

射影幾何学的補正による サブ画素精度の直線あてはめ

小野寺康浩 金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

画像中に検出されるいくつかの直線について、空間中では平行であるとか直交しているという知識があるとき、この知識を利用して、個々の直線部分に最小二乗法を適用するよりも高精度で直線をあてはめる方法を提案する。これは、「計算射影幾何学」の立場から点や直線をすべて「Nベクトル」で表し、それらが射影幾何学から導かれる拘束条件を満たすように個々のNベクトルを補正するものである。対象図形が空間中で平行な線分の場合、長方形の場合、正方形の場合、および正方格子の場合を考察し、実際の画像を用いた実験例を示す。この手法を用いれば、移動ロボットの環境計測やカメラキャリブレーションの精度を向上させることができる。付録として、「複比」と「調和点列」による拘束条件についても述べる。

Subpixel Accuracy Line Fitting by Projective Geometrical Correction

Yasuhiro Onodera and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University
Kiryu, Gunma 376, Japan

A scheme of line fitting which can achieve higher accuracy than applying the least-squares method to individual line segments is constructed by utilizing the knowledge, if available, that the detected line segments are images of lines mutually parallel or orthogonal in the scene. In our scheme, all points and lines are represented by unit vectors called "N-vectors" in the formalism called "computational projective geometry". After lines are fitted in the observed image, their N-vectors are corrected so that they satisfy the constraints derived from projective geometry. Starting from the case where the detected line segments are projection images of parallel lines in the scene, we consider images of rectangles, squares, and squares grids. An example based on a real image is also shown. Our method can be applied to increase accuracy of environment measurement by robots and camera calibration. Finally, the constraints in terms of "cross ratios" and "harmonic range of points" are discussed in Appendix.

本研究の一部は文部省科学研究費一般研究 C(No. 02805043) によった。

1. 序論

ビジョンによる移動ロボットの制御では、単に画像から空間中の物体を識別・分類するだけでなく、その3次元位置や形状を高精度で計測することも要求される。ロボットの室内作業環境では普通は床、天井、壁、柱、ドア、机、戸棚等の直線と平面とからなる物体が多いので、画像から直線図形を精度よく検出できれば、それをもとにして環境の正確な3次元認識ができる²⁾。

また、画像データから空間中の物体の3次元位置、形状を精密に計測するためには、あらかじめ使用するカメラに高精度でキャリブレーションを行っておかなければならない。カメラキャリブレーションでは通常は格子パターンなどの描かれた表示板を用いるので、精密なキャリブレーションのためには、表示板上の直線を高精度で検出する必要がある⁵⁾。

通常行われるのはエッジ検出や Hough 変換によって直線部分を検出し、最小二乗法などによってサブ画素精度で直線をあてはめることである⁵⁾。確かに「直線が存在する」という知識のみをもとにするなら、これが最良であろう。しかし、例えば画像中のいくつかの直線が空間中では平行であるとか直交しているという知識があれば、これを利用して、直線のあてはめの精度をさらに向上させることができる。これを系統的に論じるのが本論文の目的である。

先に述べたカメラキャリブレーションでは、表示板上のパターンは既知であるから、そのパターンの平行性や直交性を利用して精密なキャリブレーションができる。また移動ロボットの制御でも、室内環境では面や直線が水平方向と垂直方向にあるのが普通であるから、直線の平行性や直交性を利用して高精度の3次元認識が可能となる。

本論文では「計算射影幾何学」⁴⁾の立場から、画像中の点や直線をすべて「Nベクトル」^{1,4)}と呼ぶ単位ベクトルで表示する。そして、射影幾何学から導かれる拘束条件が満たされるよう画像データを補正するアルゴリズムをNベクトルによって記述する。まず対象図形が空間中で平行な線分であることがわかっている場合から始めて、図形が長方形の場合、正方形の場合、および正方格子の場合を考慮し、最後に実際の画像を用いて、カメラキャリブレーションに関連した適用例を示す。

