

平行性仮説による多面体の3次元形状復元

田中俊江 川島孝夫 金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

多面体の3次元形状を、互いに平行な辺が多数あるという仮定のもとで復元する。基本となるのは、3本以上の平行辺を画像面上で延長すると一点(消失点)で交わるという事実である。2本のみの平行な辺の組を発見するには、多面体の構造を考慮した発見的方法による。また、画像に含まれる誤差に対処するために、誤差の要因を考慮したしきい値処理法を示す。平行な辺が発見できれば、それらの消失点から各辺の3次元方向が定まるが、計算した各辺の3次元方向は、誤差によって互いに矛盾する可能性がある。それを克服するために、多面体の拘束条件に基づく最適化手法を示す。これらを実際の画像を用いて示す。

3D RECOVERY OF POLYHEDRA BY PARALLELISM HEURISTICS

Toshie Tanaka, Takao Kawashima and Ken-ichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

The 3D shapes of polyhedra are recovered from their perspective projected images on the assumption that parallel edges exist. First, three or more parallel edges are detected by checking concurrency on the image plane. The remaining parallel edge pairs are heuristically detected by considering the structure of the polyhedron. A thresholding technique is presented by taking into account various sources of measurement error. The 3D orientations of the detected parallel edges are determined by computing their "vanishing points", but these clues may not be consistent with each other in the presence of noise. In order to overcome this difficulty, an optimization scheme is presented to construct a consistent polyhedron which satisfies given constraints "on the average". Examples based on real images are presented.

1. 序論

人間は一枚の2次元画像を見て、そこに描かれている物体を3次元的に解釈することができる。これを計算機に行わせる問題の一つに、多面体の線画解釈の研究がある[1,11]。しかし、辺に凹凸を表すラベルをつけたり、対応する3次元物体が存在するかどうかを調べたりすることはできても、3次元形状を一意的に復元することはできない。そのためには何らかの強い拘束条件が必要である。

一方、人間はそれが可能であるから、その拘束条件として知覚心理学に基づいた発見的仮説を導入しようという研究がいろいろある。代表的な仮説としては、辺の直交性を仮定する「直交性仮説」[2,4,5,8,9]、面の形に関する「歪対称性仮説」[5]、閉曲線に関する「閉曲線仮説」[3]などがある。本論文では、辺に関する「平行性仮説」[10]を用いた3次元復元を行う。日常生活において多くの物が平行辺から構成されているので、この仮定は妥当であろう。

本論文では画像処理によりすでに必要な情報がえられているものとして、単一画像から物体の3次元形状を唯一に復元する数学的手法を提案する。空間中で平行な辺を画像面に投影すると一点で交わる。この交点を「消失点」とよぶ。基本となる3次元復元の原理は、消失点の位置がその辺の3次元的方向を決定するという事実である。しかし、これは単に部分的な情報に過ぎず、また誤差のため全体として矛盾のない多面体が復元できるとは限らない。そこで、多面体の拘束条件をもとにした最適化を行い、矛盾のない形状を唯一に復元する。

2. 消失点と辺の3次元方向

Z軸をカメラの光軸とするXYZ座標系をとり、XY平面を画像面とする。Z軸上の点(0,0,-f)を視点とすると、空間中の点(X,Y,Z)は画像面上の点(x,y)に次式のように中心投影される(図1)。

$$x = \frac{fX}{f+Z}, \quad y = \frac{fY}{f+Z}. \quad (2.1)$$

【定理1】3次元方向が $m=(m_1, m_2, m_3)$ である直線の消失点は $(fm_1/m_3, fm_2/m_3)$ である。

証明。点 (X_0, Y_0, Z_0) を通り、方向ベクトルが $m=(m_1, m_2, m_3)$ である直線は次式のようになる。

$$X = X_0 + tm_1, \quad Y = Y_0 + tm_2, \quad Z = Z_0 + tm_3, \quad (t: \text{実数}). \quad (2.2)$$

式(2.1)より、この直線は画像面上に投影されて

$$x = \frac{fX}{f+Z} = f \frac{X_0 + tm_1}{f + Z_0 + tm_3}, \quad y = \frac{fY}{f+Z} = f \frac{Y_0 + tm_2}{f + Z_0 + tm_3}, \quad (2.3)$$

となる。この直線の消失点(a,b)は $t \rightarrow \infty$ として、次のように得られる。

$$a = fm_1/m_3, \quad b = fm_2/m_3. \quad (2.4)$$

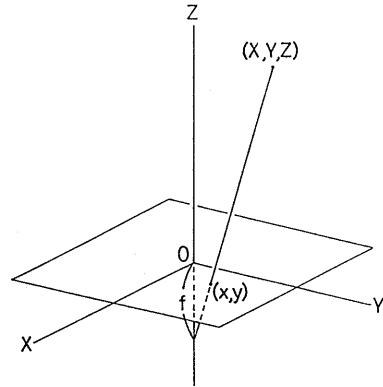


図1. 視点と画像面の関係。

【系1】画像面上の消失点(a,b)である直線の3次元方向は次のような単位ベクトルで与えられる。

$$m = \pm \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + f^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + f^2}}, \frac{f}{\sqrt{a^2 + b^2 + f^2}} \right). \quad (2.5)$$

