

一般化モーメント変換によるオプティカルフロー

田村進一 ロバート クローズ 内藤博昭 原田貢士+ 小塚隆弘+
大阪大学医学部 機能画像診断学研究所
+同放射線科

565 吹田市山田丘2-2
E-mail: tamuras@medsch.osaka-u.ac.jp

あらまし 従来、オプティカルフローは局所的な処理を出発点とするボトムアップの手法により求められていた。これに対して本論文では、画像全体の動きを低次モードより順次展開していくトップダウンの手法を新しい手法として提案する。

たとえば医用画像において、その強度は動きがあっても不変に保たれることが多い。そのような画像系列においては、動きは座標変換によって対応付けられる。もし画像端効果が無視できるなら、変換の形式は2枚の画像の一般化モーメントから求められる。見かけ上の変位場は線形化モーメント方程式の関数に関する導関数を利用する投影法によって、反復計算で求めることができる。taggingされたシネMRI系列画像のペアを用いてこの方法の有効性を示す。変換された初期画像を目標画像と比較することにより、計算された動きの精度を調べる。

和文キーワード 動画像, オプティカルフロー, 医用画像, MRI, モーメント変換

O p t i c a l f l o w b y g e n e r a l i z e d m o m e n t t r a n s f o r m

Shinichi Tamura, Robert Close, Hiroaki Naito, Koushi Harada+, Takahiro Kozuka+

Div. of Functional Diagnostic Imaging, Osaka University Medical School
2-2 Yamadaoka, Suita, Osaka 565, Japan

+Department of Radiology

Abstract

The intensity of medical images usually represents a quantity which is conserved during motion. Hence sequential images are ideally related by a coordinate transformation. If edge effects can be neglected, the form of the transformation can be determined from the generalized moments of the two images. The equations which transform arbitrary generalized moments from a source image to a target image are expressed as a function of the displacement field. The apparent displacement field is then computed iteratively by a projection method which utilizes the functional derivatives of the linearized moment equations. This method is demonstrated using a pair of sequential tagged cine MRI images. The accuracy of the computed motion is tested by comparing the transformed source image with the target image.

英文 key words Motion image, Optical flow, Medical image, MRI, Moment transform

1. はじめに

各種画像からの動き計測に関心が持たれているにも拘らず、これまで十分に一般的な動き計測技術は開発されていない。これまで使われてきた2種類の技術は、勾配法とパターンマッチング法である。勾配法は各画像において明度勾配の方向に小さな変位を計算する微分的連続の式を利用する[1]。そして、動き場の残りは正則化によって決定されるが、これは滑らかさ拘束を利用している。変位は画像中の強度勾配のスケール長に比べて小さくなければならないという問題点を勾配法はもっている。パターンマッチング法は基本的には大きな変位も計測可能であるが、画像系列においてパターンの同定を必要とする。パターンはエッジ、または他の構造、または単に第2の画像を探すための核として使われる第1の画像中の領域でよい[2]。パターンマッチング法は、もしパターンがあいまい（たとえば繰り返し構造を持つ）であったり、動きがその形を大きく歪ませるときには失敗することがある。taggingされたMRIを用いるときには計測のためtagの交点のみを用いることが通例であり、そのため空間分解能はtagの間隔で制限される[3]。

本稿で述べる画像系列から動きを計算するもっと一般的な方法は、明るさの不変性と系列画像の一般化モーメント間について得られた関係に基づく。線形化モーメント変換式が拘束として用いられ、動きは凸集合上への投影法(POCS)によって計算される。POCSは途中解が次々と様々な拘束式の凸解空間上へ投影される反復手法である[4, 5]。これまでのPOCS法の動き推定への応用は、正則化もしくは明度勾配から計算されるオペティカルフローへの当てはめを目的としていた[6-8]。本稿ではPOCSは、明度勾配に直接的には依存しない大域的拘束方程式群を解くために用いられる。