また、付録として「複比」と「調和点列」による拘束条件についても論じる。

2. 点と直線のNベクトル

原点Oを視点とし、平面 $Z = f$ を画像面とする透視変換を考える。画像面上の点Pに対して、視点Oから点Pへ向かう単位ベクトル m を点PのNベクトルと呼ぶ(図1)。画像座標 (a, b) の点のNベクトルは

$$m = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + f^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ f \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

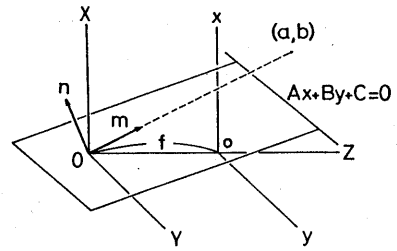
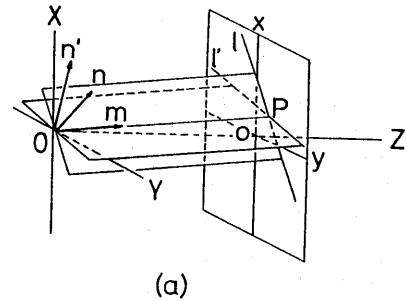
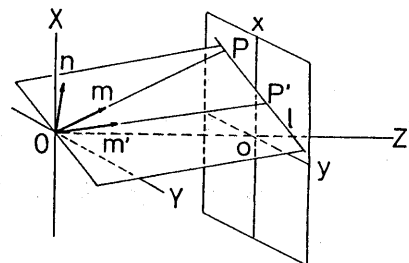


図1 点と直線のNベクトル



(a)



(b)

図2 交点と共通の直線のNベクトル

である。

また、画像面上の直線 l に対して、視点Oと直線 l を含む平面の単位法線ベクトル n を直線 l のNベクトルと呼ぶ(図1)。方程式 $Ax + By + C = 0$ の直線のNベクトルは

$$n = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + (C/f)^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C/f \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

である。符号は任意に選ぶ。

以下、ベクトルの正規化作用素 $N[\cdot]$ を

$$N[a] = \pm \frac{a}{\|a\|} \quad (2.3)$$

で定義する。ただし、符号は、それが点のNベクトルを

表しているときはZ成分が正になるように、直線のNベクトルを表しているときは任意に選ぶものと約束する。

明らかに、点Pが直線lの上にある、すなわち直線lが点Pを通る条件は、点PのNベクトルmと直線lのNベクトルnが互いに直交することである(図1参照)。

$$(m, n) = 0 \quad (2.4)$$

このことから、直線 l_1, l_2 のNベクトルを n_1, n_2 とすると、それらの交点PのNベクトルmは

$$m = N[n_1 \times n_2] \quad (2.5)$$

である。なぜなら、交点Pが直線 l_1, l_2 の上であればmが n_1, n_2 の両方に直交しなければならないからである(図2(a))。

また、点 P_1, P_2 のNベクトルを m_1, m_2 とすると、それらを通る直線lのNベクトルnは

$$n = N[m_1 \times m_2] \quad (2.6)$$

である。なぜなら、直線lが点 P_1, P_2 を通ればnが m_1, m_2 の両方に直交しなければならないからである(図2(b))。

点や直線のNベクトルで表した式(2.5)、式(2.6)を用いて計算すれば、点や直線が無限遠方にあってもかまわない。例えば画像面上で平行な2直線の交点を式(2.5)によって計算すると無限遠の点のNベクトルが正しく計算される。

透視変換において最も基本的な関係は、空間中で無限に長い直線を投影すると、画像面では消失点と呼ばれる一点に収束し、その点のNベクトルがその直線の空間中の3次元方向を表すことである(図3)。

