

離散 Jordan 曲面

剣持雪子 井宮 淳 市川 薫

千葉大学 工学部 情報工学科

3次元ユークリッド空間における物体の境界は、空間を2つの領域に分け、重複点のない閉曲面である Jordan 曲面であることが知られている。本論文では、計算機で物体を扱うために立方体を単位として標準化した離散物体の境界を離散 Jordan 曲面として新たに定義し、その性質を明らかにする。すなわち、まず既存の離散物体の境界の表現方法の問題点をまとめ、ユークリッド空間における物体の境界の定義の拡張である解析的な手法によって離散 Jordan 曲面である離散物体の境界を定義することが不可能であることを明らかにする。ついで、組合せ位相幾何学による閉曲面の定義に基づいて、離散 Jordan 曲面を離散空間での微小面要素によって定義する。そして離散 Jordan 曲面の定義をもとに離散物体の境界の性質を解明し、その性質に基づいて境界を導く算法を提案する。

Discrete Jordan Surface

Yukiko KENMOCHI Atsushi IMIYA Akira ICHIKAWA

Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba 263 JAPAN
e-mail imiya@ics.tj.chiba-u.ac.jp

Boundaries of objects in three-dimensional Euclidean space are Jordan surfaces, which separate the space into two parts, the interior and the exterior of sets, and have no multiple points. For the manipulation boundaries of objects in computers, we need a new definition of Jordan surface for discrete objects which are yielded by sampling. Our discrete Jordan surface is a one which is covered by triangles whose vertexes are lattice points in Euclidean space. We also construct a boundary tracking algorithm of discrete objects, which always stops and yields Jordan surface.

1 まえがき

3次元ユークリッド空間における物体の境界は, Jordan 曲面であることが知られている. Jordan 曲面とは, “空間を2つの領域に分ける曲面”, または “境界がなく, 重複点のない閉曲面”とも定義される曲面のことである. それを拡張して, 計算機で扱うために立方体単位に標本化された3次元離散物体の境界を離散 Jordan 曲面とよぶことにする. 離散 Jordan 曲面は, “空間を2つの領域に分け”, “境界がなく, 重複点がない”, 標本化された曲面のことである.

ここで離散物体の境界を表現する既存の方法は, 大きく分けて2つある. Rosenfeld らの手法は, 標本化単位である立方体レベルで表現する方法で, 立方体の隣接, 連結などを用いて, 離散物体の境界を立方体の集合として扱っている [1,2]. Herman らの手法は, 立方体の面を使って表現する方法で, 離散物体の境界を立方体の面の集合で表している [3,4].

Rosenfeld らの方法の長所は, 標本化の単位を扱って離散物体の境界を表現していることである. 物体をあるサイズの立方体で標本化することは, 扱うことのできる最小単位が立方体であるということだから, その最小単位で物体の境界を表現することは, 自然な発想である. 短所は, 物体の境界が曲面を表しているかどうか, 直観で分からないことである. これでは, 物体の境界を離散 Jordan 曲面とよぶことはできない.

Herman らの方法の長所は, 立方体の面を扱って離散物体の境界を表現しているので, 扱うものの自体が曲面であることがはっきりしており, 位相的な意味にあまりまいさがないことである. 短所は, 標本化単位である立方体が扱うことのできる最小単位であるはずなのに, さらに小さい立方体の面を新たに最小単位にしてしまうことである. 標本化の手法について, 彼らは, 3次元離散物体表面の正方形による新たな標本化を提案しているわけではなく, 立方体の積み重ねたものの表面を利用している. すなわち, Rosenfeld らによる手法と同様の離散物体の構成法を暗に仮定しているのである. したがって, 標本化単位は立方体の面ではなく立方体であり, 扱うことのできる最小単位も立方体でなければならない.

2つの方法にはそれぞれ長所, 短所がある. そこで, Rosenfeld らの方法と Herman らの方法の短所を解消し, 両方の長所を取り入れた, 離散物体の境界を表現する新しい方法を考える. すなわち, 標本化単位である立方体レベルで表現することができ, かつ常に離散 Jordan 曲面であることが明らかであるような離散物体の境界を定義することにする.

本論文ではまず, 3次元ユークリッド空間における物体の境界について, 一般的である解析的定義を与える [5]. そして, 3次元離散空間, および離散物体の定義を行なったのち, ユークリッド空間と同様に解析的な手法を用いた, Herman, Rosenfeld らの離散物体の境界の定義を与える. しかし, ユークリッド空間と異な

り, 離散空間では離散 Jordan 曲面であるような離散物体の境界を解析的に定義できないことを明らかにする. そこで, 組合せ位相幾何学における閉曲面の定義 [6,7] を離散空間に適用して, 離散 Jordan 曲面の定義を与える. そして, 明らかに離散 Jordan 曲面である離散物体の境界を定義する.