従って、画像中で平行な辺を見つければ、それらの消失点を求めることにより(付録A)、それらの辺の3次元方向が決定できる(平行辺発見のアルゴリズムは第5節に述べる)。しかし、一つの重大な問題が生じる。各辺の3次元方向がわかって、全体として物体の形状が復元できるとは限らないという事実である。理論的には、辺を指定された方向に、かつ投影関係が正しく保たれるように接続すればよいはずであるが、画像処理には誤差が避けられないから、例えば面を囲む辺が閉じるとは限らない(図2)。そこで、多面体としての拘束条件を考慮して、矛盾のない形状を一意的に復元することを考える[6,7,13,14]。

3. 多面体の拘束条件

頂点 $V_i, i=1, \dots, n$ の空間座標を (X_i, Y_i, Z_i) 、面 $F_\alpha, \alpha=1, \dots, m$ の方程式を $Z = p_\alpha X + q_\alpha Y + r_\alpha$ とする。 (p_α, q_α) が面 F_α の勾配、 r_α がZ軸に沿って測った面 F_α の画像面からの距離である。頂点 V_i が面 F_α 上にあることを「頂点 V_i は面 F_α に隣接する」といい、その関係を「隣接対」 (F_α, V_i) で定義する[12,14]。そのような隣接対の数をLとする。条件 (F_α, V_i) を式で表すと次のように書ける。

$$Z_i = p_\alpha X_i + q_\alpha Y_i + r_\alpha. \quad (3.1)$$

ここで次のような変数 x_i, y_i, z_i を定義する。

$$x_i = \frac{fX_i}{f+Z_i}, \quad y_i = \frac{fY_i}{f+Z_i}, \quad z_i = \frac{fZ_i}{f+Z_i}. \quad (3.2)$$

すると、式(2.1)より (x_i, y_i) がちょうど頂点 V_i の画像座標になっている。逆の関係は次のようになる。

$$X_i = \frac{fx_i}{f-z_i}, \quad Y_i = \frac{fy_i}{f-z_i}, \quad Z_i = \frac{fz_i}{f-z_i}. \quad (3.3)$$

これを式(3.1)に代入すると次のようになる。

$$z_i = \frac{fp_\alpha}{f+r_\alpha}x_i + \frac{fq_\alpha}{f+r_\alpha}y_i + \frac{fr_\alpha}{f+r_\alpha}. \quad (3.4)$$

そこで

$$P_\alpha \equiv \frac{fp_\alpha}{f+r_\alpha}, \quad Q_\alpha \equiv \frac{fq_\alpha}{f+r_\alpha}, \quad R_\alpha \equiv \frac{fr_\alpha}{f+r_\alpha} \quad (3.5)$$

において、 $p_\alpha, q_\alpha, r_\alpha$ の代わりに $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ を面 F_α を指定するパラメータとみなす。逆の関係は、

$$P_\alpha = \frac{p_\alpha}{1-R_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{q_\alpha}{1-R_\alpha}, \quad r_\alpha = \frac{fr_\alpha}{1-R_\alpha} \quad (3.6)$$

である。式(3.4)は次式のように書ける。

$$z_i = P_\alpha x_i + Q_\alpha y_i + R_\alpha. \quad (3.7)$$

画像座標 x_i, y_i は既知だから、 z_i が既知ならば式(3.3)より頂点 V_i の空間座標が決定できる。従って、 z_i を Z_i の代わりに頂点 V_i の空間的位置を指定するパラメータとして扱うことができる。ポイントは、式(3.7)は未知数 $z_i, P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ に関して線形であるということである。(なお、3次元復元が可能であるためには、隣接構造が「正則」である必要がある[12,14]。正則でない場合は変形して正則にすることができる[13,14]。以下ではすべて正則であるとして考える。)

