtle problems, can be characterized by numerical equations included in them. We classify these problems by using the numerical equations. Problems which include same numerical equations are classified by necessary operations to make the equations and continuity of numerical value in the numerical equations. Based on the classification, we are developing setting facilities of arithmetical word problems and corresponding facilities between any two problems.

1．序論

学生の問題解決能力の向上を図るためには，必要な解法を獲得させるだけでなく，その解法の用い方に習熟させる必要がある．算数や数学等の教科学習の領域においては，単純な例題を用いて解法を獲得させ，問題演習を行うことによってその解法の用い方に習熟させるのが一般的である．この問題演習においては，解法を既に獲得しており，例題が解けるようになっているにもかかわらず，その解法を用いて他の問題が解けないといった学生が多く見受けられる．問題演習の支援を高度化するためには，このようが学生への対応能力が非常に重要となる．

問題演習では，既に獲得している解法を今までその解法を用いたことがない問題に対して適用する必要があり，解法の用い方に十分習熟していない学生にとっては，類推による問題解決が必要となる．類推による問題解決を成功させるためには，以前にその解法を用いて解くことのできた問題と，今解こうとしている問題との対応関係を把握できることが不可欠である．解法を知っているにもかかわらず，その解法を用いて問題が解けないといった問題解決の失敗の多くは，この対応関係の把握の失敗が原因であると考えられる．問題演習におけるこのような問題解決の失敗に対処するためには，問題間の対応関係の指摘や対応関係の質の違いを踏まえた出題といったことが必要となる．

従来の知的ＣＡＩにおいては，固定された文脈においてこのような問題の解説や出題が実現されていた[1-4]．しかしながら，問題演習支援能力を高度化するためには，動的に対処できる機能，つまり，同一解法で解ける任意の問題間の対応関係の指摘や，任意の問題に対してある対応関係を持つ問題の出題といったこと可能にする機能が必要である．そのためには，問題間の対応関係を体系的に記述する枠組みが必要であり，またその枠組みに基づいて問題間の対応関係を取り出す機能や，その枠組みに基づいて出題を行う機能を作成しなければならない[5,6]．

本稿では，ツルカメ算等の算数の文章題を対象として，まず，従来の問題の分類法にしたがって，各種の問題が含んでいる数量関係についての分析を行う．さらに，この分析結果に基づいて，問題間の対応関係を体系的に記述する枠組みの作成を指向した問題分類法について述べる．また，この分類法に基づいて設計・開発中である問題演習支援システムＰＡＳについても述べる．

2．問題の整理

算数の文章題と呼ばれる問題には，和差算，ツルカメ算，あるいは旅人算等がある．このような分類は解き方を基準として分類されていると考えられるが，明確な定義は与えられていない．ここでは，このように分類された問題，たとえばツルカメ算の問題のことを算法問題と呼ぶことにする．人間の教師は，この算法問題を適切に区別して取り扱うことができる．しかしながら，ＩＴＳにおける問題演習支援を実現するためには，これらの分類がどのような基準で行われているのかを明確にする必要がある．

さらに，同一算法問題に属する問題をさらに分類することも必要となる．算数の文章題に対する学習は，ある算法問題ごとに区切って行われるのが一般的であり，まず例題を与えてその例題が解けるようになってからその算法問題に属する応用問題を与える．したがって，特に算法問題の分類においては，問題間の対応関係の説明が取り出せるように整理する必要がある．以下本章では，まず算法問題の定義を試みる．さらに，同一算法問題に属する問題をより詳しく分類するための基準について述べる．

2．1　分析手順

本稿では，算法問題の定義をその算法問題に属する問題に共通に含まれている，問題解決に関係する数量関係によって定義する．より具体的に

は，個々の問題に含まれている方程式を一般化したものとして数量関係を取り出すことになる．ここで，数量関係とは，（1）変数間の演算関係，（2）各変数がとるべき状態（known：既知でなければならない，unknown：既知でなくてもよい，answer：答えとなる），よりなるものとする（さらに，算数の範囲において解決可能であるための制約条件が必要であるが，ここでは簡単化のためにこの条件は暗黙の前提として議論しない）．

この数量関係において，変数間の演算関係に一組の変数がとるべき状態を割り当てれば，一つの方程式が得られる．算法問題においては．一つの演算関係に対して一つまたは複数の変数がとるべき状態が存在する．したがって，算法問題を定義する数量関係（以下では基本数量関係と呼ぶ）は，一つまたは複数の方程式（以下では基本方程式と呼ぶ）により表現できる．

