

枝別れのある空間曲線の記述と認識

井宮 淳 市川 薫

千葉大学 工学部 情報工学科

樹木のように確率的に空間に配置した構造の全体としての概略形状は、外界の3次元構造を理解する重要な要素であると考えられる。本論文では、自然物の人工知能による理解を目指して幾何学的測度論の立場から基本的な検討を行う。そして、葉の分布と枝振りの分離性、枝別れのある3次元空間曲線の記述法とそれを利用した枝振りの概略形状の抽出、ならびに、樹木の間の類似度を定義する。

Mathematical Theory of Dwarf-trees (Bonsai)

Atsushi IMIYA, Akira ICHIKAWA

Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba 263 JAPAN
e-mail imiya@ics.tj.chiba-u.ac.jp

This paper proposes the concept of mathematical theory of dwarf-trees. We examine mathematical representations of natural trees, the separability of ideal branches and leaves from measurements, and similarity measures of trees. We show that the geometrical measure theory is a basic tool for describing data processing of natural objects mathematically. We also introduce the branch cutting algorithm which yields the trunk of a given tree. This is a procedure to divide a ordered set into some complete-ordered sets. The theory is also applicable to medical image processing and archaeological data processing.

1 まえがき

盆栽の枝振りや生け花のように枝の1つ1つの部分構造には幾何学的にまったく規則性がないものを見て空間配置の構成する3次元構造を人間は理解し、造形の織り成す「美」を鑑賞する。樹木の枝のように確率的に空間に配置した構造の全体としての概略形状は、外界の3次元構造を理解する重要な要素であると考えることができる。

故リndenマイヤーを中心とする計算機科学者は樹木の成長の計算モデルを提案し[1]、その理論に基づいて、樹木のコンピュータ・グラフィクスを作成する算法を開発してきた[2]。しかし、この理論によって作成された人工的樹木の美的評価はあくまで人間が行っている。人工的に生成されるコンピュータ・グラフィクスの、樹木や自然物の出来合いを定量的に評価するためには、樹木の概略形状の抽出や類似による分類を行う必要がある[3,4]。

そこで本論文では、樹木や、山並などの自然物を理解するための幾何学的な特徴に付いて幾何学測度論と微分幾何学の立場から基本的な検討を行う。そして、葉の分布と枝振りの分離性、枝別れのある3次元空間曲線の記述法とそれを利用した樹木の概略形状の抽出、ならびに、樹木間の類似度を定義する[5]。

2. 枝別れのある曲線

2.1. 枝別れ曲線の記述

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の直交座標を $(x, y, z)^T$ とする。そして、 $\mathbf{R}^3$ のベクトルを $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ とする。

$\mathbf{R}^3$ の n 本の開曲線 $\{C_i\}_{i=1}^n$ の端点を $\{\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}\}$ とする。このとき、2つの曲線 C_i, C_j に対して

$$C_i \cap C_j = \{\mathbf{a}_{j1}\} \quad (1)$$

$$C_i \cap (C_j \setminus \{\mathbf{a}_{j1}\}) = \emptyset \quad (2)$$

であるとき、すなわち、 C_i と C_j の交点が C_j の端点だけであるとき、

$$C = C_i \cup C_j \quad (3)$$

を別れのある曲線と呼ぶことにする。そして、この関係を (C_i, C_j) と書くことにする。また、点 $\mathbf{a}_{j1}$ を枝別れ点とよび、 C_i を幹、 C_j を枝と呼ぶことにする。

$i = 1, 2, \dots, n-2$ に対して $(C_i, C_{i+1}), (C_{i+1}, C_{i+2})$ が

$$C_i \cap C_k = \emptyset, 1 \leq i < k \quad (4)$$

であるとき、 $1 \leq i < k$ に対して C_i と C_k との関係を

$$\beta^{(k-i)}(C_i, C_k) = \bigwedge_{n=i}^{k-1} (C_n, C_{n+1}) \quad (5)$$

と書くことにする。そして、 C_k を C_i の $(k-i)$ 位の枝と呼ぶことにする。また、 C_1 を C_k の $(k-1)$ 位の幹と呼ぶことにする。 C_1 には1位の幹がない、そこで、 C_1 を幹と呼ぶことにする。

k 位までの枝別れのある n 本の部分曲線からなる空間曲線

$$B = \bigcup_{i=1}^n C_i \quad (6)$$

の枝別れ点と枝別れの構造とを銘記して記述する場合にはリスト

$$B = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle, m \leq n-1 \quad (7)$$

