

幾何学的仮説の統計的検定

金谷 健一 浦沢 康二

群馬大学工学部情報工学科
〒 376 桐生市天神町 1-5-1

あらまし 本論文では、画像データの幾何学的構造の仮説検定に厳密な統計学的根拠を与える。画像上の点や直線をすべて「N ベクトル」と呼ぶ単位ベクトルで表わし、その信頼性を「共分散行列」で評価する。そして誤差の分布を正規分布で近似し、点の共線性や直線の共点性のような幾何学的仮説に対して χ^2 検定を定式化する。そして、これをモデルマッチング、エッジ統合、消失点、出現点、消失線の検定に適用すれば、アドホックな定数を含まない合理的な検定基準が得られることを示す。このとき消失点、出現点、消失線が無遠慮にあって計算上の問題が生じない。最後に実画像を用いた例を示す。

和文キーワード 仮説検定、モデルマッチング、エッジ統合、消失点、出現点、消失線

Statistical Test for Geometric Hypotheses

Kenichi Kanatani and Kouji Urasawa

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Abstract A rigorous statistical foundation is given to the process of hypothesizing and testing geometric properties of image data. Points and lines in the image are represented by “N-vectors” and their reliability is evaluated by their “covariance matrices”. Under a Gaussian approximation of the distribution, the test for geometric hypotheses such as collinearity of points and concurrency of lines takes the form of a χ^2 -test. The test criterion is explicitly stated for testing model matching, edge grouping, vanishing points, focuses of expansion, and vanishing lines. All test criteria do not contain ad hoc constants to be adjusted, and no computational problems arise if vanishing points, focuses of expansion, and vanishing lines are located infinitely far away. A real image example is also given.

英文 key words **hypothesis testing, model matching, edge grouping, vanishing points, focus of expansion, vanishing line**

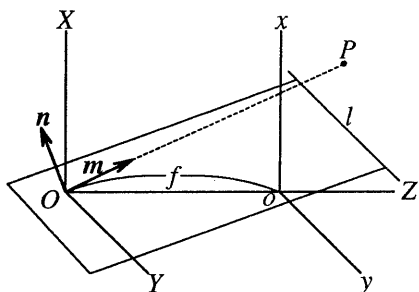


図 1: 点と直線の N ベクトル

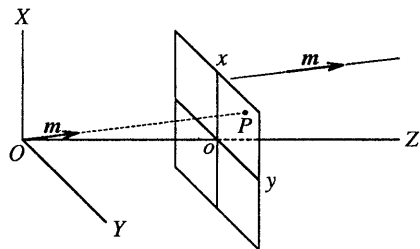


図 2: 空間中の直線の消失点

1 はじめに

画像データの 3 次元解釈において点の共線性や直線の共点性の判定は必要不可欠である。この問題に対して仮説検定の方法が提案されている [6, 7]。そこでは「エッジ」を基本要素と見なして、「仮説が成り立つためには各エッジをどの程度移動させなければならないか」を計算し、その量によって検定を行なっている。通常の画像処理では「エッジ検出」は最初に行なわれる処理であるから、この方法は極めて現実的である。しかし、その検定基準は発見的に導かれているため、以下の問題点が未解決である。

- 基本となるエッジの食い違いの尺度の幾何学的意味は明らかであるが、統計的意味、特にその確率論的根拠が不明である。
- 仮説に基づいた推定とその検定は別々に取り扱われているが、仮説に基づいた「最適推定」が理論的に導かれていない。
- エッジの食い違いの尺度に対するしきい値は経験的に調節しなければならない。画像のノイズの統計的モデルを用いてそのしきい値を理論的に決定できるのが望ましい。

本論文ではこれらの問題点すべてを解決する理論を提案する。第 2 点はすでに解決されているので [9, 10]、ここでは第 1 点と第 3 点について考える。本論文では画像上の点や直線を「N ベクトル」で表現し、それらの信頼性を「共分散行列」で評価する。次に誤差の分布を正規分布で近似し、点の共線性や直線の共点性のような幾何学的仮説に対して χ^2 検定を定式化する。そして、これをモデルマッチング、エッジ統合、消失点、出現点、消失線の検定に適用すれば、アドホックな定数を含まない合理的な検定基準が得られることを示す。このとき消失点、出現点、消失線が無限遠方にあっても計算上の問題が生じない。最後に実画像を用いた例を示す。