なお、医用画像における変位場の計測は病気診断への多くの可能性をもっている。心臓の運動解析は心エコー図[9]、シネCT[6]、およびMRI[10]の各モダリティ画像を用いて試みられてきた。最近開発されたシネMRIのtaggingテクニックは心臓の運動[11]、血流、および脳脊髄液流[12, 13]を計測するために用いられた。また血流と心機能は、平均推移時間計測[14]、大域的質量保存[14, 15]、エッジ追跡[16]、時間的相互相関[17]、空間的相互相関[18-20]、および流体の連続性[21, 22]、を含む広い範囲の技術を用いて、デジタルサブトラクションアンギオグラム画像から計算されている。われわれは上に述べた方法をすでに単純な合成画像について適用した[23]が、本稿ではこの方法をシネMRI tagging画像に適用して心筋の動きを計測し、本手法が有効な手法であることを示す。

2. 手法

もし、画像強度が不変量を表すなら、動きは座標変換 $\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{s}(\underline{r}_1)$ とみなすことができ、画像強度は次式で関係づけられる。

$$\rho_2(\underline{r}_2) = \rho_1(\underline{r}_1) \quad (1)$$

これは強度一定式の一般形である。このような場合、任意の関数 $g_n(\underline{r})$ に対してつぎの関係式が成立する：

$$\int_{\text{Range}} d\underline{r}_2 g_n(\underline{r}_2) \rho_2(\underline{r}_2) = \int_{\text{Domain}} d\underline{r}_1 J_D(\underline{r}_1) g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}) \rho_1(\underline{r}_1) \quad (2)$$

ここで、Domainは $\underline{r}_1$ に関する処理対象領域、Rangeはそれに対応する $\underline{r}_2$ の値域を表す。 $J_D(\underline{r}_1)$ は次式を要素とするヤコビアン行列の行列式の値である：

$$J_{ij} = \frac{\partial r_{2j}}{\partial r_{1i}} = \delta_{ij} + \frac{\partial s_j(\underline{r}_1)}{\partial r_{1i}} \quad (3)$$

等式 $d\underline{r}_2 = J_D(\underline{r}_1) d\underline{r}_1$ は微分面積要素に関する式である。式(2)は強度分布 $\rho_1(\underline{r})$ （または $\rho_2(\underline{r})$ ）に対する重み付け関数 $g_n(\underline{r})$ から計算される一般化モーメント変換を表す。画像は有限区間においてのみサンブルされ、また雑音または撮像誤差は動きに関係なく画像強度を変化させ得るので、要素 J_D は独立変数とみなすことができる。divergence量 $(\Delta J_D) \rho_1$ は本質的に明るさ変化を表す源入力項(source term)である。すなわち、対象の生成、消滅や、層外からの流入出による項であり、それらがないとすると理想的には0である。さまざまなモーメント重み $g_n(\underline{r})$ を選ぶことによって、未知運動 $\underline{s}(\underline{r}_1)$ に対して方程式系列が生成され得る。たとえば、 $g_n(\underline{r}) = x$ および $g_n(\underline{r}) = y$ を用いることによりつくられる変換方程式の解は、“質量”の中心の運動を表す均一な変位を生成するであろう。原理的にはN個の独立方程式は動き場のN個の係数を計算するのに十分であろう。しかしながら、大きなNに対してそのような方程式群を同時に解くことは計算量的に不可能である、というのは線形化した方程式の計算は画像上で N^2 回の積分を必要とするであろうし、得られた $N \times N$ 行列の逆を求める計算は $O(N^3)$ 過程であるからである。それゆえ、凸集合上への投影法(POCS)を用いる。この方法では方程式は拘束の集合として取り扱われ、解は各方程式の解空間上への反復投影によって得られる（各反復に対して $O(N)$ 過程である）。

次のようにして記法を簡単にする：

$$In = \int_{\text{Range}} d\underline{r}_2 g_n(\underline{r}_2) \rho_2(\underline{r}_2) \quad (4)$$

$$Hn(\underline{s}) = \int_{\text{Domain}} d\underline{r}_1 J_D(\underline{r}_1) g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}) \rho_1(\underline{r}_1) \quad (5)$$

定義 $\underline{s} = \underline{s}_0 + \delta \underline{s}$, $Hn(\underline{s}) = Hn(\underline{s}_0) + \delta Hn$, $J_0(\underline{r}_1) = J_0 + \delta J$ を用いて, 線形化されたモーメント変換方程式は次のように表現される:

$$\delta Hn = Hn - Hn(\underline{s}_0) = \int_{\text{Domain}} d\underline{r}_1 \{ J_0 \left[\frac{\partial g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)}{\partial \underline{s}} \right] \cdot \delta \underline{s} + g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \delta J \} \rho_1(\underline{r}_1) \quad (6)$$