2 物体の境界の解析的定義

3次元ユークリッド空間 R^3 の直交座標を (x, y, z) とし, ベクトルを $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ とする. また,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

とする.

R^3 の部分集合である物体 P は, 2値関数 $f(x, y, z)$ を使って次のように与えられる.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & : (x, y, z)^T \in P \\ 0 & : (x, y, z)^T \in P' \end{cases} \quad (2)$$

ここで,

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\} \quad (3)$$

とすると, 物体 P の境界点の集合 ∂P , 物体 P から境界点を取り去った内点の集合 $P \setminus \partial P$, 物体 P の補集合である外点の集合 P' に関して, 次の4式が成り立つ.

$$\exists \varepsilon. S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset P \setminus \partial P \quad : \mathbf{x} \in P \setminus \partial P \quad (4)$$

$$\exists \varepsilon. S_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset P' \quad : \mathbf{x} \in P' \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P &= \overline{P \setminus \partial P} \\ &= \{\mathbf{x} \mid S_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap P \setminus \partial P \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P' \cup \partial P &= \overline{P'} \\ &= \{\mathbf{x} \mid S_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap P' \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (7)$$

ただし, ε は任意の正の実数である.

すなわち, 内点 $P \setminus \partial P$ と外点 P' は開集合であり, 内点 $P \setminus \partial P$ の閉包は内点と境界点の和集合 P に, 外点 P' の閉包は外点と境界点の和集合 $P' \cup \partial P$ になる.

境界点の集合 ∂P は R^3 を P と P' の2つに分けることがわかる. したがって, R^3 では ∂P の定義がそのまま Jordan 曲面の定義となる.

3 離散物体の境界の解析的定義

3.1 標本化による離散空間と離散物体

計算機の内では3次元ユークリッド空間 R^3 の3次元物体 P をそのまま扱うことはできない. R^3 および P を標本化する必要がある. そこで, 計算機の内での扱いやすいように, 立方体単位に標本化することを考える. どの大きさの立方体も一辺の長さを1に正規化することで単位立方体になる. そこで, 単位立方体で標本化する場合についてのみ考えることにする.

R^3 の点 x の要素がすべて整数である点 $x = (i, j, k)^T$ を格子点とよび、格子点すべてからなる点の集合 Z^3 を3次元離散空間とよぶ。 Z^3 は、 R^3 を標本化する単位立方体の中心の点の集合である。

格子点 $x = (i, j, k)^T$ を中心とする単位立方体領域を

$$V_{i,j,k} = \{x = (x, y, z)^T \mid i - \frac{1}{2} \leq x \leq i + \frac{1}{2}, \\ j - \frac{1}{2} \leq y \leq j + \frac{1}{2}, \\ k - \frac{1}{2} \leq z \leq k + \frac{1}{2}\} \quad (8)$$

とする。 R^3 における2値関数 $f(x, y, z)$ を、単位立方体あたりの体積に関してしきい値 $1/2$ で標本化をほどこすことによって、離散2値関数 $F(i, j, k)$ を得る。

$$F(i, j, k) = \begin{cases} 1, & \iiint_{V_{i,j,k}} f(x, y, z) dx dy dz \geq \frac{1}{2} \\ 0, & \iiint_{V_{i,j,k}} f(x, y, z) dx dy dz < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9)$$

この離散2値関数 $F(i, j, k)$ によって、 R^3 における物体 P を単位立方体あたり体積 $1/2$ のしきい値で標本化した離散物体 Q ;

$$Q = \{(i, j, k)^T \mid F(i, j, k) = 1\} \quad (10)$$

が決定できる。

Q は Z^3 の部分集合であることから、離散表現の離散物体とよぶ。それに対して、 R^3 の部分集合である $[Q]$;

$$[Q] = \bigcup_{(i,j,k)^T \in Q} V_{i,j,k} \quad (11)$$

をユークリッド表現の離散物体とよぶことにする。

3.2 単位立方体の面による離散物体の境界表現

Herman らの単位立方体の面によって離散物体の境界を表現する方法では、ユークリッド表現の離散物体 $[Q]$ を扱う。離散物体 $[Q]$ の境界点の集合 $\partial[Q]$ 、内点の集合 $[Q] \setminus \partial[Q]$ 、外点の集合 $[Q]'$ は、 R^3 における物体 P の境界点 ∂P 、内点 $P \setminus \partial P$ 、外点 P' と同様な4式(4)(5)(6)(7)が成り立つ。すなわち、内点 $[Q] \setminus \partial[Q]$ と外点 $[Q]'$ は開集合で、離散物体 $[Q]$ は内点 $[Q] \setminus \partial[Q]$ の閉包、外点と境界点の和集合 $[Q]' \cup \partial[Q]$ は外点 $[Q]'$ の閉包である。