によって表現することにする。ただし、幹は

$$b_1 = \langle (r, C_1), r \rangle \quad (8)$$

とし、枝は

$$b_i ::= \langle (C_1, C_i), \mathbf{a}_i \rangle | \langle b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im} \rangle \quad (9)$$

とする。また、

$$b_{i1} = \langle (C_j, C_i), \mathbf{a}_i \rangle \quad (10)$$

$$b_{ik} = \langle (C_i, C_k), \mathbf{a}_k \rangle, k \neq 1 \quad (11)$$

である。

2.2. 枝別れ曲線の空間構造

2つの曲線 C_i, C_j の位置関係をそれぞれの重心 $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$ の相対的な位置関係で表すことにする。まず、点 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ に対して、 $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ を26の方向に量子化した符号

$$\gamma = q(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (12)$$

を点 $\mathbf{a}$ を始点とするベクトルの方向符号と呼ぶ[6]。そして、 (C_i, C_j) に対して、

$$\gamma = q(\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i) \quad (13)$$

であるとき, $c_\gamma(C_i, C_j)$ と書くことにする. また, 必ずしも接続していない 2 つの曲線 C_i, C_j の位置関係を $p_\gamma(C_i, C_j)$ で表すことにする.

このとき,

$$c_\gamma(C_i, C_j) \leftrightarrow c_{-\gamma}(C_j, C_i) \quad (14)$$

$$p_\gamma(C_i, C_j) \leftrightarrow p_{-\gamma}(C_j, C_i) \quad (15)$$

なる関係が成立する. ただし,

$$-\gamma = q(\mathbf{g}_i - \mathbf{g}_j) \quad (16)$$

である. また,

$$\bigwedge_{n=i}^{k-1} (C_n, C_{n+1}) \rightarrow c_{\gamma''}^{(k-i)}(C_i, C_k) \quad (17)$$

$$c_\gamma(C_i, C_j) \wedge c_{\gamma'}(C_i, C_k) \rightarrow p_{\gamma''}(C_j, C_k) \quad (18)$$

によって, 位置関係を表すことができる. ただし,

$$\gamma'' = q(\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_i), \gamma''' = q(\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_j) \quad (19)$$

である.

3. 樹木の表現

3.1. 葉と枝の分離

枝別れのある空間曲線を B , 葉の集合を L とする. このとき,

$$T = B \cup L \quad (20)$$

を樹木と呼ぶことにする. 葉の集合 L は図 1 に示す用に, 樹木の枝全体の分布と比べれば, 微小な閉集合が空間的に分布したものと考えることができる. このような集合の幾何学的性質を支配する定数に集合のハウスドルフ (Housdorff) 次元がある [7]. そこで, L のハウスドルフ次元を $\mathcal{H}(L)$ で表すことにする. 図 1 の L のような集合のハウスドルフ次元は非整数となる. 一方, 枝別れ空間曲線のハウスドルフ次元は空間の次元数と同じ 3 である.

ユークリッド空間の点集合に関して以下の命題が成立する [7]. ただし, $\mathbb{Z}_+$ は零以上の整数の集合である.

[命題 1][7] 点集合 $(B \cup L)$ に対して, $\mathcal{H}(B) \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{H}(L) \notin \mathbb{Z}_+$ であれば, B と L とを分離可能である.

$\mathbb{R}^3$ の平面全体の集合を $G_{3,2}$ とする. そして, $\mathbb{R}^3$ の部分集合 A の $G_{3,2}$ の要素 P^2 への投影を $P(A)$ とするとき以下の性質が成立する.

[命題 2][7] ほとんど全ての $P^2 \in G_{3,2}$ に対して,

$$\mathcal{H}(A) \geq 2 \rightarrow \mathcal{H}(P(A)) = 2 \quad (21)$$

$$\mathcal{H}(A) < 2 \rightarrow \mathcal{H}(P(A)) = \mathcal{H}(A) \quad (22)$$

である.

$\mathcal{H}(B)$ が 3 であることから, $\mathcal{H}(P(B))$ は 2 である. したがって, 上の命題より直ちにつぎの定理を得る.

[定理 1] 枝と葉との関係に付いて以下の関係が成立する.