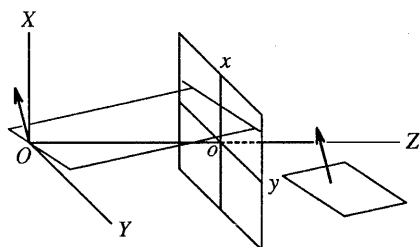


図 3: 空間中の平面の消失線

2 透視変換と N ベクトル

図 1 のようなカメラモデルを考える。原点 O を視点、定数 f を焦点距離と呼ぶ。画像面上の点は、視点 O を始点とし、その点を通る視線の方向を表す単位ベクトル m で指定できる (図 1)。また画像面上の直線は、視点 O を通り、画像面でその直線と交わる平面の単位法線ベクトル n で指定できる (図 1)。 m 、 n をそれぞれ点および直線の N ベクトルと呼ぶ [4, 5]。

よく知られているように、空間中で平行な直線は画像面上では共通の消失点に収束する [3, 4]。図 2 から次の定理が得られる。

【定理 1】空間中で単位方向ベクトル m をもつ直線の投影像は、N ベクトル $\pm m$ の消失点をもつ。

また、空間中で平行な平面の投影像は、画像面上で共通の消失線に収束する [3, 4]。図 3 から次の定理が得られる。

【定理 2】空間中で単位法線ベクトル n をもつ平面の投影像は、N ベクトル $\pm n$ の消失線をもつ。

3 エッジの統計的モデル

通常の画像処理ではまず最初に Hough 変換やエッジ作用素によってエッジを検出し、細線化によってエッジ画素の列を求め、最小二乗法などによって直線を当てはめる。消失点はこのように当てはめた直線の交点

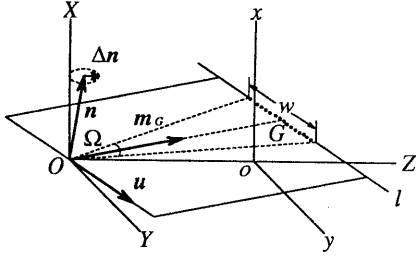


図 4: エッジへの直線当てはめ

として計算されるので、消失点の計算の信頼性を解析するためにはエッジへの直線当てはめの誤差の挙動の統計的モデルが必要となる。

エッジ画素に当てはめた直線の N ベクトルが、誤差の存在しないとき n であるとする。実画像では誤差のため、各エッジ画素は正確な位置にあるとは限らない。そのような不正確なエッジ画素に当てはめた直線の N ベクトルを $n' = n + \Delta n$ とする (図 4)。誤差の挙動はランダムであるから、誤差 Δn を確率変数とみなして、 n の共分散行列を次のように定義する [9, 10]。

$$V[n] = E[\Delta n \Delta n^T] \quad (1)$$

ただし $E[\cdot]$ は期待値、 T は転置を表す。

この共分散行列の具体的な形は画像のノイズのモデルから導くことができる [9, 10]。これは複雑な解析を必要とするので、詳細は省略し、結論のみを示す。

【定理 3】長さ w 、方向 u のエッジの N ベクトル n の共分散行列は次の式で与えられる。

$$V[n] = \frac{6\kappa}{w^3} uu^T + \frac{\kappa}{2f^2 w} m_G m_G^T, \quad \kappa = \frac{\epsilon^2}{\gamma} \quad (2)$$

上の定理において、長さ w の単位は画素である。また m_G はエッジの midpoint の N ベクトルであり (図 4)、 κ は解像度定数と呼ばれる定数である。ただし ϵ は画素精度と呼ばれる定数 (単位は画素) であり、エッジ画素の誤差の標準偏差を表す。 γ はエッジ密度 (単位画素長さ当たりのエッジ画素の個数) である。

4 分布の正規近似

N ベクトル n の共分散行列を $V[n]$ とする。平均 0、共分散行列 $V[n]$ を持つ分布は無数に存在するが、最も自然なものは正規分布である。平均 0、共分散行列 $V[n]$ の正規分布は次のように与えられる。

【命題 1】 N ベクトル n の共分散行列 $V[n]$ が次のようにスペクトル分解できるとする。

$$V[n] = \sigma_1^2 uu^T + \sigma_2^2 vv^T, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \quad (3)$$

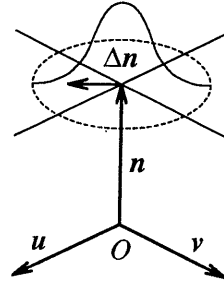


図 5: 正規分布による近似

平均 0、共分散行列 $V[n]$ の Δn の正規分布密度は次式で与えられる。

$$F(\Delta n) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(\Delta n, V[n]^{-1} \Delta n)/2} \quad (4)$$