4. 最適化による多面体の3次元復元

平行辺を発見し(アルゴリズムは第5節に示す)、消失点を計算し(アルゴリズムは付録Aに示す)、各辺の3次元方向が求められたとする。いま面 F_α 上において、3次元方向が求まっている辺を $e_{k\alpha}$ 、 $k_\alpha=1, \dots, N_\alpha$ とし、それぞれの3次元方向を表す単位ベクトルを $n_{k\alpha}=(n_{k\alpha(1)}, n_{k\alpha(2)}, n_{k\alpha(3)})$ とする。面 F_α の勾配を (p_α, q_α) とすると、面 F_α の単位法線ベクトルは $(p_\alpha, q_\alpha, -1)/\sqrt{p_\alpha^2+q_\alpha^2+1}$ である。単位ベクトル $n_{k\alpha}$ 、 $k_\alpha=1, \dots, N_\alpha$ はすべてこの単位法線ベクトルと直交しているべきである。そこで、内積の二乗和の(1/2)

$$\frac{1}{2\sqrt{p_\alpha^2+q_\alpha^2+1}} \sum_{k_\alpha=1}^{N_\alpha} (n_{k\alpha(1)}p_\alpha + n_{k\alpha(2)}q_\alpha - n_{k\alpha(3)})^2 \quad (4.1)$$

を最小にするように (p_α, q_α) を定める。これに面 F_α に関する重み w_α をかけて、全ての面に関して加えてから最小化すれば、全ての面についての最小化を同時に行うことができる。最小にすべき式は式(3.6)を代入して p_α, q_α を $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ で書き直すと次のようになる。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^M \frac{w_\alpha}{\sqrt{p_\alpha^2+q_\alpha^2+1}} \left(-\frac{f}{f+r_\alpha} \right)^2 \times \sum_{k_\alpha=1}^{N_\alpha} (n_{k\alpha(1)}P_\alpha + n_{k\alpha(2)}Q_\alpha + n_{k\alpha(3)}R_\alpha - n_{k\alpha(3)})^2. \quad (4.2)$$

面のZ軸に沿う距離 r_α が大きかったり面の勾配が小さかったりすると消失点の計算が不正確になりやすいこ

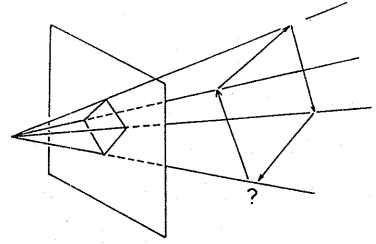


図2. 辺の接続の不適合.

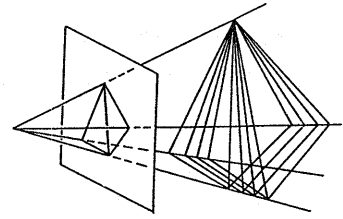


図3. 無数の可能な解から最適化によって解を選ぶ.

とを考慮して、次のように重み w_α を選ぶことにする。

$$w_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2+q_\alpha^2+1} \left(-\frac{f}{f+r_\alpha} \right)^2. \quad (4.3)$$

以上より、3次元形状はすべての隣接対 (F_α, V_i) に関する拘束条件式(3.7)のもとで式(4.2)を最小にすることによって復元できる(図3)。しかし、面の勾配を手がかりに単一画像から復元するので、絶対的な距離を決めることはできない。そこで一つの頂点にZ座標を与える。その頂点を仮に V_n とする。

隣接対 (F_α, V_i) に関するラグランジュ乗数 $\Lambda_{\alpha i}$ を導入すれば問題は

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i=1}^{N_\alpha} (n_{k\alpha(1)}P_\alpha + n_{k\alpha(2)}Q_\alpha + n_{k\alpha(3)}R_\alpha - n_{k\alpha(3)})^2 + \sum_{\alpha,i} \Lambda_{\alpha i} (P_\alpha x_i + Q_\alpha y_i + R_\alpha - z_i) \quad (4.4)$$

の制約のない最小化となる。解を定める方程式は、拘束条件(3.7)、及び式(4.4)をそれぞれ $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ で偏微分し0とおいたものとなり、まとめると次のようになる。

【定理2】 $n+3m+L-1$ 個の未知数 z_i 、 $i=1, \dots, n-1$ 、 $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ 、 $\alpha=1, \dots, m$ 、 $\Lambda_{\alpha i}$ は次の線形方程式により定まる。

$$P_\alpha x_i + Q_\alpha y_i + R_\alpha - z_i = 0, \quad (F_\alpha, V_i), \quad (4.5)$$

$$N_{\alpha 11}P_\alpha + N_{\alpha 12}Q_\alpha + N_{\alpha 13}R_\alpha + \sum_{i=1}^{N_\alpha} x_i \Lambda_{\alpha i} = N_{\alpha 13}, \quad \alpha=1, \dots, m, \quad (4.6)$$

$$N_{\alpha 12}P_\alpha + N_{\alpha 22}Q_\alpha + N_{\alpha 23}R_\alpha + \sum_{i=1}^{N_\alpha} y_i \Lambda_{\alpha i} = N_{\alpha 23}, \quad \alpha=1, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$N_{\alpha 13}P_{\alpha} + N_{\alpha 23}Q_{\alpha} + N_{\alpha 33}R_{\alpha} + f \sum_{i=1}^n \Lambda_{\alpha i} = N_{\alpha 33}, \quad \alpha=1, \dots, m, \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad i=1, \dots, n-1. \quad (4.9)$$

ただし $N_{\alpha ij}$ は次のように与えられる.

$$N_{\alpha ij} = \sum_{k=1}^{N_{\alpha}} n_{k\alpha(i)} n_{k\alpha(j)}, \quad i, j=1, 2, 3. \quad (4.10)$$

式(4.6)~(4.8)の総和は (F_{α}, V_i) なる i について行う.