3. 平行線像への直線のあてはめ

画像面上に線分ABがあり、端点A, BのNベクトルをそれぞれa, bとする。このとき、線分AB上でNベクトルが $N[a + b]$ となる点Cを線分ABの視差中点とよぶ(図4)。

画像面上にN個の線分 $A_\alpha B_\alpha$ 、 $\alpha = 1, \dots, N$ が検出されたとする。端点 A_α, B_α のNベクトルをそれぞれ a_α, b_α とする。N個の線分 $A_\alpha B_\alpha$ が空間中の平行線の投影像であることがわかっていれば、前節の最後に述べたことから、画像面上でこれらの線分を延長すると共通の交点で交わるはずである。しかし、画像に誤差があれば、必ずしも同一点で交わるとは限らない(図5)。

まず共通の交点Pを推定することを考える。計算のあふれを避ける一つの合理的方法は、交点Pの画像座標を計算することなく、そのNベクトルmを行列

$$N = \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha N[a_\alpha \times b_\alpha] N[a_\alpha \times b_\alpha]^T \quad (3.1)$$

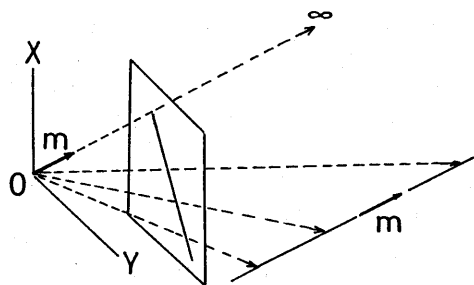


図3 消失点のNベクトルと直線の3次元方向

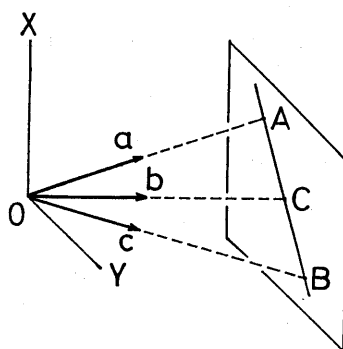


図4 2点A, Bの視差中点

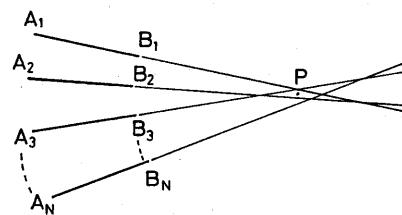


図5 消失点の推定

の最小固有値に対する単位固有ベクトルとすることである(符号はZ成分が正になるように選ぶ)。ただし w_α は線分 $A_\alpha B_\alpha$ の重みである。(例えば線分 $A_\alpha B_\alpha$ の長さに、線分がエッジ検出で得られたものならエッジ強度やエッジ幅などを加味したものをとればよい)。この方法によると交点が無限遠方にある場合にも正しく計算できる。

これは次のように導ける。前節に述べたように、共通の交点PのNベクトルmはN本の直線のすべてに直交すべきであり、直線 $A_\alpha B_\alpha$ のNベクトルは $N[a_\alpha \times b_\alpha]$ であるから

$$\sum_{\alpha=1}^N w_\alpha (N[a_\alpha \times b_\alpha], m)^2 \rightarrow \min \quad (3.2)$$

となる単位ベクトル m を求めるのが妥当である。これを式 (3.1) の行列 N を用いて書き直すと m の2次形式 (m, Nm) の最小化となり、よく知られているようにこれを最小にする単位ベクトルは最小固有値に対する単位固有ベクトルである。