また，問題より基本方程式を生成するために必要となった操作の質の違いを，同一算法問題の分類の基準として用いる．基本方程式の生成操作においても同一の問題同士については，数量の性質とその概念的意味に基づいて分類する．

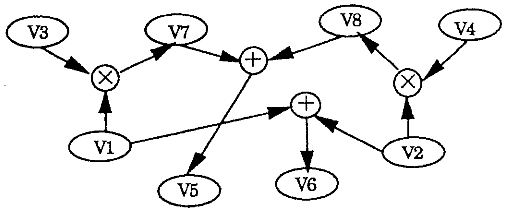
2．2　算法問題の分析

算法問題には，ツルカメ算のように数量の状態が一つであり，特定の基本方程式によって定義できるものと，旅人算のように複数の数量状態を設定できるために，基本数量関係が複数の方程式によって定義される場合がある．つまり，ある特定の方程式を中心とした問題と，ある演算関係を中心とした問題に大きく分けられる．本稿では，それぞれの問題をツルカメ算型，旅人算型と呼び，以下ではそれぞれについて述べる．

2．2．1　ツルカメ算型

調査した問題集[7,8]に収録されていたツルカメ算の問題２５問中２３問までが，図１の数量関係を含んでいた（含んでいなかった２問については後述する）．この数量関係は，図２の方程式として記述することができる．本稿では，この方程式をツルカメ算の問題の基本数量関係とする．たとえば，図３の問題１はツルカメ算の典型的な問題であり，図２の方程式を含んでいる．ただし，ａ，ｂにあたる数量は，問題中に明示的に表れていない．

これに対して，図３の問題２は,必要な数量がすべて問題中に明示的に表れている．ここで，問題２のような問題を０次問題，問題１のような問題を１次問題と呼ぶ．また，図３の問題３に対する方程式では，数値演算（６９×４０）を行って初めて基本方程式が生成される．このような問題を２



V1:answer, V2:answer, V3:known, V4:known, V5:known, V6:known, V7:unknown, V8:unknown

図１　ツルカメ算の基本数量関係

$$\begin{matrix} X+Y=m \\ aX+bY=n \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} X{:}V1,\ Y{:}V2,\ a{:}V3, \\ b{:}V4,\ m{:}V6,\ n{:}V5 \end{matrix} \right.$$

図２　ツルカメ算の基本方程式

［問題１］　ツルとカメが合わせて２０匹います．足の数は全部で５８本です．ツルとカメは何匹ずついますか．

［問題２］　２０円切手と５０円切手を全部で２０枚買いました．代金は７６０円でした．それぞれ何枚ずつ買ったでしょう．

［問題３］　あるクラスの人数は４０人です．算数のテストの平均点は６９点でした．男子の平均点は６５点，女子の平均点は７５点でした．男女それぞれの人数は何人ですか．

［方程式］　$65X+75Y=69\times 40$，$X+Y=40$

図３　ツルカメ算の問題例

［問題５］　ツルとカメがいます．その足の数は２０８本です．ツルの数はカメの数の３／５だといいます．このとき，それぞれ何匹いますか．

［方程式］　$2X + 4Y = 208$,

$X = (3/5)Y$

［問題６］　１個６０円のお菓子と１個４０円のお菓子とを合わせて３０個買い，５０円の箱代を含めて１５００円以内にしたいと思います．このとき，６０円のお菓子をできるだけ多くするためには，６０円のお菓子を何個にすればよいですか？

［方程式］　$60X + 40Y < 1500 - 50$,

$X + Y = 30$

［問題７］　１冊がそれぞれ７０円，３０円，２０円の３種類のノートを合計４７冊買って，２１２０円支払いました．１冊３０円のノートは，１冊２０円のノートの２倍だけ買いました．それぞれ何冊ずつ買いましたか．

［方程式］　$X + Y + Z = 47$,

$70X + 30Y + 20Z = 2120$,

$Y = 2Z$

図４　ツルカメ算の問題例（２）

次問題と呼ぶ[6].