定理2では、各面は3次元方向が推定された辺を少なくとも一つ持つと仮定した. しかし、必ずしもその必要はない. 3次元方向が求まらない辺のみを持つ面 F_{α} については式(4.6), (4.7), (4.8)を各々次のように置き換えればよい.

$$\sum_i x_i \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad \sum_i y_i \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad \sum_i \Lambda_{\alpha i} = 0. \quad (4.11)$$

やはり、総和は (F_{α}, V_i) なる i について行うものとする.

5. 平行辺発見アルゴリズム

投影画像から平行な辺を発見するには、画像面上で「ほとんど平行なもの」を探せばよいと考えたくなるが、空間中で平行な辺が、どのような角に投影されるかは、投影する方向によるので、そのような単純な方法は通用しない.

そこで、空間中で平行な辺は、画像面上では同一の消失点を持つことを利用する. すなわち、「画像面上の3本以上の辺の延長線の交点が一致するならそれらは空間中で平行である」とみなす.

しかし、画像処理から得られた画像には一般に誤差があるので、延長しても1点では交わらないかもしれない(図4). そこで、しきい値 ε を決め、それぞれの辺の延長線の交点同士の距離の最大値が ε より小さければ、それらは平行であるとする. しかし、しきい値 ε として一定の値を用いることはできない. 交点が画像中心から遠くなるほど、その誤差は大きいと考えられるからである.

さらに考慮しなければならないことは「計算のあふれ」である. 2辺の交点は画像面上のはるか彼方に位置するかもしれないからである. そこで、画像面の代わりに視点 $(0,0,-f)$ を中心とした半径 f の「画像球面」を用いる(図5). 画像球面上に頂点 O を直角とする球面直角三角形 $\triangle OPQ$ を描く(図6). s, L をそれぞれ OP, OQ の弧長、また ϕ を PO と PQ のなす角とすると、球面三角形の公式 $\tan \phi = \tan(L/f) / \sin(s/f)$ を微分することにより、

$$\frac{dL}{d\phi} = f \left(\frac{1}{\sin(s/f)} - \left(\frac{1}{\sin(s/f)} - \sin \frac{s}{f} \right) \cos^2 \frac{L}{f} \right) \quad (5.1)$$

を得る. $s/f \ll 1$ とすれば

$$\frac{dL}{d\phi} \sim \frac{f^2}{s} (1 - \cos^2(L/f)) \quad (5.2)$$

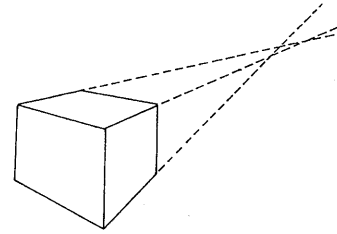


図4. 誤差のために消失点が唯一に定まらない.

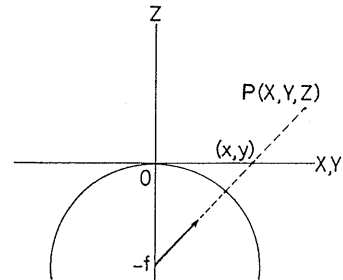


図5. 視点を中心とする半径 f の画像球面.

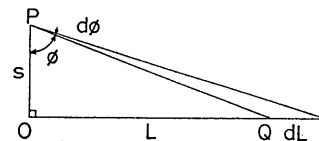


図6. 球面直角三角形 $\triangle OPQ$.

となる. そこで、これを s だけ離れた2本の直線の交点の位置の「不確定度」と解釈する. ただし、 L は画像の原点 O から2辺の交点までの弧長とみなす.

辺 e と視点 $(0,0,-f)$ とを通る平面の単位法線ベクトルを n とする. 同様に辺 e' に関する単位法線ベクトルを n' とし、 $k=(0,0,1)$ とすると、 e, e' を延長したときの交点から画像中心 O までの弧長 L は

$$L = f \cos^{-1} \eta_{ee'} \quad (5.3)$$

によって与えられることがわかる. ただし、次のようにおいた $(nn'k)$ は「ベクトル三重積」である.

$$\eta_{ee'} = \frac{|nn'k|}{\|n \times n'\|}. \quad (5.4)$$

これを用いて、2辺 e, e' に関するしきい値を次のように定義する.

$$\varepsilon_{ee'} = \frac{f^2 \Delta \phi_{ee'}}{s_{ee'}} (1 - \eta_{ee'}^2). \quad (5.5)$$