このようにして共通の交点 P を定めたら、これらの線分に、厳密に P を通る直線をあてはめることを考える。簡単な方法は端点 A_α, B_α の視差中点 C_α を通る直線をあてはめることである (図6)。点 P の N ベクトルを m とすると、点 C_α の N ベクトルが $N[a_\alpha + b_\alpha]$ であるから、式 (2.6) よりあてはめるべき直線 l_α の N ベクトルは

$$n_\alpha = N[m \times (a_\alpha + b_\alpha)] \quad (3.3)$$

で与えられる (正規化 $N[\cdot]$ は外側に一つあれば、内側のものは除いてよい)。これは交点 P が無限遠方であっても適用できる。

4. 長方形像の補正

画像面上に四辺形 $ABCD$ が検出され、これが空間中の長方形の投影像であることがわかっているとす (図7)。この知識を用いて各辺を補正することを考える。

各頂点の N ベクトルを m_A, m_B, m_C, m_D とする。式 (2.6) より辺 AB, CD の N ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} n_{AB} &= N[m_A \times m_B] \\ n_{CD} &= N[m_C \times m_D] \end{aligned} \quad (4.1)$$

である。したがって辺 AB, CD の交点 P の N ベクトルは式 (2.5) より

$$m_P = N[(m_A \times m_B) \times (m_C \times m_D)] \quad (4.2)$$

である。同様に辺 AD, BC の N ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} n_{AD} &= N[m_A \times m_D] \\ n_{BC} &= N[m_B \times m_C] \end{aligned} \quad (4.3)$$

であり、それらの消失点 Q の N ベクトルは

$$m_Q = N[(m_A \times m_D) \times (m_B \times m_C)] \quad (4.4)$$

である。

点 P は辺 AB, CD の消失点であるから、2節で述べたように m_P が辺 AB, CD の空間中の3次元方向を表す。同様に m_Q が辺 AD, BC の空間中の3次元方向を表す。これらは互いに直交しているはずであるが、画像に誤差があれば必ずしも直交していない。そこでこれを強制的に直交させることを考える。

簡単な方法は、点 P, Q を結ぶ直線上で、それらの視差中点が不変となるように動かして調節することである。その結果得られる新しい点 P', Q' の N ベクトル m'_P, m'_Q は次のように与えられる (図8)。

$$\begin{aligned} m'_P &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N[m_P + m_Q] + N[m_P - m_Q]) \\ m'_Q &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N[m_P + m_Q] - N[m_P - m_Q]) \end{aligned} \quad (4.5)$$

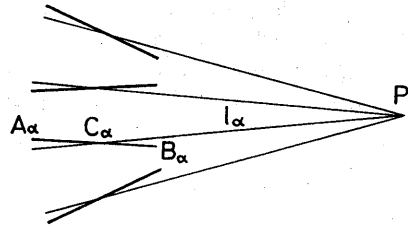


図6 平行線像への直線あてはめ

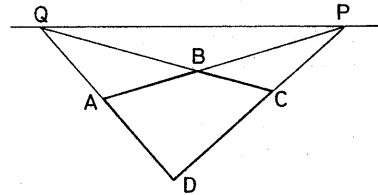


図7 長方形像の補正

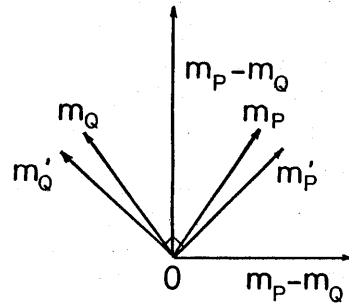


図8 視差直交化

このようにして2点 P, Q を2点 P', Q' に変換することを視差直交化と呼ぶ。これは消失点 P または Q が無限遠方であっても適用できる。

このようにして消失点 P', Q' を補正したあと、前節と同様に各辺を補正する。すなわち、補正した消失点と各辺の視差中点を結んだもので置き換える。式 (2.6) より、補正された辺 AB, BC, CD, DA の N ベクトル $n'_{AB}, n'_{BC}, n'_{CD}, n'_{DA}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} n'_{AB} &= N[m'_P \times (m_A + m_B)] \\ n'_{BC} &= N[m'_Q \times (m_B + m_C)] \\ n'_{CD} &= N[m'_P \times (m_C + m_D)] \\ n'_{DA} &= N[m'_Q \times (m_D + m_A)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. 正方形像の補正