いまや, 変位は $\underline{v} = (\delta s_x, \delta s_y, \delta J)$ のように一般化することができる。ここに, $\delta \underline{s} = (\delta s_x, \delta s_y)$ である。ここで, スカラー, 2次元ベクトル, および3次元ベクトルを次式で定義する。

$$\|\delta J\|^2 = \int d\underline{r}_1 \rho_1(\underline{r}_1) |\delta J(\underline{r}_1)|^2$$

$$\|\delta \underline{s}\|^2 = \|\delta s_x\|^2 + \|\delta s_y\|^2$$

$$\|\delta \underline{v}\|^2 = \|\delta \underline{s}\|^2 + \alpha^2 \|\delta J\|^2$$

ここで, α^2 は非負重み因子である。このとき, $\underline{v}$ のノルムはつぎようになる。

$$\|\underline{v}\|^2 = \int_{\text{Domain}} d\underline{r}_1 \rho_1(\underline{r}_1) (|\delta s_x|^2 + |\delta s_y|^2 + \alpha^2 |\delta J|^2) \quad (7)$$

投影演算は拘束方程式(6)のもとでノルム $\|\underline{v}\|$ を最小化することによりなされる。微分 $g_{nx} = \partial g / \partial x$ および $g_{ny} = \partial g / \partial y$ をもつ重み関数 $g_n(\underline{r})$ に対して, 解はつぎようになる。

$$\delta s_n = \frac{\alpha^2 [Hn - Hn(\underline{s}_0)] J_0}{\int d\underline{r}_1 \rho_1(\underline{r}_1) \{ \alpha^2 J_0^2 [g_{nx}(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)^2 + g_{ny}(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)^2] + g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)^2 \}} \begin{pmatrix} g_{nx}(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \\ g_{ny}(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\delta J_n = \frac{[Hn - Hn(\underline{s}_0)]}{\int d\underline{r}_1 \rho_1(\underline{r}_1) \{ \alpha^2 J_0^2 [g_{nx}(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)^2 + g_{ny}(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)^2] + g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}_0)^2 \}} g_n(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (9)$$

したがって, 変位 $\delta \underline{s}_0(\underline{r}_1)$ はオフセット位置 $\underline{r}_1 + \underline{s}_0$ で評価された重み関数の勾配に比例することがわかる。これらを用いて, 変位 $\underline{s}_0(\underline{r}_1)$ および δJ_0 は各投影 p ごとに, つぎのように更新される。

$$\begin{aligned} \underline{s}_0(\underline{r}_1) &\leftarrow \underline{s}_0(\underline{r}_1) + \delta \underline{s}_0(\underline{r}_1) \\ \delta J_0(\underline{r}_1) &\leftarrow \delta J_0(\underline{r}_1) + \delta J_0(\underline{r}_1) \end{aligned}$$

対象画像の濃度変化を許すためには, モーメントを画像の濃度積分値で正規化すればよい。動きのステップサイズは $\|\delta \underline{s}\| \leq w / 4 (n_x^2 + n_y^2)$ に制限されているとする。ここで, w は画像サイズ(大きさ)である。定数 α は最初の反復処理では無限大であるが, その後の第 i 反復計算では以下のように設定される:

$$\alpha_{i+1}^2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sum_{n=1}^P \|\delta \underline{s}_n^{(i)}\|^2}{\sum_{n=1}^P \|\delta J_n^{(i)}\|^2} \quad (10)$$

ここに P は第 i 反復における投影数を表し, ε (以下では0.001) は大まかには δJ が非ゼロであることを許すことによって生じた $\|\delta \underline{s}^{(i)}\|^2$ における相対的精度の減少を表わしている許容値である。望ましい解は2枚の画像の一般化モーメントの差を説明する空間周波数のうち最も低次のものであろう。そこで各反復の間, 変位に対する補正は低次から高次へと計算される。最初の反復では, 各次数における補正はそれより低次の変位の和に直交するように強制する。すなわち, 反復回数 $i=1$ において,

$$\int d\underline{r}_1 \rho_1(\underline{r}_1) \left(\sum_{j=1}^{P-1} \delta \underline{s}_j^{(1)}(\underline{r}_1) \right) \cdot \delta \underline{s}_P^{(1)}(\underline{r}_1) = 0 \quad (11)$$