ここで $s_{ee'}$ は2辺の「平均間隔」, $\Delta \phi_{ee'}$ は2辺の方向の誤差であり, 以下のように定める. 辺 e の端点の座標を (x_0, y_0) , (x_1, y_1) とし, 辺 e' の端点の座標を (x_0', y_0') , (x_1', y_1') とし,

$$e = (x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad e' = (x_1' - x_0', y_1' - y_0') \quad (5.6)$$

と置く. 辺 e , e' の長さに応じた重みを加えた「平均方向」 l を

$$l = \begin{cases} \frac{e+e'}{\|e+e'\|} & (e, e') \geq 0 \\ \frac{e-e'}{\|e-e'\|} & (e, e') < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

とする. 平均間隔 $s_{ee'}$ として, 辺 e と e' の中点を平均方向 $m = (m_1, m_2)$ に垂直な軸に射影した距離を用いる (図7).

$$s_{ee'} = \left| \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - \frac{x_0' + x_1'}{2} \right) l_2 - \left(\frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{y_0' + y_1'}{2} \right) l_1 \right|. \quad (5.8)$$

一方, 辺の方向は辺が短くなるほど誤差が大きいくと考えられるので, $|e|$, $|e'|$ をそれぞれ辺 e , e' の長さとしたとき, 次のようにおく.

$$\Delta \phi = \frac{\text{const.}}{\min(|e|, |e'|)}. \quad (5.9)$$

以下に平行辺発見のアルゴリズムの手順を示す.

共点テスト: まず, 隣接しない辺の組 e , e' を平行辺の候補として選ぶ. それらを延長して得られる交点を P'' とする. 次に, 第3の辺 e'' を考える. 辺 e'' , e を延長して得られる交点を P , 辺 e'' , e' を延長して得られる交点を P' とする. 画像球面上での弧長で測って, もし

$$PP' < \varepsilon_{ee''} + \varepsilon_{e'e''}, \quad PP'' < \varepsilon_{ee''} + \varepsilon_{e'e''},$$

$$P'P'' < \varepsilon_{e'e''} + \varepsilon_{e''e} \quad (5.10)$$

ならば, これらの3辺は平行と判定し, 平行辺の仲間とする (図8). 画像球面上での弧長を用いることにより計算のあふれが生じることはない.

このようにいくつかの第3の辺を平行辺に選んだところで, もしも平行辺の仲間同士で隣接していたならば, より大きなしきい値を要するほうの辺を仲間から外す. また, 初めに選んだ辺 e , e' に平行な辺が見つからなかったならば, それらは, 平行ではないとする.

平行辺の候補となる辺を選ぶ順番は, 画像上で「最も平行らしい」辺から始めるのが妥当であろう. ここでは, 交点が画像の中心から遠い2辺の組ほど平行らしいとみなす. これを「消失点仮説」とよぶ. こうすると結局, 式 (5.4) で定義した $\eta_{ee'}$ の最も小さな2辺 e , e' から始めればよい. また交点が画像の中心に近すぎる2辺は平行ではない可能性が高いので, $\eta_{ee'} > \cos(L_0/f)$ となる辺は選ばないようにする. ただし, L_0 は画像の中心から最も遠い頂点までの距離である.

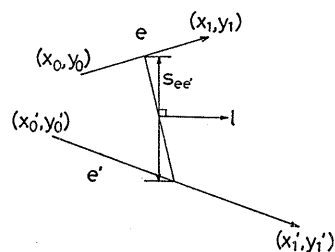


図7. 2辺 e, e' の平均間隔 $s_{ee'}$.

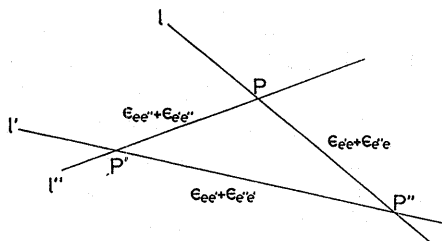


図8. 共点テスト: 3本の直線が同一交点をもつかどうかを判定する.

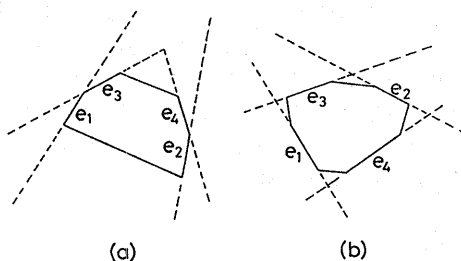


図9. 平行四辺形テスト: 辺 e_1, e_2 が平行のとき辺 e_3, e_4 は (a) 不合格, (b) 合格.