次に四辺形 $ABCD$ が正方形の投影像であるとわかって
いる場合を考える。あらかじめ前節の手法によって、長
方形像としての補間を行なっているとすると(図9)。

式(2.6)より対角線 AC, BD の N ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} n_{AC} &= N[m_A \times m_C] \\ n_{BD} &= N[m_B \times m_D] \end{aligned} \quad (5.1)$$

である。また、辺 AB, CD の消失点 P と辺 AC, BD の消
失点 Q を結ぶ直線(すなわち面 $ABCD$ の消失線)の N ベ
クトルは

$$n_{PQ} = N[m_P \times m_Q] \quad (5.2)$$

である。辺 AC, BD の消失点をそれぞれ R, S とすると、
これらはともに消失線 PQ の上にあるからそれらの N ベ
クトルはそれぞれ消失線との交点として式(2.5)より

$$\begin{aligned} m_R &= N[(m_A \times m_C) \times (m_P \times m_Q)] \\ m_S &= N[(m_B \times m_D) \times (m_P \times m_Q)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

で与えられる。

2節に示したように、これらは対角線 AC, BD の空間
中での3次元方向を表すから、四辺形 $ABCD$ が空間中で
正方形であれば、これらは互いに直交しなければならない。
しかし、画像に誤差があると必ずしも直交している
とは限らない。これに前節の視差直交化をほどこして四
辺形を作り直せば、そのままでは辺 AB, CD と辺 $AC,$
 BD の直交性(すなわち $(m_P, m_Q) = 0$)がくずれてし
まう。そこで $(m_P, m_Q) = 0$ と $(m_R, m_S) = 0$ が同時に
成立するように図形を書き直す反復手順を考える。

まず、消失点 R, S に視差直交化を行い。新しい消失点
 R', S' の N ベクトルを m'_R, m'_S とする。対角線 AC, BD
の交点を E とすると、その N ベクトルは

$$m_E = N[(m_A \times m_C) \times (m_B \times m_D)] \quad (5.4)$$

で与えられる。まず、新しい対角線として、 AC, BD を
 RE, SE に置きかえる。

まず頂点 A を考える。対角線 RE と辺 AB との交点を
 A_1 、辺 AD との交点を A_2 とすると(図9)、それぞれの N
ベクトルは

$$\begin{aligned} m_{A_1} &= N[(m_R \times m_E) \times (m_A \times m_B)] \\ m_{A_2} &= N[(m_R \times m_E) \times (m_A \times m_D)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

である。そこで頂点 A を点 A_1, A_2 の視差中点を $\bar{A}$ に置き
換える。その N ベクトルは

$$\bar{m}_A = N[m_{A_1} + m_{A_2}] \quad (5.6)$$

である。同様にして頂点 B, C, D を $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ に置き換え、
それらの N ベクトルを $\bar{m}_B, \bar{m}_C, \bar{m}_D, \bar{m}_E$ とする。

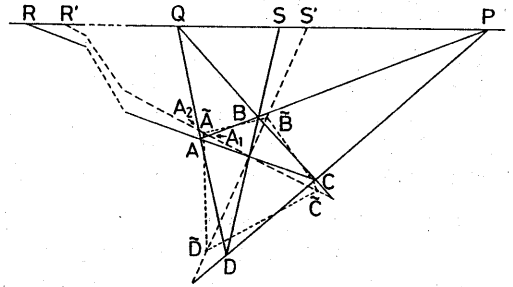


図9 正方形像の補正

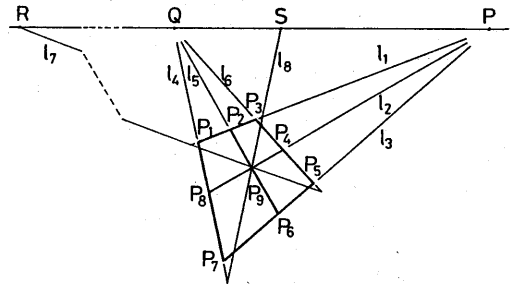


図10 正方向格子パターンの投影像

最後に辺 AB を消失線 P と点 $\bar{A}, \bar{B}$ の視差中点を通る直
線に置き換える。同様にして BC, CD, DA も消失点と視
差中点を通るものに置き換える。それぞれの N ベクトル
は次のようになる。