ただし

$$V[n]^{-1} = \frac{uu^T}{\sigma_1^2} + \frac{vv^T}{\sigma_2^2} \quad (5)$$

(証明) N ベクトルは単位ベクトルに正規化されているから Δn は常に n に垂直であり、 n に垂直な平面上に 2 次元分布する (図 5)。 u, v の定義より、 Δn は u 方向にもっとも現れやすく、 v 方向にもっとも現れにくい [9, 10]。 Δn の u 方向の分散は σ_1^2 であり、 v 方向の分散は σ_2^2 である。そのような正規分布は式 (4) で与えられる。□

行列 $V[n]^{-1}$ は $V[n]$ の一般逆行列である。今、ある N ベクトル $n' = n + \Delta n$ が得られたとき、これが分布 (4) からのサンプルと見なせるかどうかを考える。統計学でよく知られた手法として χ^2 検定がある。 n が分布 (4) に従うなら、二次形式 $(\Delta n, V[n]^{-1} \Delta n)$ は自由度 2 の χ^2 分布に従う。したがって次式が成り立つ時、 Δn が分布 (4) からのサンプルであるという仮説は有意水準 $a\%$ で棄却される。

$$(\Delta n, V[n]^{-1} \Delta n) > \chi_{a,2}^2 \quad (6)$$

ただし $\chi_{a,2}^2$ は自由度 2 の χ^2 分布の $a\%$ 点であり、 $\chi_{a,2}^2 = -2 \log(a/100)$ である。

n は $V[n]^{-1}$ の固有値 0 に対する固有ベクトルであるから [9, 10]、 $V[n]^{-1} n = 0$ であり、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (n', V[n]^{-1} n') &= (n + \Delta n, V[n]^{-1} (n + \Delta n)) \\ &= (\Delta n, V[n]^{-1} \Delta n) \end{aligned} \quad (7)$$

したがって次の検定基準が得られる。

【命題 2】 N ベクトル n' が共分散行列 $V[n]$ の確率変数 n の実現値であるという仮説は、次式が成り立てば

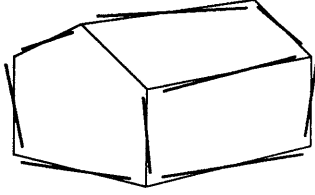


図 6: モデルマッチング

有意水準 $\alpha\%$ で棄却される。

$$(n', V[n]^{-1}n') > \chi^2_{\alpha, 2} \quad (8)$$

Collins と Wiess[2] も同様な基準を導いている。しかし彼らの共分散行列 $V[n]$ は多数のサンプルから計算した「サンプル共分散行列」である。一方、本論文の共分散行列 $V[n]$ は誤差のモデルに基づいて理論的に導いた式 (2) によって与えられる。したがって、上の基準はただ一つの実現値に対して適用できる。

5 モデルマッチングの検定

画像中の 3 次元物体を認識するための標準的手法として、画像上に検出した物体像のエッジに対して、データベースに登録してある複数の線画モデルのそれぞれを重ね合わせて、モデルのエッジと物体像のエッジとが最もよくマッチするモデルを選ぶ方法がよく知られている [1, 8](図 6)。このとき必要となるモデルのエッジと物体のエッジのマッチの尺度は従来は発見的に定義されることが多かった。これに命題 2 を適用すれば、物体のエッジのモデルのエッジからのずれが確率的に許容できるかどうかを検定するという、統計学的に合理的な基礎が与えられることになる。

6 エッジ統合の検定

エッジ作用素によって複数のエッジが検出されたとする。それらを 1 本のエッジとして統合できるかどうかを知りたい (図 7)。単純な方法としては、隣り合うエッジの向きや位置にずれが適当に設置したしきい値より小さければ 1 本のエッジに置き換えればよいように思える。しかしこれを盲目的に行なうと矛盾を生じる [6, 7]。この問題に対しても仮説検定の方法が提案されているが [6, 7]、推定の最適性や検定の統計学的根拠については言及されていない。

まず仮説について考える。 N 本のエッジ全体に当てはめた直線の N ベクトル $\bar{n}$ は、次のモーメント行列の最小固有値に対する単位固有ベクトルとして計算できる [4, 5]。

$$M = \sum_{\beta} W_{\beta} m_{\beta} m_{\beta}^T \quad (9)$$

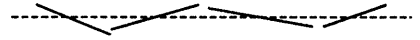


図 7: エッジの統合

ただし m_{β} は N 本のエッジを構成する各画素の N ベクトルであり、総和はそれらすべての画素にわたる。重み W_{β} を“最尤推定”の意味で最適に選ぶと、これは次のように近似できる [9, 10]。

$$M \approx \frac{2f^2}{\kappa} \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} m_{G\alpha} m_{G\alpha}^T \quad (10)$$