したがって、離散物体 $[Q]$ の単位立方体の面による境界 $\partial[Q]$ はJordan曲面そのものであり、この場合、特に離散Jordan曲面とよぶ必要はない。すなわちこの方法では、境界が曲面であることを明確にさせるために、離散物体をユークリッド空間の物体として扱うのである。

3.3 単位立方体による離散物体の境界表現

Rosenfeld らの単位立方体によって離散物体の境界を表現する方法では、離散表現による離散物体 Q を扱う。離散物体 Q の内点の集合は Q 自身であり、外点の集合はその補集合 Q' である。そして、 R^3 の物体 P の境界点 ∂P と異なり、離散物体 Q の境界点の集合 ∂Q は Q に含まれる。

x に関する3種類の近傍 $N_m(x)$ ($m = 6, 18, 26$)を

$$N_6(x) = \{y \mid \|x - y\| = 1, y \in Z^3\} \quad (12)$$

$$N_{18}(x) = \{y \mid \|x - y\| \leq \sqrt{2}, y \in Z^3\} \quad (13)$$

$$N_{26}(x) = \{y \mid \|x - y\| \leq \sqrt{3}, y \in Z^3\} \quad (14)$$

とし、それぞれを6近傍、18近傍、26近傍とよぶ(図1)。このとき、 ∂Q は外点と近い位置にある内点の集合であるから、3種類の近傍に対して ∂Q も3種類定義できる。内点から境界点を抜いた点の集合 $Q \setminus \partial Q$ 、外点の集合 Q' 、境界点の集合 ∂Q のそれぞれについて次の3つの式が成り立つ。

$$N_m(x) \subset Q : x \in Q \setminus \partial Q \quad (15)$$

$$N_m(x) \subset Q' \cup \partial Q : x \in Q' \quad (16)$$

$$N_m(x) \cap Q' \neq \emptyset : x \in \partial Q (\subset Q) \quad (17)$$

ただし、 m は6、18、26のいずれかである。

以上から、 ∂Q が Z^3 を Q と Q' の2つに分けることは明らかである。しかし、 ∂Q が離散Jordan曲面であるかどうかの判断は簡単ではない。また、 Q が図2のような場合、直観では ∂Q が曲面であると判断できない。

3.4 単位立方体による離散Jordan曲面

単位立方体の面によって境界を表現する方法は離散物体を Z^3 の部分集合ではなく、 R^3 の部分集合として扱う。離散物体およびその境界を Z^3 の部分集合として扱うためには、単位立方体によって境界を表現しなければならない。

R^3 において、物体の境界を解析的に定義すると、それはそのままJordan曲面の定義となる。しかし、 Z^3 において、離散Jordan曲面を R^3 と同様な方法で解析的に定義することは不可能である。それは以下の理由による。

R^3 では、1点の大きさを無限に小さくできるため、解析的に外点でも内点でもないその間に位置する点を境界点とすれば、境界点の集合ははっきりと曲面になる。それに対し、 Z^3 では、1点の大きさを単位立方体以下に小さくできないため、外点の近傍に位置する内点を境界点としても境界点の集合が曲面であることは明白ではない。

したがって、 Z^3 における離散Jordan曲面の定義を新たな方法で与える必要がある。 R^3 における閉曲面の位相幾何学的定義を Z^3 に取り入れることによって、離散閉曲面、すなわち離散Jordan曲面を定義する。

4 曲面の位相幾何学的定義

3次元ユークリッド空間 R^3 中の $r+1$ 個($r = 0, 1, 2$)の点 $x_0, x_1, \dots, x_r$ に対して、 r 個のベクトル

$$x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_r - x_0$$

が一次独立のとき、 $x_0, x_1, \dots, x_r$ は点として一次独立であるという。このことを使って、 r 次元単体($r = 0, 1, 2$)を定義する。

定義 1 (r 次元単体 ($r = 0, 1, 2$)) $\mathbf{R}^3$ 中の一次独立な $r+1$ 個の点を $x_0, x_1, \dots, x_r$ とする. $x_0, x_1, \dots, x_r$ によって決まる点の集合 Δ^r ($r = 0, 1, 2$)

$$\Delta^r = \{x \mid x = \sum_{i=0}^r \lambda_i x_i, \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\} \quad (18)$$

を $x_0, x_2, \dots, x_r$ を頂点とする r 次元単体という. $\square$

定義から明らかなように, 0次元単体は1点, 1次元単体は線分, 2次元単体は三角形となっている(図3).