これは, 解から $\delta \underline{s}_j^{(1)}$ の並行成分を減算することにより行われる。この拘束は低次モーメントを保存することを助けるが, もっと反復を重ねたときには徐々に緩和される。すなわち, $\delta \underline{s}_j^{(1)}$ の並行成分をすべてではなく, 一部を減算することにより, 緩和を行う。動きが計算された後は, 初期画像 $\rho_1(\underline{r})$ は次の方程式によって変換される:

$$\rho'(\underline{r} + \underline{s}(\underline{r})) = J_0(\underline{r}) \rho_1(\underline{r}) \quad (12)$$

図1はモード数を増加させたときの解の変遷を示す[23]。16×16の初期画像と目標画像は tagging されたシネMRIを用いて血管画像をシミュレートしたものである。10回の反復後の計算された動きが, モード数 n_x と n_y の範囲内で示されている。

臨床MRI画像に対しては動きを計算した後, 変換された初期画像 $\rho'(\underline{r})$ が観測された目標画像 $\rho_s(\underline{r})$ と比較される。丸め誤差を最小とするため, 変位した各原画素の強度は各画素の中心からの距離の逆数に比例して変換された画像中の最近隣4画素中にばらまかれる。すなわち, 推定画像は

$$\rho'(i', j') = \sum_{i, j} W(i', j', x', y') J_0(i, j) \rho_1(i, j) \quad (13)$$

ここに, $(x', y') = (i + s_x, j + s_y)$ は元の離散的画素座標 (i, j) を変換・写像した座標(連続値をとる)であり, $W(i', j', x', y')$ はその点の画素値を最近隣4画素中にばらまく重みである。これは次で与えられる。

$$\begin{aligned}
W(i', j', x', y') &= 0 \quad |i'-x'| \geq 1 \text{ または } |j'-y'| \geq 1 \text{ のとき} \\
&= \frac{(|i'-x'|^2 + |j'-y'|^2)^{-1/2}}{\sum_{\substack{i'', j'' \\ |i''-x'| < 1 \\ |j''-y'| < 1}} (|i''-x'|^2 + |j''-y'|^2)^{-1/2}} \quad (14) \\
&\quad |i'-x'| < 1 \text{ および } |j'-y'| < 1 \text{ のとき}
\end{aligned}$$

この画像においては計算と表示の都合上、 $d_{\underline{r}'} = d_{\underline{r}_1}$ が暗黙のうちに仮定されている。すなわち、(12)、(13)で $d_{\underline{r}'} = J_0(\underline{r}_1) d_{\underline{r}_1}$ ではなく、 $\rho'(\underline{r}') = J_0(\underline{r}_1) \rho_1(\underline{r}_1)$ としたことにより、 $d_{\underline{r}'} = d_{\underline{r}_1}$ によって $\rho'(\underline{r}') d_{\underline{r}'} = J_0(\underline{r}_1) \rho_1(\underline{r}_1) d_{\underline{r}_1}$ が満たされる。このように、 J_0 を $d_{\underline{r}}$ ではなく ρ のほうに結び付けたことにより、大きな動き勾配のあるところでは、画像値が斑模様となった。そのため、目標画像 $\rho_2(\underline{r}_2)$ と比較を行うときには適当な平滑化を行う必要がある。

3. 結果

2枚の時系列的 80×80 各1バイトの心臓の tagging シネMRI画像を使用した(図2)。tagging は心電図R波に同期して presaturation により印加されている。tag は原画像において信号欠損となっているため、最初に画像の反転を行った。動きの計算は変位関数 $\cos(kx)\cos(qy)$ および $\sin(kx)\sin(qy)$ に対する 20×20 モード数を用いた。重み関数はこれらの変位関数の x -および y -積分である。10回の反復計算で求められた動きとヤコビアンを初期画像に対して適用すると、図3に示す目標画像に近い出力画像が得られた。これらの画像をまた 3×3 中間値フィルタでフィルタ処理し、図4を得た。画像は全画素上で平均をとった平均二乗誤差(MSE)を計算して比較を行った。表1はいろいろな画像の間のMSEを示す。計算で得られた変位の相対的大きさを図5に示す。比較のため明度勾配(正則化なし)から計算された変位の大きさを合わせて示す。