ただし $m_{G\alpha}$ は α 番目のエッジの中点の N ベクトルであり、 w_{α} は α 番目のエッジの長さである。この M の最小固有値に対する単位固有ベクトル $\bar{n}$ を計算することは次の最小二乗法によって $\bar{n}$ を計算することと同等である。

$$\sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} (\bar{n}, m_{G\alpha})^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

これは、 N 本のエッジの中点にそれぞれのエッジの長さ w_{α} を重みとして最小二乗法で直線を当てはめたことと同じである。これによって、文献 [6, 7] で提案されている方法に理論的正当性が与えられる。

次に検定について考える。 α 番目のエッジの N ベクトル、その中点の N ベクトル、その方向ベクトルをそれぞれ n_{α} , $m_{G\alpha}$, u_{α} とする。 α 番目のエッジの共分散行列 $V[n_{\alpha}]$ は式 (2) で与えられるから、次式が得られる。

$$(\bar{n}, V[n_{\alpha}]^{-1}\bar{n}) \approx \frac{w_{\alpha}^3}{6\kappa} (\bar{n}, u_{\alpha})^2 + \frac{2f^2 w_{\alpha}}{\kappa} (\bar{n}, m_{G\alpha})^2 \quad (12)$$

これと命題 2 から次の検定基準が導かれる。

【命題 3】 α 番目のエッジの N ベクトル、その中点の N ベクトル、その方向ベクトルをそれぞれ n_{α} , $m_{G\alpha}$, u_{α} , $\alpha = 1, \dots, N$ とする。当てはめた直線の N ベクトル $\bar{n}$ が次式を満たせば、エッジが共線であるという仮説は有意水準 $\alpha\%$ で棄却される。

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{w_{\alpha}^3}{6} (\bar{n}, u_{\alpha})^2 + 2f^2 w_{\alpha} (\bar{n}, m_{G\alpha})^2 \right) > \kappa \chi^2_{\alpha, 2N} \quad (13)$$

この基準は文献 [6, 7] で提案されているものとほとんど同じであるが、検定のしきい値はアドホックに導入した値ではなく、統計学的な根拠が与えられている点異なる。

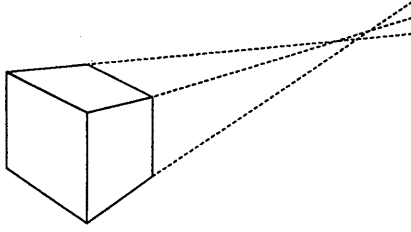


図 8: 共点とみなせるか

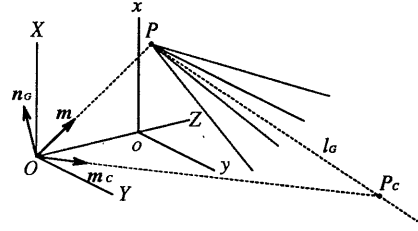


図 9: 中心直線 l_G と共役点 P_C

7 消失点の検定

消失点はその N ベクトルが対応する空間中の直線の 3 次元方向を示しているの (定理 1)、これは 3 次元解釈のもっとも重要な手がかりの一つである。しかし、実際の画像では空間中で平行な直線の投影像も誤差のために必ずしも一点で交わるとは限らない (図 8)。このとき、これらが一点で交わっているとみなせるかを判定したい。

単純な方法としては、エッジの延長線の互いの交点の不一致の程度を適当に設定したしきい値と比較して判断すればよいように思える。しかし、そのしきい値を固定すれば不合理が生じる [7]。また消失点の位置を直接に計算しようとすれば、消失点が無限遠方にあるときに計算上の問題が生じる。したがって、 N ベクトルによる仮説検定が必要となる。

まず仮説について考える。「各エッジは空間中で平行な直線の投影像である」と仮定する。エッジの N ベクトルを n_α , $\alpha = 1, \dots, N$ とすると消失点の N ベクトル m は、次のモーメント行列の最小固有値に対する単位固有ベクトルとして与えられる [4, 5]。

$$N = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha n_\alpha n_\alpha^T \quad (14)$$