- (a) $\mathbb{R}^3$ において, 樹木 T を枝 B と葉 L とに分離できる.
- (b) 葉 L のハウスドルフ次元が 2 未満であれば, T の画像面への投影 $P(T)$ を $P(B)$, $P(L)$ に分離できる.
- (c) 葉 L のハウスドルフ次元が 2 以上であれば, T の画像面への投影 $P(T)$ を $P(B)$, $P(L)$ に分離できない.

定理 1 より, 画像面の情報だけでは, 樹木の投影が, 枝の投影と枝の投影とに分離が必ずしも可能でないことが判る. これは, 実際の樹木でも影の情報だけでは, それが, 葉の生い茂った樹木なのか, 影の形をした模型なのかを判断できないことに対応している. そしてこのとき, 枝と葉を区別するには, 樹木に近づき, あるいは樹木に登って繁った葉の中に入らなければ, 葉と枝を分離して認識することはできない.

一方, 枝の大きさに対して, 葉が十分に微小であり, しかも 1 枚 1 枚の葉が十分に分離していれば, 葉が影に映り, 影の上でも葉の分布と枝を分離できる. すなわち, $\mathcal{H}(L)$ は葉の分布の指標を与えているのである.

極限操作を含むハウスドルフ次元の計算を実際に計算機で行うことはできない. そこで, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ では, それぞれ 1 辺の長さが十分に小さな値 δ である格子点と集合 A との交点を $N_\delta(A)$ とし, $-\log \delta$ を変数とする直線

$$\log N_\delta(A) = a \log \frac{1}{\delta} + b \quad (23)$$

の傾き

$$a = B_\delta(A) \quad (24)$$

によってハウスドルフ次元を近似する [7].¹

3.2. 幹と枝の分離

本節では、枝を表す空間枝別れ曲線 B が与えられた場合に幹と枝とを分離して、接続構造を抽出する算法を考える。簡単のために、

$$\begin{aligned} B &= \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \\ b_1 &= \langle (r, C_1), a_0 \rangle \\ b_i &= \langle (C_1, C_i), a_i \rangle, i \neq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

である枝別れ曲線を考えることにする。これは、図 1 に示すような空間的な 2 分木である。枝と幹との分離とは図 1 のような 3 次元曲線から a_i を抽出し、以後の処理に適した番号付を枝に行うことである。

図 1 において r を原点にとり、 C_1 の方向を z 軸とする直交座標を考える。

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0)^T \\ e_2 &= (0, 1, 0)^T \\ e_3 &= (0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad (26)$$

とする。そして、各分岐点 a_i を始点とし、

$$e_3^T \alpha_i > 0 \quad (27)$$

$$a_i + \beta \in C_i, (C_0, C_i) \quad (28)$$

を満たす微小ベクトル α_i, β_i を固定する。このとき、

$$c_i = \frac{\alpha_i \times \beta_i}{\|\alpha_i \times \beta_i\|} \quad (29)$$

に対して、

$$c_i = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(\theta) \end{pmatrix} \quad (30)$$

¹これはハウスドルフ次元を上から抑える格子係数次元をさらに上から抑える数と成っている。

となる単調増加関数 $z(\theta)$ を決めれば、 C_i の分岐点 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ と、 (θ, z) 平面上の一本の曲線 $(\theta, z(\theta))$ の上に一列に並ぶ点との間に一対一の対応を付けることができる。したがって、この曲線に沿って枝に番号を付ければ、3 次元の枝別れ曲線の構造を枝の配置を決める 1 変数関数と各枝の幾何学的性質によって記述できることになる。自然界にある 2 分木では、 $z(\theta)$ は一次曲線によって十分に近似できることが知られている [8]。

樹木全体の大きさに対して十分短くまた、枝の分岐点どうしの距離に比べて十分小さな正の定数を Δ とする。また、異なる枝の上の点も互いに距離 Δ 以内には無いことを仮定する。このとき、分岐点を中心とする微小な球の中にある点は分岐点以外は幹上の点か枝上の点のどちらかである。また、枝の上の点を中心とする微小な球の中には枝の上の点しか存在しない。このことを利用して幹の分離を行う。