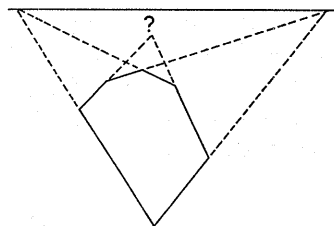


図10. 共線テスト: 面を共有する辺の消失点があるかどうかを判定する.

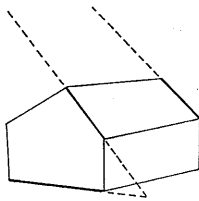


図11. 消失点仮説: 消失点が画像の中心から遠いほど平行である可能性が高い。

以上によって、3本以上が平行であるような辺の組が発見できる。残った2本だけの平行辺の組を決定する手続きを以下に示す。物体表面上で、同一平面にない2辺がたまたま平行で、その物体の他のどの辺もそれらに平行ではない、ということはきわめて例外的なことであるから、まず、同一平面上にあって、頂点で隣接していない辺の組を探す。それらの組に次の2つのテストを施し、両方に合格したものを平行と見なす。

平行四辺形テスト: 2組の平行線を投影して得られる、それぞれの消失点を始点とした半直線は互いに4つの点で交わっていないなければならない(図9)。(アルゴリズムは付録B参照。)

共線テスト: 同じ面を共有する3つ以上の平行辺の組があるならば、それらの消失点は同一直線上になければならない(図10)。(アルゴリズムは付録C参照。)

もし、ある1つの辺が複数の辺と平行であると判定されたときは、「消失点仮説」によってその消失点が画像の中心から離れた方を選ぶようにする(図11)。

6. 実行例

図12(a)は多面体の実画像である。これより図12(b)の線画が得られたとする。共点テストを施すと次のような平行組が検出できる。

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\{e_5, e_6, e_7\}$ 。

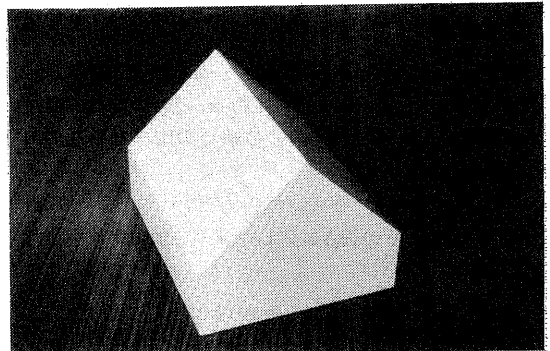
残った辺で、同じ面を共有し、かつ頂点で隣接していない辺の組は、次のものとなる。

$\{e_8, e_9\}$, $\{e_{10}, e_{11}\}$, $\{e_9, e_{12}\}$, $\{e_{11}, e_{12}\}$ 。

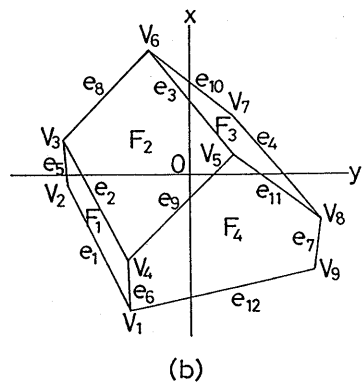
これに対して平行四辺形テストと共線テストを行うとすべてが合格する。辺 e_9 は $\{e_8, e_9\}$, $\{e_9, e_{12}\}$ の両方に含まれるから、消失点仮説により、交点の遠い前者を選ぶ。辺 e_{11} も同様である。その結果、次のように平行な辺の組が決まる。

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\{e_5, e_6, e_7\}$, $\{e_8, e_9\}$, $\{e_{10}, e_{11}\}$ 。

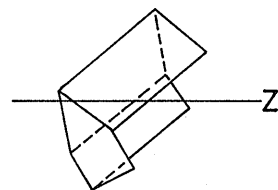
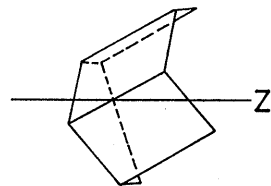
これから消失点を計算し、辺の3次元方向を定めてから最適化手法を適用すると、図12(c)に示すように3次元形状が復元できる。



(a)



(b)



(c)

図12.(a) 多面体の画像。(b) 線画とその隣接構造。(c) 復元した3次元形状の上面図と側面図。

7. 結論

本論文では中心投影された画像から多面体の3次元形状を復元する数学的方法を示した。平行な辺がわかればその消失点から3次元的方向が決まる。画像処理で生じる誤差も、多面体の構造を考慮した最適化手法により克服でき、矛盾のない3次元形状を復元できる。

また、共点テスト、平行四辺形テスト、共線テスト、及び消失点発見法による平行辺発見法を示した。この手法を実画像から得た例に適用し、様々な多面体について正しく復元することができた。