重み W_α を“最尤推定”の意味で最適に選ぶと、消失点の N ベクトル m の共分散行列は次のように与えられる [9, 10]。

$$V[m] \approx \frac{6km_C m_C^T}{\sum_{\alpha=1}^N w_\alpha^3 \sin^2 \phi_\alpha / \sin^2 \theta_\alpha} \quad (15)$$

ただし w_α は α 番目のエッジの長さであり、 m_C は仮想的な“中心線” [9, 10] 上の点であって、その N ベクトルが消失点の N ベクトルに直交する点の N ベクトルである (図 9)。この点を共役点と呼ぶ。角度 ϕ_α は α 番目のエッジの偏角 [9, 10] である。角度 θ_α は α 番目のエッジの midpoint と消失点の視差 [9, 10] である。偏角 ϕ_α は α 番目のエッジが中心線からどれだけ離れているかを表し、視差 θ_α は消失点が α 番目のエッジからどれだけ離れているかを表す。

次に検定について考える。推定した消失点を P とし、その N ベクトルを m とする。 α 番目のエッジの midpoint を

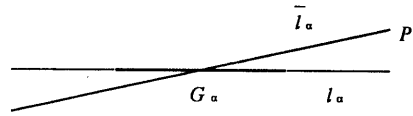


図 10: 共点性仮説の検定

G_α とする (図 10)。点 P と G_α を通る直線 $\bar{l}_\alpha$ の N ベクトルは次式で与えられる [4, 5]。

$$\bar{n}_\alpha = \pm N[m \times m_{G_\alpha}] = \pm \frac{m \times m_{G_\alpha}}{\sqrt{1 - (m, m_{G_\alpha})^2}} \quad (16)$$

α 番目の直線 l_α の N ベクトル n_α の共分散行列を $V[n_\alpha]$ とすると、命題 2 より直線 $\bar{l}_\alpha$ と直線 l_α の食い違いは統計量 $(\bar{n}_\alpha, V[n_\alpha] - \bar{n}_\alpha)$ によって測ることができる。 α 番目のエッジの共分散行列 $V[n_\alpha]$ は式 (2) によって近似できる。したがって

$$(\bar{n}_\alpha, V[n_\alpha] - \bar{n}_\alpha) \approx \frac{w_\alpha^3}{6\kappa} (\bar{n}_\alpha, u_\alpha)^2 \quad (17)$$

となる。直線 $\bar{l}_\alpha$ が G_α を通るから $(\bar{n}_\alpha, m_{G_\alpha}) = 0$ である。 $u_\alpha = \pm n_\alpha \times m_{G_\alpha}$ であるから

$$\begin{aligned} (\bar{n}_\alpha, u_\alpha)^2 &= (\bar{n}_\alpha, n_\alpha \times m_{G_\alpha})^2 \\ &= (\bar{n}_\alpha \times n_\alpha, m_{G_\alpha})^2 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ベクトル $n_\alpha - \bar{n}_\alpha$ は n_α , m_{G_α} の両方に直交する u_α 方向にもっとも現れやすいので [10]、ベクトル $\bar{n}_\alpha \times n_\alpha$ は m_{G_α} にほぼ平行である。したがって

$$\begin{aligned} (\bar{n}_\alpha \times n_\alpha, m_{G_\alpha})^2 &\approx \|\bar{n}_\alpha \times n_\alpha\|^2 \\ &= 1 - (\bar{n}_\alpha, n_\alpha)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。この式に式 (16) を代入すると、次の検定基準が導かれる。

【命題 4】 α 番目のエッジの N ベクトル、その midpoint の N ベクトル、その長さをそれぞれ n_α , m_{G_α} , w_α , $\alpha = 1, \dots, N$ とする。次式が成り立つとき、 N ベクトル

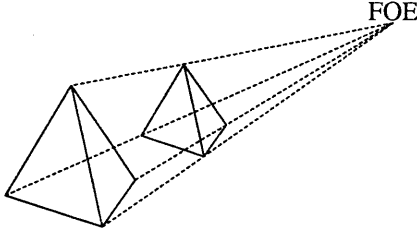


図 11: 出現点

ル m の点がそれらの消失点であるという仮説は有意水準 $\alpha\%$ で棄却される。

$$\sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha}^3 \left(1 - \frac{|m, n_{\alpha}, m_{G\alpha}|^2}{1 - (m, m_{G\alpha})^2} \right) > 6\kappa\chi_{\alpha, 2N}^2 \quad (20)$$