Δ^r の $r+1$ 個の頂点 $x_0, x_1, \dots, x_r$ の中から適当に $s+1$ 個 ($s < r$) の頂点 $x_{i(0)}, x_{i(1)}, \dots, x_{i(s)}$ を選んでつくった s 次元単体を, Δ^r の面 (s 次元面) といい, Δ^r のすべての面の集合 $P(\Delta^r)$ を

$$P(\Delta^r) = \{\Delta^s \mid s < r\} \quad (19)$$

とする. また, 本論文では Δ^2 のことを以後 Δ と書くことにし, 2次元単体 Δ の組合せで曲面を定義する.

定義 2 (曲面) $\mathbf{R}^3$ の曲面は集合 K ;

$$K = \{x \mid x \in \bigcup_{i=1}^n \Delta_i\} \quad (20)$$

で与えられる. ここで, $p \neq q$ のとき, $\Delta_p \cap \Delta_q$ は

$$\Delta_p \cap \Delta_q = \emptyset \quad (21)$$

または,

$$\Delta_p \cap \Delta_q = \Delta^0 \quad (22)$$

または,

$$\Delta_p \cap \Delta_q = \Delta^1 \quad (23)$$

のいずれかである. ただし $\Delta^0, \Delta^1 \in P(\Delta_p) \cup P(\Delta_q)$ とする. $\square$

定義より, 曲面を形成する任意の2つの2次元単体は, 共有点を持たないか, 0次元面, あるいは1次元面を共有するのいずれかであることが分かる(図4).

x_0, x_1, x_2 の3点からなる2次元単体 Δ の境界 $\partial\Delta$ を

$$\begin{aligned} \partial\Delta = \{x \mid x = \bigcup_{i,j=0,1,2, i \neq j} \lambda_i x_i + \lambda_j x_j \\ : \lambda_i + \lambda_j = 1, \lambda_i, \lambda_j \geq 0\} \end{aligned} \quad (24)$$

とし, さらに閉曲面を定義する.

定義 3 (閉曲面) $\mathbf{R}^3$ の閉曲面は集合 L ;

$$L = \{x \mid x \in \bigcup_{i=1}^n \Delta_i\} \quad (25)$$

で与えられる. ここで, 集合 L は曲面である. そして,

$$S = \{(p, q) \mid \Delta_p \cap \Delta_q \text{ が式 (23) を満たす}\} \quad (26)$$

とすると,

$$\bigcup_{(p,q) \in S} (\Delta_p \cap \Delta_q) = \bigcup_{i=1}^n \partial\Delta_i \quad (27)$$

かつ, $(p, q), (u, v) \in S$ について, $(p, q) \neq (u, v)$ のとき

$$\Delta_p \cap \Delta_q \neq \Delta_u \cap \Delta_v \quad (28)$$

なる2つの条件を満たす. $\square$

定義から, ただちに次の定理を導くことができる.

定理 1 閉曲面の中のすべての1次元単体は, 2個の2次元単体の共通の1次元面になっている. $\blacksquare$

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ における閉曲面は Jordan 曲面であることは分かっている. したがって, $\mathbf{R}^3$ における閉曲面の定義3はそのまま Jordan 曲面の定義になる.

5 離散 Jordan 曲面

5.1 離散曲面の構成単位

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ において, すべての曲面の構成単位は2次元単体である. そこで, 3次元離散空間 $\mathbf{Z}^3$ において, 離散曲面の構成単位となる離散2次元単体を定義する.

まず, $\mathbf{R}^3$ と異なり, $\mathbf{Z}^3$ では直線や平面の定義が困難であるため, $\mathbf{R}^3$ のように任意の3点から単体を決定することは難しい. なぜなら, 2点を結ぶ線は直線分であり, 3点で作る面は平面でなければならないからである. そして, $\mathbf{R}^3$ では2点 x と y の間の距離 $\|x - y\|$ を無限に小さくできるのに対し, $\mathbf{Z}^3$ では2点間の距離の値は離散化されており, 最小の距離の値が存在する.

$\mathbf{Z}^3$ では, 任意のサイズの離散2次元単体を定義することは困難でも, $\mathbf{R}^3$ にはない有限の大きさで最小の離散2次元単体を定義することができる. そして, この最小の離散2次元単体が曲面の構成単位になることから, 離散2次元単体を離散単位面, あるいは簡単に単位面とよぶことにする.