$$\begin{aligned} n'_{AB} &= N[m_P \times (\bar{m}_A + \bar{m}_B)] \\ n'_{BC} &= N[m_Q \times (\bar{m}_B + \bar{m}_C)] \\ n'_{CD} &= N[m_P \times (\bar{m}_C + \bar{m}_D)] \\ n'_{DA} &= N[m_Q \times (\bar{m}_D + \bar{m}_A)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

書き直された四辺形の新しい頂点 A', B', C', D' の N ベ
クトルはそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} m'_A &= N[n'_{AB} \times n'_{DA}] \\ m'_B &= N[n'_{BC} \times n'_{AB}] \\ m'_C &= N[n'_{CD} \times n'_{BC}] \\ m'_D &= N[n'_{DA} \times n'_{CD}] \end{aligned} \quad (5.8)$$

この新しい四辺形に対して再び対角線の消失点 R'', S''
を計算し、その N ベクトル m''_R, m''_S が $(m''_R, m''_S) < \sin \theta$
であれば終了し、そうでなければ上述の手順を反復する
(θ はあらかじめ設定した微小な許容できる角度の誤差)。

6. 正方格子像の補正

最後に応用として、図10のような正方格子パターンの投影像の補正を考える。基本的に前節の方法を用いればよいが、各点のNベクトルと各直線のNベクトルが与えられていれば、次のようにするのが便利である。計算は前節までに示したように、すべてNベクトルで行う。

1. 直線 l_1, l_2, l_3 の共通の消失点 P を3節の方法で推定し、 l_1, l_2, l_3 を P と頂点 P_2, P_9, P_6 を通るものにそれぞれ置き換える。同様に、直線 l_4, l_5, l_6 の共通の消失点 Q を推定し、 l_4, l_5, l_6 を Q と頂点 P_8, P_9, P_4 を通るものにそれぞれ置き換える。
2. 直線 $l_1, \dots, l_6$ によって作られる格子パターンの頂点を計算し直し、それを改めて $P_1, \dots, P_9$ とする。
3. 対角線 P_1P_8 と P_3P_7 の消失点 R, S を前節のようにして計算し、そのNベクトルが(設定したしきい値内で)直交していれば終了する。そうでなければ R, S に視差直交を行ない、新しい消失点改めて R, S とする。
4. 消失点 R, S と点 P_9 を通る直線 l_7, l_8 をつくる。
5. 直線 l_7 と直線 l_1, l_4 との交点をそれぞれ P_{11}, P_{14} とし、それらの視差中点を $\bar{P}_1$ とする。同様にして、点 $\bar{P}_3, \bar{P}_5, \bar{P}_7$ を計算する(図10)。
6. 直線 l_1 を消失点 P と点 $\bar{P}_1, \bar{P}_3$ の視差中点を通るものに置き換えて、それを改めて l_1 とする。同様にして l_3, l_4, l_6 を新しいものに書き直す。
7. 直線 l_1, l_4 の交点を改めて P_1 と置く。同様にして、頂点 P_3, P_5, P_7 を新しく書き直す。
8. 対角線 P_1P_8, P_3P_7 の交点を改めて P_9 と置く。そして、直線 l_2 を消失点 P と点 P_9 を通るものに置き換えて、それを改めて l_2 とする。同様にして、直線 l_5 を消失点 Q と点 P_9 を通るものに置き換えて、それを改めて l_5 とする。
9. 直線 l_2 と直線 l_4, l_6 の交点をそれぞれ改めて P_8, P_4 と置く。同様に、直線 l_5 と直線 l_1, l_3 の交点をそれぞれ改めて P_2, P_6 と置く。
10. 手順3へ戻る。