本研究の一部はカシオ科学振興財団研究助成金によって。

[付録A] あふれのない消失点計算のアルゴリズム

3本以上の平行辺は画像面上で同一の消失点を持つはずであるが、誤差のために同一交点を持つとは限らない(図4)。そこで、次のような最小二乗法を用いる。

直線 $L_i: A_i x + B_i y + C_i = 0, i=1, \dots, N$, が平行辺の投影像であるとする。直線 L_i と視点 $(0, 0, -f)$ を通る平面を S_i とし、その単位法線ベクトルを $n_i = (n_{i(1)}, n_{i(2)}, n_{i(3)})$ とする。求めたい共通の消失点を (a, b) とすると、画像面上の点 (a, b) から平面 S_i までの距離は $|n_{i(1)}a + n_{i(2)}b + n_{i(3)}f|$ であるから(図A), (a, b) は次式を最小にすることによって求められる。

$$\sum_{i=1}^N (n_{i(1)}a + n_{i(2)}b + n_{i(3)}f)^2. \quad (A.1)$$

これを、 a と b について微分し、それぞれの結果を0とおくと、最終的には次のようになる。

$$a = fm'_1 / m'_3, \quad b = fm'_2 / m'_3. \quad (A.2)$$

ただし、次のようにおいた。

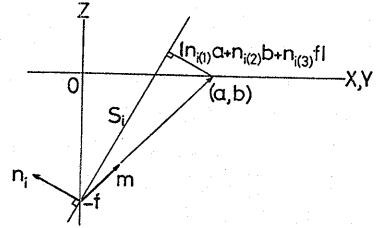
$$\begin{aligned} m'_1 &= \sum_{i=1}^N n_{i(1)} n_{i(3)} \sum_{i=1}^N n_{i(2)}^2 - \sum_{i=1}^N n_{i(2)} n_{i(3)} \sum_{i=1}^N n_{i(1)} n_{i(2)}, \\ m'_2 &= \sum_{i=1}^N n_{i(1)} \sum_{i=1}^N n_{i(2)} n_{i(3)} - \sum_{i=1}^N n_{i(1)} n_{i(2)} \sum_{i=1}^N n_{i(1)} n_{i(3)}, \\ m'_3 &= \left(\sum_{i=1}^N n_{i(1)} \right) \sum_{i=1}^N n_{i(2)}^2 - \left(\sum_{i=1}^N n_{i(1)} n_{i(2)} \right)^2. \end{aligned} \quad (A.3)$$

$m' = (m'_1, m'_2, m'_3)$ はこれらの平行辺の3次元方向を示すベクトルである。割り算がないので計算のあふれが生じない。

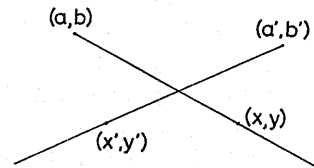
[付録B] あふれのない半直線の交差判定のアルゴリズム

平行四辺形テストは、2本の半直線の交点の存在の有無のテストの繰り返しから構成できる。点 (a, b) を始点とし、点 (x, y) を通る半直線を L , 点 (a', b') を始点とし、点 (x', y') を通る半直線を L' とする(図B)。 L と L' との交点が存在するのは

$$\begin{aligned} a + t(x-a) &= a' + t'(x'-a'), \\ b + t(y-b) &= b' + t'(y'-b') \end{aligned} \quad (B.1)$$



図A. 視点と直線 L_i を通る平面を S_i , その単位法線ベクトルを n_i とする。画像面上の点 (a, b) から平面 S_i までの距離を最小にする。



図B. 半直線の交差判定。

となる $t, t' > 0$ が存在する場合に限る。この式より

$$t = \frac{1}{\Delta} [(x'-a)(b'-b) - (y'-b)(a'-a)],$$

$$t' = \frac{1}{\Delta} [(x-a)(b'-b) - (y-b)(a'-a)],$$

$$\Delta = (x-a)(y'-b) - (y-b)(x'-a) \quad (B.2)$$

が得られるから、交差判定は、3つの式

$$(x'-a)(b'-b) - (y'-b)(a'-a),$$

$$(x-a)(b'-b) - (y-b)(a'-a),$$

$$(x-a)(y'-b) - (y-b)(x'-a) \quad (B.3)$$

がすべて同符号であるかどうかを調べればよい。

しかし、点 (a, b) , (a', b') は、平行辺の消失点であるから、画像中心0からはるかに離れていることもあり、計算のあふれが生じるかもしれない。そこで、視点から出発し、画像面上の点 (a, b) , (a', b') を指す単位ベクトル n, n' を用いて a, b, a', b' を表せば

$$a = fn_1/n_3, \quad b = fn_2/n_3, \quad a' = fn'_1/n'_3, \quad b' = fn'_2/n'_3 \quad (B.4)$$