単位面を定義する前に, 式(12), (13), (14)とは異なる近傍の種類分けを行う.

$$N_f(x) = \{y \mid \|x - y\| = 1, y \in \mathbf{Z}^3\} \quad (29)$$

$$N_e(x) = \{y \mid \|x - y\| = \sqrt{2}, y \in \mathbf{Z}^3\} \quad (30)$$

$$N_v(x) = \{y \mid \|x - y\| = \sqrt{3}, y \in \mathbf{Z}^3\} \quad (31)$$

それぞれを上から順に, 面共有近傍, 辺共有近傍, 頂点共有近傍とよぶ(図5). これらは, 6近傍, 18近傍, 26近傍と次のような関係が成り立つ.

$$N_6(x) = N_f(x) \quad (32)$$

$$N_{18}(x) = N_f(x) \cup N_e(x) \quad (33)$$

$$N_{26}(x) = N_f(x) \cup N_e(x) \cup N_v(x) \quad (34)$$

単位面は6近傍, 18近傍, 26近傍の近傍の種類ごとに異なるが, それぞれ, 3点または4点から成り, 以下のように定義する.

定義 4 (単位面) 単位面は 3 次元離散空間 Z^3 の点の集合 Δ ;

$$\Delta = \{x_n = (i_n, j_n, k_n)^T \mid n = 1, 2, 3 \text{ または } n = 1, 2, 3, 4\} \quad (35)$$

である。それぞれの点 x_n は以下の手順 Procedure1 で順に決定する。 $\square$

Procedure1

1. x_1 を与える。

2. 条件 ;

$$0 < \|x_2 - x_3\| < 2$$

を満たすような

$$x_2 \in N_a(x_1), \quad x_3 \in N_b(x_1)$$

なる x_2, x_3 を決める。

3. もし $x_3 \in N_m(x_2)$ ならば

$$\Delta = \{x_1, x_2, x_3\}$$

を得る。

そうでなければ、条件 ;

$$x_4 \notin N_m(x_1) \cup \{x_1\}$$

を満たすような

$$x_4 \in N_b(x_2) \cap N_a(x_3)$$

なる x_4 を決め、

$$\Delta = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

を得る。

ここで、 N_a, N_b は、 $m = 6$ のとき N_f , $m = 18$ のとき N_f と N_e のいずれか、 $m = 26$ のとき N_f と N_e と N_v のいずれかである。

2 つの点 x_2, x_3 が、それぞれある 1 つの点 x_1 の近傍の位置にあるような 3 点を選ぶことは簡単である。しかし、その 2 つの点 x_2, x_3 が互いに近傍の位置にあるかどうかという、それは近傍の定義による。もし、互いに近傍の位置にあれば、単位面を構成するのは始めに選んだ 3 点 x_1, x_2, x_3 である。もし、近傍の位置になければ、3 点 x_1, x_2, x_3 を頂点に持つ平行四辺形を構成するような 1 点 x_4 を選ぶ。このとき、 x_4 は x_2 と x_3 の近傍の位置にあり、 x_1 の近傍の位置にはないことに注意する。

したがって、3 次元離散空間 Z^3 における単位面は、3 点からなる三角形、あるいは 4 点からなる平行四辺形のいずれかであり、6 近傍では 1 つの正方形、1 8 近傍では 1 つの長方形と 2 つの三角形、2 6 近傍では 3 つの三角形の単位面ができることが分かる (図 6)。

5.2 離散 Jordan 曲面の定義

R^3 における曲面の位相幾何学的定義同様、 Z^3 における離散曲面は単位面 Δ を組み合わせることによって得ることができる。

単位面 Δ の境界 $\partial\Delta$ を

$$\partial\Delta = \{\{x_a, x_b\} \mid x_b \in N_m(x_a), x_a, x_b \in \Delta\} \quad (36)$$

とすると、離散曲面が次のように定義できる。

定義 5 (離散曲面) Z^3 の離散曲面は集合 K ;

$$K = \{x = (i, j, k)^T \mid x \in \bigcup_{r=1}^n \Delta_r\} \quad (37)$$

より得られる。

ここで、 $|A|$ を A の要素数とすれば、 $p \neq q$ のとき

$$0 \leq |\Delta_p \cap \Delta_q| \leq 2 \quad (38)$$

が成り立つ。

また、 V_a を点 x_a を中心とする単位立方体領域とすれば、 $\{x_a, x_b\}, \{x_c, x_d\} \in \bigcup_{r=1}^n \partial\Delta_r$ について、

$$\{x_a, x_b\} \neq \{x_c, x_d\} \quad (39)$$

のとき

$$V_a \cap V_b \neq V_c \cap V_d \quad (40)$$

が成り立つ。 $\square$

式 (38) より、曲面を構成する 2 次元単体と同様に、離散曲面を構成する単位面は互いに共有する点を持たないか、1 点、あるいは 2 点を共有するかのいずれかであることが分かる。また、式 (40) は、単位面どうしが点を共有しなくても交わるような離散空間特有の交錯 (図 7) を排除している。