[実験例] 図11は正方格子パターンを撮影した実画像である。これからエッジ検出、最小二乗法を用いて直線をあてはめて得られた線画が図12の実線である。これに上に述べた補正を加えて修正したものが図12の破線である。しきい値を $\theta = 6.0 \times 10^{-15}(\text{deg})$ とすると5回での収束が収束した。頂点のずれの最大距離は5画素である。

7. まとめ

本論文では、画像上に検出されたいくつかの直線が空間中では平行である、あるいは直交しているという知識を利用して、射影幾何学から導かれる拘束条件が満たされるようにサブ画素精度で直線あてはめを行なう方法を平行線の像、長方形像、正方形像、正方格子像について示した。すべての計算は「Nベクトル」と呼ぶ単位ベク

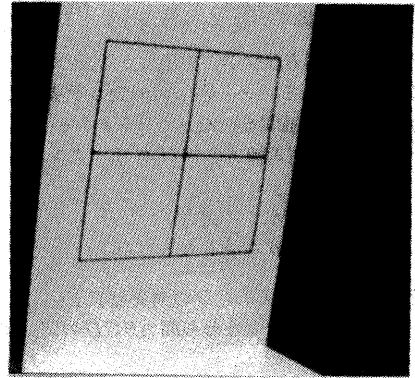


図11 正方格子パターンの実画像

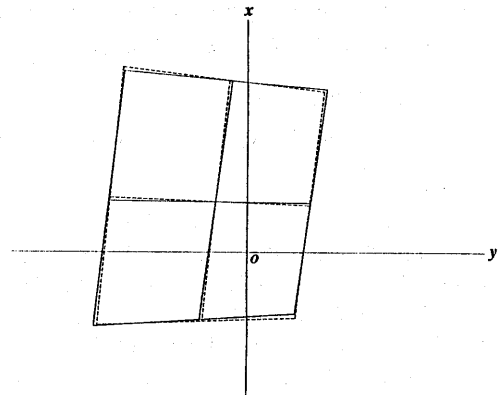


図12 正方格子パターンの補正

トルによって行なうので、無限遠に位置する可能性のある消失点の画像座標や消失線の方程式を計算する必要がない。

もちろん、このような補正を行なう方法は、本論文に示した“視差中点”を用いる方法が最も簡単な方法ではあるが、それ以外にも考えられる。単に射影幾何学的拘束条件が満たされればよいということであれば任意の補正が考えられるが、そのうちのどれが“最適”かをどのようにに評価するか難しい。また、正方形と正方格子の場合に反復を用いており、幾何学的考察から望ましい図形に近づいていくことは当然と思われるが、収束の理論的証明を与えることは困難である。

さらに、本論文のすべての方法は透視変換の“焦点距離” f が正確に既知であると仮定している。そのためには正確なカメラキャリブレーションがあらかじめ必要となる。しかし、いったん f の値さえ定まれば、カメラ座標系の空間座標系に対する「位置パラメータ」や、カメラを移動するときの「運動パラメータ」の決定には本論

文の方法が利用できる^{3,5)}。また、パターンが正方格子の場合であることを利用してカメラ座標系の向きや回転を計算しようとする、原データを用いたのでは計算に矛盾が生じたり、計算される回転の行列が直交行列でないことが生じる。本論文のように補正してあれば、射影幾何学的に正しい図形になっているから、そのようなことは生じない。

本論文ではカメラが透視変換でモデル化できることが前提になっているが、そうでない場合(空間中の直線が画像面上では曲線として写る場合など)は、あらかじめ画像全体の補正が必要である。これについては今後の課題として引き続き検討する。