間隔 Δ で z 軸方向に標準化された曲線 ΔB の点 p, q に対して

$$e_3^T(p - q) > 0 \rightarrow p \succ q \quad (31)$$

によって順序を付けることにする。また、

$$S(i) = \{(x, y, z)^T | z = i\Delta, i \geq 0\} \quad (32)$$

によって z 軸に直交する平面に番号を付ける。そして、

$$U(i) = S(i+1) \cup B \quad (33)$$

とする。以下では、高さ ΔN 以下の枝 B について考えることにする。

幹と枝との分離は、式 (31) によって順序付けられた点の集合を全順序の付く部分集合に分解することである。そして、分割された集合に再び式 (31) の順序で番号を付けることである。以下の処理は、幹を決定し幹の上の点に全順序を決定しながら、分離した枝の始点に番号を付ける処理である。

1 : Procedure Branch Cutting

2 : begin

3 : $i := 0, C_1 := \{r\}, P := \emptyset$

4 : while $i \leq N$ do

```

5 :   begin
6 :       if  $U(i) = \{p\}$  then
7 :            $p(i+1) := p,$ 
8 :       else
9 :            $p(i+1) := p,$ 
           s.t.  $e_3(p - p(i)) < \varepsilon$ 
10 :        $U(i) := U(i) \setminus \{p\}$ 
11 :        $a_{j1} := q$  s.t.  $q \in U(i)$ 
12 :        $C_1 := C_1 \cup \{p(i+1)\}$ 
13 :        $P := P \cup \{a_{j1}\}$ 
14 :        $i := i + 1$ 
15 :   end
16 : end

```

また, $0 < \varepsilon < \Delta$, $k \geq 1$ に対して,

$$a_{jk+1} \in B_\varepsilon(a_{jk}), a_{jk} \in P \quad (34)$$

である点を,

$$B_\varepsilon(a_{jk}) \setminus \{a_{jk}, a_{j,k-1}\} = \emptyset \quad (35)$$

と成るまでたどれば, 枝 C_j の折れ線近似を十分な精度で得ることができる. 上の算法を $B \setminus C_i$ に再帰的に適用すれば, 一般の位数の枝を分離できることになる.

3.3. 幹と枝の記述

3.2. では幹と枝とを分離する算法を考えた. 本節では, 分離された枝の情報をもとに樹木を数理的に記述する. 枝を構成する各部分曲線 C_i を適当な記述子で記述し不変特徴量を構成すれば, 樹木の幾何学的特徴をさらに柔軟に記述できる. そこで, リストの要素 B_i に記述子の決める情報 $\mathcal{F}_i$ を付加した要素

$$b_i = \langle (C_j, C_i), a_i, \mathcal{F}_i \rangle \quad (36)$$

を新たに枝の記述子とする. ここで, $\mathcal{F}_i$ として, 空間曲線の P 形フーリエ記述子を採用する [9].

4. 樹木の概略形状

4.1. 枝振りの概略形状

k 位以上の枝を無視した樹木の枝の集合を B^k とする:

$$B^k = \{C_i | \beta^i(C_1, C_k) i \leq k, C_k \in B\} \quad (37)$$

枝のリスト表現から,

$$B = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle, m \leq n-1 \quad (38)$$

構成リスト

$$\begin{aligned} b_i &= \langle b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im} \rangle \\ b_{i1} &= \langle (C_j, C_i) a_i \rangle \\ b_{ik} &= \langle (C_i, C_k), a_k \rangle, k \neq 1 \end{aligned} \quad (39)$$

の中で, $n \geq k+1$ に対して $\beta^n(C_1, C_j)$ となるリストを削除したリストが B^k である. リスト B^k の構造に従って復元される樹木の枝振りを B の k 次の近似と呼ぶことにする.

さて, 人間が樹木の枝振りの概略形状を考えると, 幹からある回数以上枝別れした小枝は無視して考えるであろう. これは, 適当な位数 k を決めて, B^k を枝振り B の概略形状とすることに相当する. また, この性質は庭師が庭木や盆栽の小枝を払って庭木や盆栽の形をそろえる操作の数理的表現になっている.

4.2. 樹木の概略形状

平面 $z=0$ 上の単位円周 Ω 上のベクトルを ω とする. このとき, 樹木 T の ω に直交する平面 $G(\omega)$ への平行投影を $T(\omega)$ とする. そして,

$$R = \bigcap_{\omega \in \Omega} \bigcap_{t \in T(\omega)} \{t + \omega\} \quad (40)$$

とする. T が凸剛体の場合には R と T が一致する. そこで, $\mathcal{H}(T(\omega))$ が 2 である場合には R を T の等価剛体と呼ぶことにする.