離散曲面にさらに条件を付加することで、離散閉曲面が得られる。

定義 6 (離散閉曲面) Z^3 の離散閉曲面は集合 L ;

$$L = \{x = (i, j, k)^T \mid x \in \bigcup_{r=1}^n \Delta_r\} \quad (41)$$

によって得られる。ここで、集合 L は曲面である。そして、

$$S = \{(p, q) \mid |\Delta_p \cap \Delta_q| = 2\} \quad (42)$$

とすると、

$$\bigcup_{(p,q) \in S} \{\Delta_p \cap \Delta_q\} = \bigcup_{r=1}^n \partial\Delta_r \quad (43)$$

かつ, $(p, q), (u, v) \in S$ について, $(p, q) \neq (u, v)$ のとき

$$\Delta_p \cap \Delta_q \neq \Delta_u \cap \Delta_v \quad (44)$$

なる 2 つの条件を満たす。□

上の定義よりただちに次の定理を導くことができる。

定理 2 離散閉曲面を構成するすべての単位面の境界 $\partial\Delta$ は, 必ず 2 つの単位面に共有された境界になっている。■

R^3 における閉曲面と同様に, Z^3 におけるこの離散閉曲面の定義はそのまま離散 Jordan 曲面の定義となる。

5.3 離散 Jordan 曲面と空間の連結性

Z^3 はこれまで R^3 の格子点の集合としてのみ考えた。この章では Z^3 の 2 点間に距離を与えて, Z^3 の連結性を定義する。

定義 7 (距離) 3 次元離散空間 Z^3 の任意の 2 点 $x_1 = (i_1, j_1, k_1)^T$, $x_2 = (i_2, j_2, k_2)^T$ について, 距離を次のように 3 つ決める。

$$d_6(x_1, x_2) = |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| + |k_1 - k_2| \quad (45)$$

$$d_{18}(x_1, x_2) =$$

$$\min\{\max\{|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2|, |k_1 - k_2|\},$$

$$\max\{|j_1 - j_2| + |k_1 - k_2|, |i_1 - i_2|\},$$

$$\max\{|k_1 - k_2| + |i_1 - i_2|, |j_1 - j_2|\}\} \quad (46)$$

$$d_{26}(x_1, x_2) = \max\{|i_1 - i_2|, |j_1 - j_2|, |k_1 - k_2|\} \quad (47)$$

上から, 6 近傍距離, 18 近傍距離, 26 近傍距離とよぶ。□

定義 8 (連結) 3 次元離散空間 Z^3 に距離を与えたものを距離空間といい, 特に, 6 近傍距離を与えたときは 6 連結離散空間 D_6 , 18 近傍距離を与えたときは 18 連結離散空間 D_{18} , 26 近傍距離を与えたときは 26 連結離散空間 D_{26} とよぶ。また, それぞれのとき, 3 次元離散空間は 6 連結, 18 連結, 26 連結であるという。□

近傍ごとに定義された 3 種類の単位面は, Z^3 の連結性に深く関係がある。 Z^3 を D_6 として考えるときには 6 近傍の単位面を扱い, D_{18} として考えるときには 18 近傍の単位面を扱い, D_{26} として考えるときには 26 近傍の単位面を扱う。そこで, 6 近傍の単位面を 6 連結単位面, 18 近傍の単位面を 18 連結単位面, 26 近傍の単位面を 26 連結単位面とよぶことにする。

6 連結単位面, 18 連結単位面, 26 連結単位面に対応して, 単位面をつなぎ合わせることで得ることができる離散 Jordan 曲面も, 6 連結離散 Jordan 曲面, 18 連結離散 Jordan 曲面, 26 連結離散 Jordan 曲面

の 3 種類ある。2 つの単位面の接続を図 8 にすべてあげ, それぞれの離散 Jordan 曲面による表現のちがいを示す。連結ごとに特徴のある表現の仕方では, 曲面が表現されることが分かる。

6 離散 Jordan 曲面による離散物体の境界

3 次元離散空間 Z^3 における 3 次元離散物体 Q の境界 ∂Q を離散 Jordan 曲面とし, その離散 Jordan 曲面の一般的な定義を行った。そこで次に, Q が Z^3 の部分集合として与えられたときの ∂Q を定義する。