拡散、スピン緩和、アーティファクト、雑音、およびモード数制限のため、結果が正確に一致することは期待できない。また、画像強度間のよい一致は正しい動き計測を保證するものではない。しかしながら、出力画像が初期画像よりも目標画像により近いことは明かである。フィルタ出力と目標画像間の一致はとくによい。これは高周波変位モードが排除されたことによるのであろうと思われる。

図6には直交方向に2本づつ tag を印した左室短軸シネMRIの心尖側から見た(a)収縮早期像、および(b)収縮末期像を示す。図の縦と横にそれぞれ2本づつ黒い平行線が心筋につけられている。これらは左室の収縮に伴って変位し、収縮期にはくさび状に変形していくことがわかる。図7には tag を強調したこれらの $\nabla \rho'$ (差)画像を示す。図8には本手法により求めた収縮時の動き場を示す。心収縮に伴う左室全体としての concentric (convergent) な動き、左室壁の各部でのくさび状変形、左室前壁(図の上のほう)の時計方向回転、左室下壁(図の下の方)の反時計方向回転などが表示されており、妥当な結果が得られている。

本手法においては、基本的には必ずしも tag を必要としないが、tag が多いほうが動きが正確に求まる。

4. むすび

明度保存画像に対して、一般化モーメント変換に基づく動き計測を用い、MRI系列画像のペアから見かけの動きを計算した。計算された動きを用いて初期画像を変換することにより得られた出力画像は目標画像とうまく一致することが確かめられた。また、動き場(変位)も臨床的に納得いく結果が得られた。しかしながら基本的には、計算された変位は見かけの動きのみを表しているもので、真の動き場のもっとよい推定値を求めるためには他の手法も考慮する必要があることを強調しておく必要がある。

本手法は画像強度が不変量を表しているといえるときに有効である。動きはまた一般化モーメント変換式の線形化を正当化できるほど十分滑らかでなければならない。三角関数重み関数に対してこの条件は各空間モードの大きさがその波長に比べて小さいという制限となる。

現在のアルゴリズムは多くの積分を実行しなければならないため、大きなモード数に対して通常のワークステーションで非常に多くの時間がかかる。ここに示した例では、 80×80 画像の $20 \times 20 = 400$ モード数に対して、28.3 MIPS ワークステーション上で1回の反復計算当たりおよそ30分かかる。しかしながら本手法は処理スピードをかなり高速化できる高速フーリエ変換(FFT)と並列処理手法に非常に適したものになっている。FFT手法を用いるためには、各投影後に重み関数がアップデート画像の積分座標において評価できるよう画像をアップデートしなければならない。現在のアルゴリズムでは動き場とヤコビアン因子のみがアップデートされる形式となっている。