この検定は適当に設定するアドホックな定数を含んでいない。また消失点が無限遠方にあっても計算上の問題を生じない。

8 出現点の検定

複数の点が空間中を並進するとき (あるいはカメラが並進するとき)、それらの軌跡は空間中で平行であり、画像面上では共通の出現点で交わる (図 11)。その幾何学的意味は消失点の場合と同じであり、出現点の N ベクトルは対応する空間中の並進運動の 3 次元方向を示すので画像理解の重要な手がかりとなる。

画像のノイズの統計的モデルを用いれば、軌跡の N ベクトル n の共分散行列が理論的に次のように評価できる [9, 10]。

【命題 5】 方向 u の軌跡の N ベクトル n の共分散行列は次式で与えられる。

$$V[n] = \frac{\epsilon^2}{w^2} uu^T + \frac{\epsilon^2}{4f^2 - w^2} m_G m_G^T \quad (21)$$

ただし w は軌跡を定義する 2 時刻の特徴点間の画像上の間隔 (単位は画素) であり、 m_G は軌跡の midpoint の N ベクトルである。

文献 [6, 7] ではすべての検定はエッジの食い違いに基づいていたので、出現点については言及されていなかった。しかし出現点についても消失点と同様の仮説検定を行なうことが可能である。

まず仮説について考える。「与えられた特徴点の組 (軌跡) は空間中を並進運動をしている点の投影像である」と仮定する。軌跡の N ベクトルを n_{α} , $\alpha = 1, \dots, N$ とする。出現点の N ベクトル m は式 (14) のモーメント行列の最小固有値に対する単位固有ベクトルとして与えられる。重み W_{α} を最適に選ぶと、出現点の N ベクトル

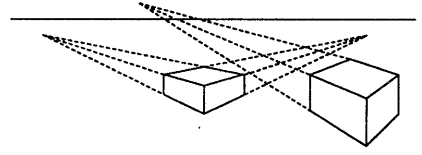


図 12: 消失点の共線性

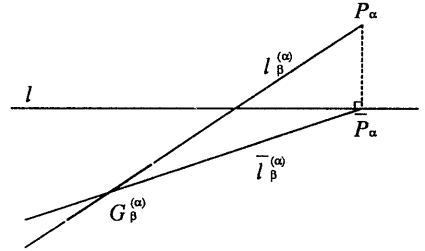


図 13: 共線性の検定

ル m の共分散行列は理論的に次のように与えられる [9, 10]。

$$V[m] \approx \frac{\epsilon^2 m_C m_C^T}{\sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha}^2 \sin^2 \phi_{\alpha} / \sin^2 \theta_{\alpha}} \quad (22)$$

ただし w_{α} は α 番目の特徴点对の画像上の間隔であり、 m_C は出現点の共役点の N ベクトルである。角度 ϕ_{α} は α 番目の軌跡の偏角 [9, 10] であり、角度 θ_{α} は出現点の α 番目の特徴点对の midpoint からの視差 [9, 10] である。これらの幾何学的意味は消失点の場合と同じである。

次に検定について考える。推定した出現点 P の N ベクトルを m とする。 α 番目の特徴点对の midpoint G_{α} の N ベクトルを $m_{G\alpha}$ とすると、点 P と G_{α} を通る直線 $\bar{l}_{\alpha}$ の N ベクトルは次式で与えられる [4, 5]。

$$\bar{n}_{\alpha} = \pm N[m \times m_{G\alpha}] = \pm \frac{m \times m_{G\alpha}}{\sqrt{1 - (m, m_{G\alpha})^2}} \quad (23)$$

α 番目の軌跡の N ベクトルの共分散行列 $V[n_{\alpha}]$ は式 (21) で与えられる。命題 2 より直線 $\bar{l}_{\alpha}$ と直線 l_{α} の食い違いは次式の統計量によって測ることができる。

$$(\bar{n}_{\alpha}, V[n_{\alpha}]^{-1} \bar{n}_{\alpha}) \approx \left(\frac{w_{\alpha}}{\epsilon} \right)^2 (\bar{n}_{\alpha}, u_{\alpha})^2 \quad (24)$$

直線 $\bar{l}_{\alpha}$ が G_{α} を通るから $(\bar{n}_{\alpha}, m_{G\alpha}) = 0$ である。消失点の場合と同様に、次のような近似が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\bar{n}_{\alpha}, u_{\alpha})^2 &= (\bar{n}_{\alpha}, n_{\alpha} \times m_{G\alpha})^2 = (\bar{n}_{\alpha} \times n_{\alpha}, m_{G\alpha})^2 \\ &\approx \|\bar{n}_{\alpha} \times n_{\alpha}\|^2 = 1 - (\bar{n}_{\alpha}, n_{\alpha})^2 \end{aligned} \quad (25)$$