となる。これらを、式(B.3)に代入し、それぞれの分母に $n_3 > 0$ および $n'_3 > 0$ を掛けると

$$(n_3 x - fn_1)(n'_2 n_3 - n_2 n'_3) - (n_3 y - fn_2)(n'_1 n_3 - n_1 n'_3),$$

$$(n'_3 x' - fn'_1)(n_2 n'_3 - n_2 n_3) - (n'_3 y' - fn'_2)(n_1 n'_3 - n_1 n_3),$$

$$(n_3 x - fn_1)(n'_3 y' - fn'_2) - (n_3 y - fn_2)(n'_3 x' - fn'_1) \quad (B.5)$$

となり、計算にあふれが起こらない。これらがすべて同符号であるとき、半直線 L と L' は交わる。

[付録C] あふれない直線あてはめのアルゴリズム

視点 $(0,0,-f)$ から出発し、画像面上の点 P を指す単位ベクトルと、視点 $(0,0,-f)$ と画像面上の直線 L を通る平面の単位法線ベクトルが同じ時、点 P と直線 L は互いに「双対」であるといふことにする。すると、直線 $Ax+By+C=0$ に双対な点は $(f^2A/C, f^2B/C)$ であり、点 (a,b) に双対な直線は $ax+by+f^2=0$ である。

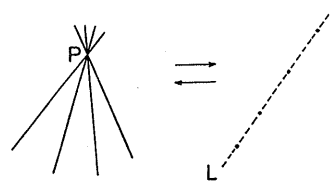
同一交点 P を持つ直線に双対な点は同一直線 L 上にあり、 L は点 P の双対直線である。なぜなら、同一交点 $P(a,b)$ を持つ直線を $Ax_i+By_i+C_i=0$, $i=1,\dots,N$, とすれば、 $A_i a+B_i b+C_i=0$, $i=1,\dots,N$, であり、各直線の双対点 $(f^2A_i/C_i, f^2B_i/C_i)$, $i=1,\dots,N$, はすべて直線 $L: ax+by+f^2=0$ 上にある。

また、同一直線 L 上にある点に双対な直線は同一交点 P を持ち、 P は直線 L の双対点である。なぜなら、 (a_i, b_i) , $i=1,\dots,N$, が $Ax+By+C=0$ なる直線 L 上にあれば $Aa_i+Bb_i+C=0$, $i=1,\dots,N$, であり、各点に双対な直線 $a_ix+b_iy+f^2=0$, $i=1,\dots,N$, はすべて点 $P(f^2A/C, f^2B/C)$ を通る。

以上に述べた「双対原理」を利用すれば、複数の点が同一直線上にあるかどうかの判定も、それに双対な直線が同一交点をもつかどうかの判定に帰着し、ほぼ同一直線上にある点に直線を当てはめる場合も、それらの点に双対な直線の共通な交点を付録Aのアルゴリズムで求めればよい(図C)。これは、実質的に「ハフ変換」にほかならない。

参考文献

1. D. H. Ballard and C. M. Brown, Computer Vision, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NY, 1982 (福村晃夫他訳, コンピュータ・ビジョン, 日本コンピュータ協会, 1987).
2. S. T. Barnard, Choosing a basis for perceptual space, Comput. Vision Graphics Image Process., 29(1985), 87 - 99.
3. M. Brady and A. Yuille, An extremum principle for shape from contour, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., PAMI-6(1984), 288-301.
4. T. Kanade, Recovery of the three-dimensional shape of an object from a single view, Artif. Intell., 17(1981), 409 - 460.
5. K. Kanatani, The constraints on images of



図C. 双対原理: 一点で交わる直線と、同一直線上の点とは互いに双対である。

- rectangular polyhedra, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., PAMI-8 (1986), 456 - 463.
6. 金谷・田中・前原・川島, 最適化による多面体の3次元形状復元, 情報処理学会第36回全国大会(1988-3), 1643 - 1644.
7. 金谷・吉田, ノイズに強いオブティカルフローからの3次元復元, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会 48-4 (1987-5).
8. A. K. Mackworth, Model-driven interpretation in intelligent vision systems, Perception, 5 (1976), 349 - 370.
9. 前原・川島・金谷, 直交性仮説による多面体の3次元復元, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会 53-5 (1988-3).
10. P. G. Mulgaonkar, L. G. Shapiro and R. M. Haralick, Shape from perspective: A rule-based approach, Comput. Vision Graphics Image Process., 36 (1986), 298 - 320.
11. 白井良明, コンピュータビジョン, 昭晃堂 1980.
12. 杉原厚吉, 多面体線画の数理的構造——線画を介した計算機との対話をめざして, 情報処理 22(3) (1981), 209 - 217.
13. 杉原厚吉, 線画の代数構造を利用した単眼画像からの立体復元法, 電子通信学会論文誌 J66-D(5) (1983), 541 - 548.
14. K. Sugihara, Machine Interpretation of Line Drawings, MIT Press, Cambridge, MA, 1986.