定義 9 (離散物体の境界) Z^3 において, 3 次元離散物体 Q の境界 ∂Q は単位面 Δ の集合からなる離散 Jordan 曲面であり,

$$\partial Q = \bigcup_{r=1}^n \Delta_r \quad (48)$$

で与えられる。このとき, 単位面 $\Delta_r (r=1, \dots, n)$ は

$$\Delta_r \subset Q \quad (49)$$

$$\left(\bigcup_{x \in \Delta_r} N_m(x) \right) \cap Q' \neq \emptyset \quad (50)$$

なる 2 つの条件を必ず満たす。ここで, m は空間の連結性により, 6, 18, 26 のいずれかをとる。

ただし, 全体の単位面の個数 n が最小になるように決めるとする。□

上の 2 つの条件式 (49)(50) は, 離散物体の境界が離散物体の内点に含まれ, かつ, 外点に接していることを示している。

上の定義より, 式 (10) によって与えられたものでも, 図 2 のようなものは単位面で覆いつくすことはできないので, 離散物体とみなすことができないことがわかる。Rosenfeld らの手法でも, 図のような場合を避けて離散物体の境界を定義することが試みられているが, 離散 Jordan 曲面を定義することによって理論的に明確にこの問題が解決する。

離散物体の境界を求める算法 Procedure2 は以下の通りである。その前にまず, いくつかの記号の説明を与える。

∂Q ; 離散物体の境界である単位面の集合。

E ; 単位面を張り合わせて離散 Jordan 曲面を形成していく上で現れる曲面の端であって, 単位面の 1 次元面の集合。

$P_1(\Delta)$; 単位面 Δ のすべての 1 次元面の集合。

$\theta(\Delta_p, \Delta_q)$; 2 つの単位面 Δ_p と Δ_q との物体の外側側のなす角。

とする。

Procedure2

1. 初期設定として

$$Q = \{\Delta_1\}, \quad E = P_1(\Delta_1)$$

とする。

2. $\{x_a, x_b\} \in E$ を選び、

$$\Delta_p \supset \{x_a, x_b\}, \quad \Delta_p \in \partial Q$$

なる Δ_p に関して、 $\theta(\Delta_p, \Delta_q)$ を最小にするような

$$\Delta_q \supset \{x_a, x_b\}, \quad \Delta_q \in \partial Q, \quad \Delta_q \neq \Delta_p$$

なる Δ_q を探す。

もし、 Δ_q が見つからなければここで終了し、

“ ∂Q は存在しない”

を返す。

3. $\partial Q \leftarrow \partial Q \cup \{\Delta_q\}$

$$E \leftarrow (E \setminus (E \cap P_1(\Delta_q))) \cup (P_1(\Delta_q) \setminus E)$$

4. $E = \emptyset$ ならば終了し、 ∂Q を得る。

$E \neq \emptyset$ ならば、2に戻る。

この算法では、1つ目の単位面 Δ_1 は式 (49) と (50) を満たすものを適当に決める。そして、その単位面の辺に接続する面として次の単位面を決定する。このとき、隣り合う単位面がつくる物体の外部側の角度が最小になるようにし、もちろん重なることもないようにする。一度単位面を張り付けてしまった辺にはもう単位面を張り付ける必要はなく、まだ単位面を張っていない辺に同じように次々と単位面を張り付けていく。張り付ける辺がなくなったらこの動作は終了し、離散物体の境界である単位面の集合が得られる。単位面の張り付け動作が途中でうまくいかず止まってしまったら、与えられた離散物体から離散 Jordan 曲面である境界は抽出できないということである。

7 むすび

位相幾何学的に離散 Jordan 曲面の定義を与え、その離散 Jordan 曲面の定義を満たすように離散物体の境界を定義した。したがって、新たな離散物体の境界の定義は、離散 Jordan 曲面の性質から、そのまま離散物体の境界抽出の算法になる。特に、2 6 連結離散 Jordan 曲面の場合、単位面はすべて 3 点からなるので、具体的に境界抽出を実現するにも好都合である。単位面を頂点とする接続グラフは、すべての頂点が 3 本の枝を持つグラフとなる。したがって、特別なグラフの整合判定によって、境界の情報から物体の整合性を判定できることが分かる。