参考文献

- [1] 金谷健一:「画像理解 / 3次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [2] K. Kanatani: *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, 1990.
- [3] 森尻智明, 小野寺康浩, 金谷健一: 2画像からの平面の3次元運動の計算, 情報処理学会研究報告, 90-CV-67 (1990-07).
- [4] 小野寺康浩, 金谷健一: 計算射影幾何学, 情報処理学会研究報告, 89-CV-61 (1989-07).
- [5] 小野寺康浩, 金谷健一: 計算射影幾何学によるカメラキャリブレーション, 情報処理学会研究報告, 90-CV-68 (1990-09).

付録 複比と調和点列

画像面上の同一直線上の相異なる4点 $\{A, B, C, D\}$ の複比(または非調和比)は次のように定義される(図A1)。

$$[ABCD] = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD} \quad (A.1)$$

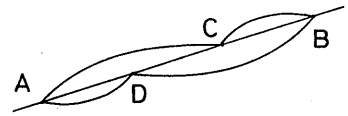
ただし、4点 $\{A, B, C, D\}$ を通る直線 l にある向きを定め、たとえば AC はその向きと基準とする A から B までの“符号つき距離”とする(したがって $AC+CA=0$)。

4点 A, B, C, D の N ベクトルをそれぞれ m_A, m_B, m_C, m_D とし、直線 l の N ベクトルを n とすると、上式は N ベクトルにより

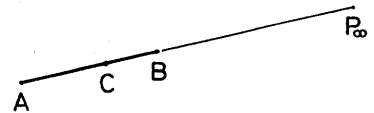
$$[ABCD] = \frac{|m_A m_C n|}{|m_B m_C n|} / \frac{|m_A m_D n|}{|m_B m_D n|} \quad (A.2)$$

と表せることが確かめられる。¹⁾ ただし $|abc| = (a \times b, c) = (c \times a, b) = (b \times c, a)$ はベクトルのスカラー三重積である。

$[ABCD] = -1$ のとき4点 $\{A, B, C, D\}$ は調和点列であるという。空間中の直線 l 上に異なる3点を取り、そ



図A1 複比



図A2 調和点列

れらの投影像を A, B, C とすると、空間中で点 C が点 A, B の中点である必要十分条件は $[P_1 CAB] = -1$ 、すなわち $\{P_1, C, A, B\}$ が画像面上で調和点列となることであることが容易に確かめられる(図A2)。ただし、 P_1 は直線 l の画像面上の消失点である。

このことから図10の正方格子パターンでは次の9組の4点がすべて調和点列でなければならない。

$$\begin{aligned} &\{P, P_2, P_1, P_3\}, \quad \{P, P_9, P_8, P_4\} \\ &\{P, P_6, P_7, P_5\}, \quad \{Q, P_8, P_7, P_1\} \\ &\{Q, P_9, P_6, P_2\}, \quad \{Q, P_4, P_5, P_3\} \\ &\{R, P_9, P_5, P_1\}, \quad \{S, P_9, P_7, P_3\} \\ &\{P, Q, R, S\} \end{aligned} \quad (A.3)$$

したがって、これらがすべて調和点列になるように、式(A.2)を用いて N ベクトルを修正して、正方格子パターンを補正することも考えられる。しかし簡単な手続きを構成することが難しいし、そのように補正しても原パターンが正方格子である保証はない(平行四辺形格子でもよい)。実際、上の9組がすべて調和点列である必要十分条件は、どの組の4点も“共線”であること(すなわち同一直線にあること)にすぎない。どの4点も共線であれば、原パターンの形にかかわらず、射影幾何学の定理によりこれらすべてが調和点列であることが証明できる(特に $\{P, Q, R, S\}$ が調和点列であることは完全四辺形の定理として知られている)。以上より、本文に述べた補正法が必要であり、かつ実際的である。