次に，ツルカメ算の基本数量関係（ツルカメ算の場合は図２の基本方程式）を含んでいなかった問題について分析する．図４の問題５の扱っているオブジェクトはツルとカメであるが，その方程式を基本方程式に変換することはできない．したがって，本稿ではこの問題をツルカメ算の問題ではないと判定している．この問題の解決方法は，本稿の定義に合う他のツルカメ算の問題の解き方とは異なったものであり，この判定は妥当であると考えられる．

また，図４の問題６の場合には，不等式が表れる．この問題は．まず不等号を等号とみなしてツルカメ算の問題として解き，そのあとで不等号の向きを考慮してツルカメ算として解いた結果として得られた値に対して切り上げ，あるいは切り下げを行うことによって解くことができる．したがって，ツルカメ算の問題を部分問題として含むとみることができる．この問題をツルカメ算に含めるかどうかは，今後の課題である．

次に，算法問題と元の数について考察する．ここまではすべて２元の問題を扱っていたが，３元以上含まれる問題も存在する．たとえば，図４の問題７では，３元連立方程式が立式される．この方程式では，ツルカメ算の基本数量関係にあたる２元の方程式に変換して初めて解決できる．このとき，各元の値を求めることは，ツルカメ算の部分問題の解決と独立させることはできない．したがって，この問題を，３元のツルカメ算の問題と考えることにする．

しかしながら，ある算法問題に属していて３元であれば必ずその算法問題についての３元問題になるとは限らない．例として和差算の場合を考えてみる．和差算の基本方程式は，

$$X + Y = m,\ X + a = Y,$$

であり，３元の問題として図５の問題８，問題９を挙げることができる．

問題８の場合には含まれているツルカメ算の部分問題を独立して解くことは不可能であり，３元の和差算とみるのが妥当であるが，問題９の場合，ツルカメ算の部分問題を独立して解決することができる．つまり，Ａ，Ｂを求めるために和差

［問題８］　ＡからＢをひくと１３になり，ＡからＣをひくと２４になります．Ａ，Ｂ，Ｃを合計すると３２３になります．Ａ，Ｂ，Ｃはそれぞれいくらですか．

［方程式］　$A - B = 13$,

$A - C = 24$,

$A + B + C = 323$

［問題９］Ａ，Ｂ，Ｃの三つの数があって，三つの数の和は２９５で，ＡとＢの和は１７５で，ＡはＢより２３大きいそうです．Ａ，Ｂ，Ｃのそれぞれはいくらですか．

［方程式］　$A + B + C = 295$,

$A + B = 175$,

$B + 23 = A$

図５　和差算の問題例

算を用い，Cの値は別に求めることができる．このように，ツルカメ算の部分問題に関する２つの元以外の他の元を独立して求めることができる問題を３次問題と呼ぶことにする．

２．２．２　旅人算型

算法問題のうち，旅人算，通過算等は，基本的に複数の物体を考慮して速度，時間，距離の関係式を用いる問題である．それぞれの算法問題についての基本数量関係は，固有の演算関係と複数の数量状態によって構成され，複数の基本方程式で表現することができる．ツルカメ算型が方程式を中心として算法問題であるのに対して，旅人算型は演算関係を中心として算法問題である．

旅人算の問題を分析すると，次のような演算関係を取り出すことができる．

$$L = (V1 \pm V2)\ T$$

［Ｌ：距離，Ｖ１，Ｖ２は速度，Ｖ１ｏｒＶ２が負でもよい，Ｔ：時間）

数量の状態としては，四つの数量のうち，一つがanswerであり，残りの三つがknownであればよく，三つの状態つまり三種類の方程式が基本数量関係を表すことになる．したがって，旅人算の問題は，個々の基本数量関係ではなく，演算関係が重要となる問題である．この数量関係は，速度等だけでなく，たとえばVを一日に稼ぐ金額とし，Tを日数，Lを金額とすると，二人で協力して稼ぐ場合や，二人の金額の差，幾日で金額が追いつくか等の問題においても成立する．演算関係とその演算関係が持つ概念的意味を切り離せるかどうか，あるいはどれだけ一般化可能であるかについては，現在整理・検討中である．

２．３　算法問題内の分類

同一算法問題同士の分類基準として，（１）次数，（２）扱う数量が離散値であるか連続値であるか，（３）数量の符号，（４）数量の持つ概念的意味，の四つをここでは取り扱う．

問題の次数については既に述べたが，０次問題が最も基本的な問題であり，次数が上がるごとに数量関係は基本数量関係との差異の大きなものとなる．この基準は，問題より立式される方程式より決定できるものであり，重要である．高次の問題は，より次数の低い問題に変換することが可能であり，問題の簡単化の一方法として用いることができる．

ある算法問題に属する問題は，必ずその算法問題に対する０次問題に変換可能である．以下では，０次問題を対象として，その他の分類基準について述べる．問題の扱っている数量が離散量であるか，あるいは連続量であるかは，算数の範囲においては問題の難易度を左右する大きな要素である．一般に離散量の取り扱いは容易であるが，連続量の取り扱いは困難である．したがって，問題が扱っている数量の性質によって問題を分類することは必要である．ツルカメ算の場合を考えてみると，典型的なツルとカメの問題は離散量だけを扱った問題であり，二つの方程式はともに離散量についての等式である．これに対して，クラスの生徒と得点の問題では，得点は基本的には連続量であるので，等式の一つが離散量に関する等式となっている．また，両方の等式が連続量の問題としては，図６の問題１０が考えられるこの場合，二つの等式はそれぞれ連続量である時間と距離を扱うことになる．