また、離散 Jordan 曲面は格子点を結んだ多面体を表していることから、格子多面体とよぶこともできる。この格子多面体の頂点、および辺、面を抽出することで、

オイラー標数などを使って、格子多面体の形状の特徴情報を取り出すことも可能である。

本研究の一部は文部省からの科学研究費補助金、實吉奨学会研究補助金、ならびに、電気通信フロンティア研究開発によるものである。

文献

- [1] A. Rosenfeld: Three-Dimensional Digital Topology, Information and Control, Vol. 50, pp.119-127, 1981.
- [2] G. M. Reed and A. Rosenfeld: Recognition of Surface in Three-Dimensional Digital Images, Information and Control, Vol. 53, pp.108-120, 1982.
- [3] E. Artzy, G. Frieder, and G. T. Herman: The Theory, Design, Implementation and Evaluation of a Three-Dimensional Surface Detection Algorithm, Computer Graphics and Image Processing, Vol. 15, pp.1-24, 1981.
- [4] G. T. Herman and D. Webster: A Topological Proof of a Surface Tracking Algorithm, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol. 23, pp.162-177, 1983.
- [5] 高木貞治: 解析概論, 岩波書店: 東京, 1963.
- [6] 瀬山士郎: トポロジー: 柔らかな幾何学, 日本評論社: 東京, 1988.
- [7] 横田一郎: やさしい位相幾何学の話, 現代数学社: 京都, 1977.

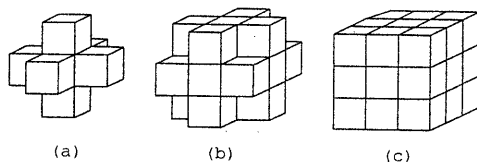


図 1

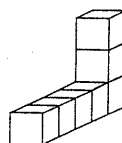


図 2

図 1 x を中心とする単位立方体の、6 近傍 (a), 18 近傍 (b), 26 近傍 (c) の位置にある単位立方体を示す。

図 2 単位立方体によって離散物体の境界を表現するとき、直観では境界が曲面になっているとは判断できないような場合の物体の例を示す。

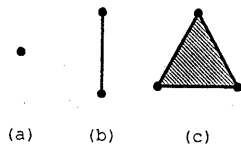


図 3

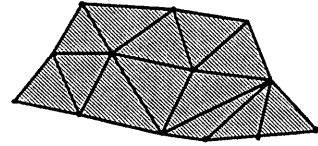


図 4

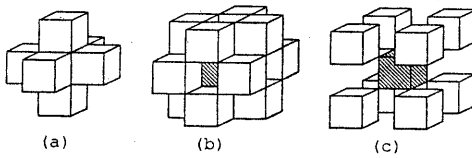
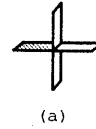
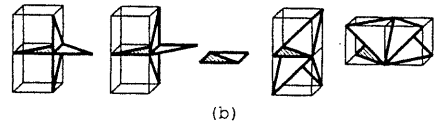


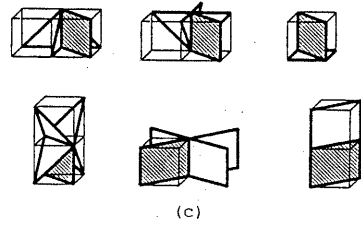
図 5



(a)



(b)



(c)

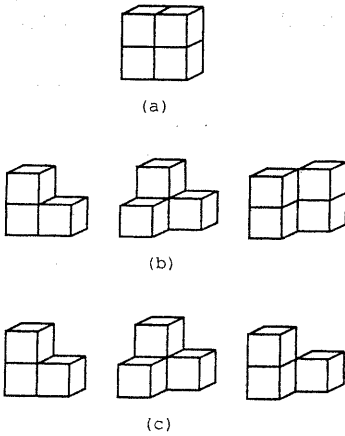


図 6

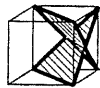
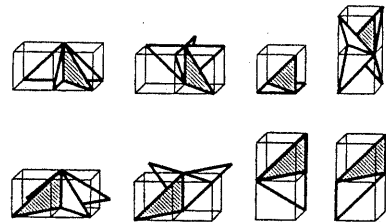


図 7



(d)

図 8

図 3 組合せ位相幾何学において定義される 0 次元単体 (a), 1 次元単体 (b), 2 次元単体 (c) をそれぞれ示す。

図 4 2 次元単体を組み合わせて形成される曲面を示す。

図 5 x を中心とする単位立方体の、面共有近傍 (a), 辺共有近傍 (b), 頂点共有近傍 (c) の位置にある単位立方体を示す。

図 6 6 連結単位面 (a), 18 連結単位面 (b), 26 連結単位面 (c) を単位立方体により示す。

図 7 単位面どうしが点を共有しなくても交わるような離散空間特有の交錯を示す。各点は格子点を表し、太線で囲まれた斜線部は単位面を表す。

図 8 6 連結単位面の接続 (a), 18 連結単位面の接続 (b)(c), 26 連結単位面の接続 (b)(d), を示す。図 7 と同様に、各点は格子点を表し、太線で囲まれた部分は単位面を表す。斜線が引かれた単位面に無地の単位面が接続している。