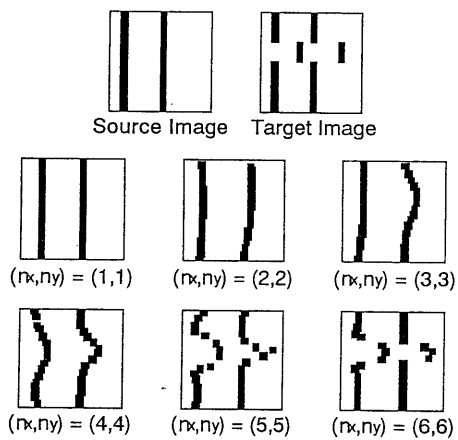


図1. モード数 $n_x \times n_y$ を増加させたときの
16×16合成画像の解の変化

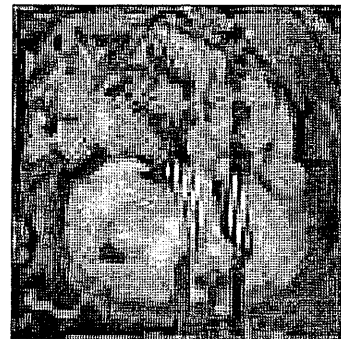


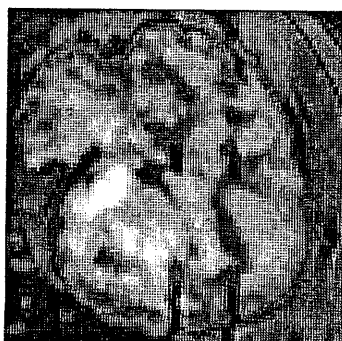
図3. 変換によって得た目標画像に対する推定画像



(a) 初期画像

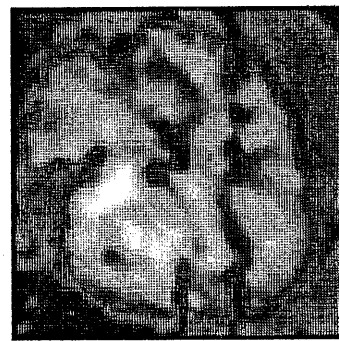


(a) 推定画像に適用



(b) 目標画像

図2. tagging シネMRI画像

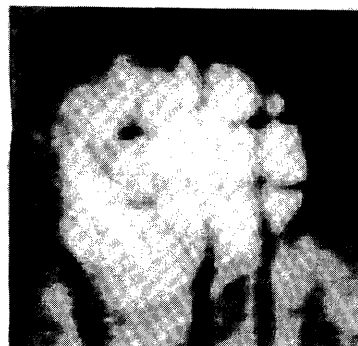


(b) 目標画像に適用

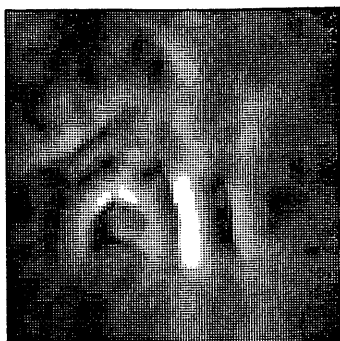
図4. 3×3平均値フィルタ適用結果

表1. 画像間の平均二乗誤差

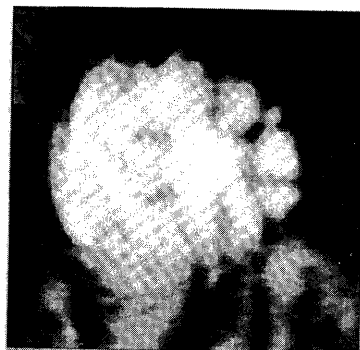
Source - Target	1635
Output - Target	728
Filtered Source - Filtered Target	1040
Filtered Output - Filtered Target	157
Target - Filtered Target	1579



(a) 収縮早期

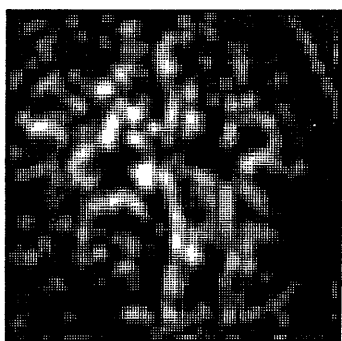


(a) 一般化モーメント変換



(b) 収縮末期

図6. 直交方向に各2本 tag 印加した左室短軸シネMRI像



(b) 勾配法

図5. 変位の相対的大きさ(白色は大きな変位を表す)



図7. 図6のサブトラクション(差)画像. 図6の(a)の tag line は黒く, (b)のそれは白く表示されている.