また，よく用いられる値段の問題の場合には，値段は本来連続量であるが貨幣を用いることによって離散量として用いることができる．したがって，値段の問題は疑似離散量の問題とみることができる．この数量の性質による分類に際しては，方程式が何の等式になっているかを分析すればよいと考えられる．

次に，数量の符号について考察する．たとえば，ツルカメ算では図６の問題１１のように，ａ，ｂのいづれか一方の符号が負である場合がある．数学的には変数に代入される値の符号の違いであるが，算数的には演算関係の違いとして捉えることができ，数量関係の異なった問題と見ることも可能である．したがって，どの部分の数量がどの符号となっているかを考えた分類が必要である

また，問題が取り扱っている概念によっても問題を分類する必要がある．現段階では，問題中に含まれる概念間の関係を記述した解法インデックスの階層構造として分類を表現している．たとえば，ツルとカメの足の本数の問題は，動物の足の本数の問題に属しており，また動物の足の本数の問題は，動物の体の一部に関する問題に属する，といった階層構造である．また，果物の値段に関する問題はそれらに属していないことになる．この概念の階層構造の設定は，数量の性質を考慮して行う必要がある．また，このような階層構造だけでは，動物の値段についての問題を取り扱えないので，今後改良する必要があると考えられる．

3．解法の整理

3．1　解法の定義

次に，算法問題に対する解法の定義を試みる．2．においては基本数量関係による算法問題の定義を試みたが，ここでは，解法をその基本方程式を算術的に解決する方法として定義する．たとえば，ツルカメ算の基本方程式は，図２となる．この方程式を解くと，

$$X=(m-bn)/(a-b),\quad Y=n-X$$

となり，X，Yを求める際に行われる算術的操作はツルカメ算の解法に一致する．

ここで，係数bが負の場合には，数学的には同じであるが，算術的には異なった解法となる．この違いは，問題分類における符号の違いとしても捉えられており，この符号の違いが解法の違いに反映されている．

他の算法問題に対する解法も，それぞれの基本数量関係を構成する方程式の算術的な解法として同様に定義することができる．したがって，この解法の定義は十分有用であると考えられる．

［問題１０］ 学校から家まで２．１kmです．２０分で行こうと思いますが，歩く速度は７０m／分，走る速度は１４０m／分です．何分走ればよいですか．

［問題１１］ A君は友達と階段でジャンケンをしました．勝つと3段上がり，負けると２段下がる約束です．１５回ジャンケンをしてA君は元の場所より１０段上にいました．何回勝ったでしょう．

［方程式］ $X+Y=15,$
$3X-2Y=10$

図６　ツルカメ算の問題例（３）

［問題１２］ A君は今１３才で，父は４５才です．父の年令がA君の年令の３倍になるのは，今から何年後でしょう．

［方程式１］ $3(13+X)=(45+X)$
（解法１） $X=(45-3*13)/(3-1)$
［方程式２］ $45-13=(3-1)(13+X)$
（解法２） $X=(45-13)/(3-1)-13$

図７　年令算の問題例

3．2　別解

同一の問題に対して複数の異なる解法が存在することがある．たとえば，図７の問題１２のような年令算の場合であれば，年令の等式である方程式１と年令差の等式である方程式２が立式できる．それぞれの方程式に対する算術的解法は，図７の解法１と解法２のように，異なった算術的演算が行われるものとなる．したがって，これらは互いに別解であるといえる．しかしながら，方程式１と方程式２は相互に変換可能であり，どの程度の差異があれば別解を生じる方程式となるかは検討中である．現在のところ，何に関する等式であるかの意味付けか可能であり，しかも異なった意味付けが行われている方程式同士であれば，別解を生じると考えている．

4．問題演習支援機能

ＰＡＳは，ある特定の算法問題を対象として，その問題に対する解法の用い方に関する習熟を支援することを目標としている．以下では，ＰＡＳにおける主な問題演習支援機能である，出題機能と問題間対応付け機能について述べる．