この式に式 (23) を代入すると、次の検定基準が得られる。

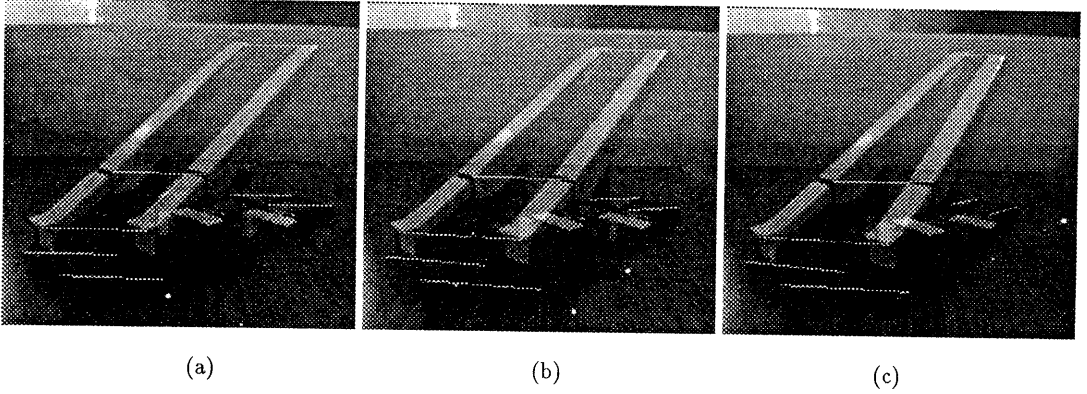


図 14: 移動物体の重ね合わせ画像：(a) 並進のみ、(b) 並進と小さい回転、(c) 並進と大きい回転

【命題 6】 α 番目の軌跡の N ベクトル、その特徴点対の中点の N ベクトル、その間隔をそれぞれ n_α , $m_{G\alpha}$, w_α , $\alpha = 1, \dots, N$ とする。次式が成り立つとき、 N ベクトル m の点がそれらの出現点であるという仮説は有意水準 $\alpha\%$ で棄却される。

$$\sum_{\alpha=1}^N w_\alpha^2 \left(1 - \frac{|m, n_\alpha, m_{G\alpha}|^2}{1 - (m, m_{G\alpha})^2} \right) > \epsilon^2 \chi_{\alpha, 2N}^2 \quad (26)$$

この検定もアドホックな定数を含んでいない。また出現点が無限遠方であっても計算上の問題が生じない。

9 消失線の検定

N 個の消失点 $P_1, \dots, P_N$ を定義する直線のすべてが空間中のある平面に平行であれば、消失点 $P_1, \dots, P_N$ は同一消失線上にある (図 12)。消失線の N ベクトルは対応する平面の法線ベクトルであるから (定理 2)、これは 3 次元解釈の重要な手がかりとなる。しかし、実際の画像では誤差のため同一消失線にあるべき消失点も必ずしも同一直線上にない。これを検定することを考える。しかし、消失線は無限遠方に位置することもあるので、各消失点の消失線からの距離によって判定することはできない。

エッジ統合、消失点、出現点の場合と同様に、まず与えられた消失点 P_α が共点であると仮定し、最適推定法によって直線 $\bar{l}$ を当てはめる [9, 10]。各消失点の共分散行列は式 (15) によって与えられる。当てはめた消失線 $\bar{l}$ の N ベクトルを $\bar{n}$ とする。各消失点 P_α に対して、 P_α に最も近い $\bar{l}$ 上の点 $\bar{P}_\alpha$ を求める (図 14)。 P_α の N ベクトルを m_α とすると、点 $\bar{P}_\alpha$ の N ベクトル $\bar{m}_\alpha$ は次式で与えられる [7]。

$$\bar{m}_\alpha = \pm N[k - (\bar{n}, k)\bar{n} - \frac{|\bar{n}, m_\alpha, k|}{(m_\alpha, k)}\bar{n} \times k] \quad (27)$$

ただし $k = (0, 0, 1)^T$ である。点 $\bar{P}_\alpha$ を消失点の正確な位置と見なし、 $\bar{P}_\alpha$ と各エッジの中点を通る直線を考える (図 13)。その直線と各エッジとの食い違いを調べることにより、次の検定基準が得られる。