図8. 図6に本法を適用して得た動き場。

文献

- [1]. B.K.P. Horn and B.G. Schunck, "Determining optical flow," *Artif. Intell.*, 17, pp.185-204, 1981.
- [2]. G.E. Trahey, J.W. Allison, and O.T. von Ramm, "Angle independent ultrasonic detection of blood flow," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, BME-34(12), pp.965-967, 1987.
- [3]. E.R. McVeigh and E.A. Zerhouni, "Noninvasive measurement of transmural gradients in myocardial strain with MR imaging," *Radiology*, 180, pp.677-683, 1991.
- [4]. J.B. Rosen, "The gradient projection method for nonlinear programming. Part I. Linear constraints," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8(1), pp.181-217, 1960.
- [5]. J.B. Rosen, "The gradient projection method for nonlinear programming. Part II. Nonlinear constraints," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 9(4), pp.514-532, 1961.
- [6]. S.M. Song and R.M. Leahy, "Computation of 3-D velocity fields from 3-D cine CT images of a human heart," *IEEE Trans. Med. Imaging*, 10(3), pp.295-306, 1991.
- [7]. P.Y. Simard and G.E. Mailloux, "A projection operator for the restoration of divergence-free vector fields," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 10(2), pp.248-256, 1988.
- [8]. G.E. Mailloux, F. Langlois, P.Y. Simard, and M. Bertrand, "Restoration of the velocity field of the heart from two-dimensional echocardiograms," *IEEE Trans. Med. Imaging*, 8(2), pp.143-153, 1989.
- [9]. G.E. Mailloux, A. Bleau, M. Bertrand, and R. Petitclerc, "Computer analysis of heart motion from two-dimensional echocardiograms," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, BME-34(5), pp.356-364, 1987.
- [10]. C.B. Higgins, W. Holt, P. Pflugfelder, and U. Sechtem, "Functional evaluation of the heart with magnetic resonance imaging," *Med. Res. Med.* 6, pp.121-139, 1988.
- [11]. E.A. Zerhouni, D.M. Parish, W.J. Rogers, A. Yang, and E. P. Shapiro, "Human heart: Tagging with MR imaging - A method for noninvasive assessment of myocardial motion," *Radiology*, 169(1), pp.59-63, 1988.
- [12]. 紀ノ定保臣, 中川毅, "磁気標識法を用いた新しい流れの定量的計測手法の開発", *医用電子と生体工学*, 29(2), pp.123-129, 1991.
- [13]. 堀信二郎, 野村敏光, 松下孝之, 田村俊世, 蛭名良雄, 三浦俊郎, 沢近節, 上野由美子, "MR流れ磁気標識画像のコンピュータ解析", *信学技報*, MBE91-79, pp.17-22, 1992-1.
- [14]. K.L. Zierler, "Theoretical basis of indicator-dilution methods for measuring flow and volume," *Circ. Res.*, 10, pp.393-407, 1962.
- [15]. H. Marinus, B. Buis, and A. van Benthem, "Pulsatile coronary flow determination by digital angiography," *Int. J. Cardiac Imaging*, 5, pp.173-182, 1990.
- [16]. U. Permer, H. Huber, K.L. Neuhaus, F.K. Schmiel, and P.S. piller, "Measurement of flow velocity in the model circulation by videodensitometry," *Basic Res. Cardiol.* 73, pp.361-377, 1979.
- [17]. L. Rosen and N.R. Silverman, "Videodensitometric measurement of blood flow using cross correlation techniques," *Radiology*, 109, pp.305-310, 1973.
- [18]. D.K. Swanson, P.D. Myerowitz, J.O. Hegge, and K.M. Watson, "Arterial blood-flow waveform measurement in intact animals: New digital radiographic technique," *Radiology*, 161, pp.323-328, 1986.
- [19]. A.M. Seifalian, D.J. Hawkes, A.C.F. Colchester, and K.E. F. Hobbs, "A new algorithm for deriving pulsatile blood flow waveforms tested using simulated dynamic angiographic data," *Neuroradiology*, 31, pp.263-269, 1989.
- [20]. K.R. Hoffman and K. Doi, "A new angiographic technique for measurement of instantaneous blood flow rates using distance-density curves," *SPIE vol.1233, Medical Imaging IV: Image Processing*, pp.240-243, 1990.
- [21]. 杉本, 柳原, 菅原, 宇山: 動画像処理による冠動脈内血流解析法に関する基礎的研究, *信学技報MBE89-121*, pp.59-66, 1989.
- [22]. R.A. Close, G.R. Duckwiler, and F. Viñuela, "Fluid equations applied to blood flow measurement using digital videodensitometry," *Invest. Radiol.*, 1992.
- [23]. Close R, Tamura S, Naito H, Harada K, and Kozuka T, "Computation of motion using moment transformation equations, 92年画像の認識・理解(MIRU'92) シンポジウム講演論文集I, pp.103-112, 札幌, 1992年7月16-18日.