4．1　出題機能

問題生成機能については既に報告しているが[10]，ここでは，どの問題を生成するかを決定する部分についての考察を行う．出題が必要となる場合として，（１）解法の適用範囲の拡大，（２）問題解決の支援，の二つが考えられる．解法の適用範囲の拡大を図る出題としては，扱える概念の範囲を拡大する場合と，２次，３次といった問題を基本形に直す操作が必要な問題を扱えるようにしたい場合がある．ＰＡＳにおいては，扱える範囲の拡大を目的とした出題を，著者等が既に提案している解法インデックスの階層構造[6.7]に基づいて行う（ここで，解法インデックスは，０次問題の問題構造を表現している）．ここで，この階層構造を数量の性質の違いに基づいてさらにグループ分けを行い，各グループが扱えるようになるまでは０次あるいは１次の問題のみを出題し，その後で，各グループに属する２次，３次あるいは３元問題を出題する．

問題解決を支援するための出題は，学生が解決できない問題をより簡単な問題に変更することである．この出題は，（１）数値の簡単化，（２）概念の簡単化，（３）次数の簡単化，の三つの方法で行う．数値の簡単化は，単に問題が扱っている数値を簡単なものにすることである．概念の簡単化は，学生が以前解けた問題で取り扱っていた概念で構成されている問題に変更することである．次数の簡単化は，高次問題を低次の問題に変更することである．

これらの出題方法をいかに使い分けるかは，現在検討中の課題である．

4．2　問題間の対応付け

問題間の対応付けは，学生が問題解決に行き詰まっている問題が，以前に解決できた問題と等価性を持っていることを理解させるために行う．ＰＡＳにおいて出題する問題は，問題生成機能によって生成されるものであり，この際にその問題の問題解決過程を著者等が既に提案している問題解決モデルＭＩＰＳ[6,7]に基づいて記述した問題モデルを生成することができる．この問題モデルに基づいて対応する０次問題の問題構造を生成し，この０次問題についての問題構造を用いて解法インデックスの階層構造を介することによって他の問題との対応関係を知ることができる．

この際に，どの問題と対応付けるが重要となるが，対応付けの対象として，算法問題についての基本問題，解法インデックスの階層構造中に設定したグループについての基本問題，現在解決可能にしようとして範囲についての基本問題，直前にといた問題等が考えられる．また，問題解決の支援を目的とした出題を行った場合には，新たに与えた問題と，学生が解けなかった問題を対応付けを行うことになる．

5．まとめ

本稿では，問題演習支援機能の高度化を指向した問題分類と，その分類に基づく問題演習支援機能について述べた．本稿で述べた問題分類では，従来明確な定義のなかった算法問題の定義を，算法問題の含んでいなければならない基本数量関係を用いて行なった．また，それぞれの算法問題に対する解法の定義をこの基本数量関係を解く際に行なわれる算術的な演算操作として行なった．

この問題分類に基づく問題演習支援機能としては，出題機能と問題間対応付け機能について述べた．これらの機能は，基本問題は解けるが応用問題は解けないといった，問題演習においてよく見受けられる学生の問題解決の失敗に対応するために必要なものである．

本稿で述べた問題分類は，また十分整理されていない部分が残っており，これをより洗練されたものとすることが必要である．さらに，この問題分類の洗練に基づく各機能の改良，およびそれらの機能を適切に運用する枠組みとしての問題演習支援システムの作成が今後の課題である．

[参考文献]

［1］大槻，山本，保原，山村編：”知的ＣＡＩの動向”，情報処理学会誌，Vol.29, No.11, pp.1254-1315(1988).

［2］宇都宮編：”電子情報通信技術と教育工学特集”，電子情報通信学会誌，Vol.71, No.4, pp.335-442(1988).

［3］Sleeman, D.H. and Brown, J.S.(eds.): "Intelligent Tutoring Systems, Academic Press(1982).

［4］Wenger,E. : “Artificial Intelligence and Tutoring Systems", Morgan Kaufmann Pub. Inc. (1987).

［5］平嶋，中村，池田，溝口，豊田：“ＩＴＳのための認知モデル：問題理解と問題解決"，人工知能学会研究会資料，SIG-KBS-8902 (1989).

［6］平嶋，中村，池田，溝口，豊田：“ＩＴＳを指向した問題解決モデルＭＩＰＳ”，人工知能学会（採録決定）．

［7］文教出版編：”のばす算数小学高学年”．新学習指導研究会”，文教出版.

［8］新学習指導研究会：”小学算数文章題考え方解き方”，むさし書房.

［9］遠山：”教師のための数学入門”，国土社(1991).

［10］平嶋，河野，中村，溝口，豊田：”問題解決モデルの実現とＩＴＳへの応用－問題解説と問題生成－”，人工知能学会研究会資料，SIG-KBS-8905-7, pp.49-56(1990).