【命題 7】 消失点の N ベクトルを m_α とする。 α 番目の消失点を定義する β 番目のエッジの N ベクトル、その中点の N ベクトル、その長さをそれぞれ $n_\beta^{(\alpha)}$, $m_{G\beta}^{(\alpha)}$, $w_\beta^{(\alpha)}$, $\beta = 1, \dots, N^{(\alpha)}$ とする。次式が成り立つとき消失点が共線であるという仮説は有意水準 $\alpha\%$ で棄却される。

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{N^{(\alpha)}} w_\beta^{(\alpha)^3} \left(1 - \frac{|\bar{m}_\alpha, n_\beta^{(\alpha)}, m_{G\beta}^{(\alpha)}|^2}{1 - (\bar{m}_\alpha, m_{G\beta}^{(\alpha)})^2} \right) > 6\kappa \chi_{\alpha, 2n}^2 \quad (28)$$

ただし $n = \sum_{\alpha=1}^N N^{(\alpha)}$ であり、 $\bar{m}_\alpha$ は式 (27) で与えられる。

この検定もアドホックな定数を含んでいない。また消失線が無限遠方であっても計算上の問題が生じない。

10 実画像例

図 14 は移動物体の画像の移動前と移動後の重ね合わせである。(a) では物体を並進運動させ、(b) では並進後わずかに回転させ、(c) では並進後大きく回転させている。特徴点を 7 個選び、7 本の軌跡を定義し、それらが共点であるという仮説を立てる。この仮説が受理されるか棄却されるかは各特徴点の検出精度 ϵ (画素) と検定水準に依存する。例えば $\epsilon \leq 2.5$ なら (a) では有意水準 5% で仮説が受理され、(b), (c) では棄却される。 $2.5 \leq \epsilon \leq 7$ なら (a), (b) では有意水準 5% で仮説が受理され、(c) では棄却される。また $\epsilon > 7$ なら (a), (b), (c) 共に有意水準 5% で仮説が受理される。

11 まとめ

本論文で示した検定基準はすべて極めて単純化したものである。例えばエッジ統合の検定ではエッジ画素の列のみに着目しているが、実際にはもとの画像の濃淡値やエッジ強度、さらにはシーンに関する知識(直線からなる室内シーンである、等)を用いれば、より現実的な判定ができと思われる。また画像の精度を表す定数 ϵ, κ がもとの画像の濃淡値の様子によっては場所ごとに異なるかもしれない。他の基準についても同様であり、いろいろな変形や拡張が可能であろう。しかし、本論文で強調したいのは基本的な考え方である。

実データを用いるシステムでは判定の必要が生じる度に“適当な小さい定数”を導入し、それと比較するということがよく行なわれる。そのような方法が“実際の”であるとしても、一般性を欠くのでその場限りとなり、普遍的な指針とはなり得ない。これに対して本論文で示した基準はアドホックな定数を一切含んでいない。実際にはいくつかの定数を適当に調節する必要があるかもしれないが、それらがすべて幾何学的な、あるいは統計学的な意味をもっている点が重要である。本論文の目的はそのような普遍的な指針が可能であることを指摘し、そのプロトタイプを提示することにある。

また、消失点や消失点は画像面上では無限遠方に現れるかもしれないが、すべての検定基準は N ベクトルによって表されているので、無限遠方を特に区別する必要がなく、計算上の問題が生じない。これも N ベクトルを用いたこのような定式化(「計算射影幾何学」)の利点である。

参考文献

- [1] R. A. Brooks, *Model-Based Computer Vision*, UMI Research Press, Ann Arbor, MI, 1984.
- [2] R. T. Collins and R. S. Weiss, Vanishing point calculation as a statistical inference on the unit sphere, *Proc. 3rd Int. Conf. Comput. Vision*, Osaka, Japan, December 1990, pp.400-403.
- [3] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990.
- [4] 金谷健一, 「画像理解/3次元認識の数理」, 森北出版, (1990).
- [5] K. Kanatani, Computational projective geometry, *CVGIP: Image Understanding*, **54** (1991), 333-348.
- [6] K. Kanatani, Hypothesizing and testing geometric properties of image data, *CVGIP: Image Understanding*, **54** (1991), 349-357.
- [7] 金谷健一・川島孝夫, 画像データの幾何学的構造の仮説検定, 情報処理学会論文誌, **31-6** (1990), 879-886.
- [8] D. G. Lowe, *Perceptual Organization and Visual Recognition*, Kluwer Academic, Boston, MA, 1985.
- [9] 浦沢康二・金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: I. 基礎理論, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77, 1992-03.
- [10] 浦沢康二・金谷健一, 幾何学的計算の統計解析: II. エッジ, 消失点, 出現点, 情報処理学会研究報告, 92-CV-78, 1992-05.