付録：変位の推定（本項ではPOCS法の公式を用いず，直接導く方法を示す）

重み関数を $g(\underline{r})$ ，その微分を $g_x = \partial g / \partial x$ ， $g_y = \partial g / \partial y$ ， $\underline{g}_s = (g_x, g_y)$ とする．また， $(\delta s_x, \delta s_y, \delta J) = a(\xi_x, \xi_y, \eta)$ ，および $\underline{\xi} = (\xi_x, \xi_y)$ とする．このとき，線形化モーメント変換式はつぎのようになる．

$$\ln-Hn(\underline{s}_0) = a \int_{\text{Domain}} d\underline{r}_1 [J_0(\underline{r}_1) \underline{g}_s(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \cdot \underline{\xi}(\underline{r}_1) + g(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \eta(\underline{r}_1)] \rho_1(\underline{r}_1) \quad (\text{A.1})$$

簡単化のため，積分内の引数は省略し，積分領域は初期画像上であるとする．定数 a はこの式から

$$a = \frac{\ln-Hn(\underline{s}_0)}{\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi} + g \eta] \rho_1} \quad (\text{A.2})$$

ノルム $\|\underline{v}\|$ はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \|\underline{v}\|^2 &= a^2 (\|\underline{\xi}\|^2 + \alpha^2 \|\eta\|^2) = \\ &= \frac{[\ln-Hn(\underline{s}_0)]^2}{\left[\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi} + g \eta] \rho_1 \right]^2} \int d\underline{r}_1 [\|\xi_x\|^2 + \|\xi_y\|^2 + \alpha^2 \|\eta\|^2] \rho_1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$\underline{\xi}$ と η に関して， $\delta \|\underline{v}\|^2 / \delta \underline{\xi} = 0$ ，および $\delta \|\underline{v}\|^2 / \delta \eta = 0$ とおいて最小化を図ると，つぎのようになる．

$$\underline{\xi} = \left[\frac{\|\underline{\xi}\|^2 + \alpha^2 \|\eta\|^2}{\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi} + g \eta] \rho_1} \right] J_0(\underline{r}_1) \underline{g}_s(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (\text{A.4})$$

$$\eta = \left[\frac{\|\underline{\xi}\|^2 + \alpha^2 \|\eta\|^2}{\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi} + g \eta] \rho_1} \right] \frac{1}{\alpha^2} g(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (\text{A.5})$$

$\underline{v} = a(\xi_x, \xi_y, \eta)$ であるので， $[\]$ 内の定数因子は定数 a に含めて， $\underline{v} = a'(\xi'_x, \xi'_y, \eta')$ とすることができる．ここに，

$$a' = a \left[\frac{\|\underline{\xi}\|^2 + \alpha^2 \|\eta\|^2}{\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi} + g \eta] \rho_1} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\underline{\xi}'(\underline{r}_1) = J_0(\underline{r}_1) \underline{g}_s(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (\text{A.7})$$

$$\eta'(\underline{r}_1) = \frac{1}{\alpha^2} g(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (\text{A.8})$$

a の定義と $\underline{\xi} = (a' / a) \underline{\xi}'$ ，および $\eta = (a' / a) \eta'$ とから，

$$\delta \underline{s} = \frac{\ln-Hn(\underline{s}_0)}{\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi}' + g \eta'] \rho_1} \underline{\xi}' \quad (\text{A.9})$$

$$\delta J = \frac{\ln-Hn(\underline{s}_0)}{\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi}' + g \eta'] \rho_1} \eta' \quad (\text{A.10})$$

ξ' および η' の定義，および

$$\int d\underline{r}_1 [J_0 \underline{g}_s \cdot \underline{\xi}' + g \eta'] \rho_1 = \|J_0 \underline{g}_s\|^2 + (1/\alpha^2) \|g\|^2 \quad (\text{A.11})$$

からつぎの結果が得られる．

$$\delta \underline{s}(\underline{r}_1) = \frac{\alpha^2 [\ln-Hn(\underline{s}_0)]}{\alpha^2 \|J_0 \underline{g}_s\|^2 + \|g\|^2} J_0(\underline{r}_1) \underline{g}_s(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (\text{A.12})$$

$$\delta J(\underline{r}_1) = \frac{\alpha^2 [\ln-Hn(\underline{s}_0)]}{\alpha^2 \|J_0 \underline{g}_s\|^2 + \|g\|^2} g(\underline{r}_1 + \underline{s}_0) \quad (\text{A.13})$$

(A.12)より，変位 $\delta \underline{s}$ は位置 $\underline{r}_1 + \underline{s}_0$ における重み関数の勾配に比例することが分かる．