$\mathcal{H}(L)$ が 2 未満の場合は $G(\omega)$ の上で $T(\omega)$ を $C(\omega)$ と $L(\omega)$ とに分離できるので,

$$\hat{C} = \bigcap_{\omega \in \Omega} \bigcap_{t \in C(\omega)} \{c + \omega\} \quad (41)$$

によって枝振りだけを平行投影から復元できる.

実際には投影は有限の方向からしか計測できない. そこで, Ω の十分要素の数が多い有限部分集合を Θ とする. そして,

$$\hat{R} = \begin{cases} \bigcap_{\omega \in \Theta} \bigcap_{t \in T(\omega)} \{t + \omega | t\}, & \text{if } \mathcal{H}(T(\omega)) = 2, \\ \bigcap_{\omega \in \Theta} \bigcap_{c \in C(\omega)} \{c + \omega\}, & \text{if } \mathcal{H}(L(\omega)) < 2, \end{cases} \quad (42)$$

を樹木の概略形状と考えることにする。このとき、 $\mathcal{H}(L(\omega))$ が 2 未満である場合には、 $\hat{R}$ によって枝の概略形状が構成できる。

5. 樹木の類似度

5.1. 枝振りの類似度

まず、空間的な 2 分木である枝について考える。樹木の決めるリスト B_1 から B_2 を得るために、 B_1 の k 個の枝の脱落、 m 個の枝の挿入、 n 個の枝の変換、がそれぞれ起こったとする。零以上の定数 p, q, r を A から B に変形するための変換、脱落、挿入のコストとすれば、

$$D(B_1, B_2) = \min(p \times k + q \times m + r \times n) \quad (43)$$

は B_1 と B_2 との間の距離となる。

葉の分布のハウスドルフ次元が 2 未満の樹木では、枝のリストの間の wL-距離によって類似の尺度を導入する。そして、変換、脱落、挿入のコストを総て幾何学量の距離

$$\begin{aligned} p &= d(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \\ q &= d(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \\ r &= d(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \end{aligned} \quad (44)$$

とする。このとき、式 (43) は距離の公理を満たす。そして、式 (43) はダイナミックプログラミングによって計算できる。

5.2. 樹木の類似度

葉のハウスドルフ次元が 2 以上の樹木では、重心を揃えた等価剛体の体積を利用して以下のように類似の尺度を導入する。

2 つの等価剛体を R_1, R_2 とする。そして、集合 X の占める体積を $v[X]$ とする。このとき、零以上の定数 p, q, r に対して、

$$\begin{aligned} D(R_1, R_2) &= p \times v[R_1 \setminus R_2] \\ &\quad + q \times v[R_2 \setminus R_1] \\ &\quad + r \times v[R_1 \cap R_2] \end{aligned} \quad (45)$$

とする。この尺度は次の性質を持つ：

- 1 $R_1 = R_2$, iff $D(R_1, R_2) = 0$ である。
- 2 $D(R_1, R_2) \leq D(R_1, R_3) + D(R_3, R_2)$
- 3 $p = q$, iff $D(R_1, R_2) = D(R_2, R_1)$.

特に、 $p = q = 1, r = 0$ の場合式 (45) は、

$$D(R_1, R_2) = v[(R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_1)] \quad (46)$$

となり、集合間のハミング距離となる。

近似等価剛体は凸多面体となる。したがって、式 (45) の右辺の各項は多面体となる。そこで、各項の決める多面体を凸多面体、例えば、4 面体に分割すれば、多面体のランダム標本からの体積計算の算法によって、樹木の間の距離を十分な近似で計ることができる [10,11]。

また、 $\mathcal{H}(L(\omega))$ が 2 未満の場合には $L(\omega)$ の凸包によって樹木の等価剛体を構成する [12]。

6. 枝振の複雑さ

本節では、樹木の複雑さの指標として空間曲線のエントロピーに基づく複雑さを枝別れのある曲線に適用する。文献 [9] では、フーリエ記述子のパワースペクトルのエントロピーをもとに空間曲線の複雑さを定義した。そして文献 [13] では、対象が複数の曲線 $\{C_i\}_{i=1}^n$ に分解できるとき、各々の複雑さ $\{H_i\}_{i=1}^n$ から、

$$H = \sum_{i=1}^n H_i \quad (47)$$

によって全体の複雑さを定義した。

しかし、自然の樹木を観察すると、枝別れの位数の低い枝と枝の数とが、個々の樹木の枝振りのおおまかな形状の差異を支配していることが判る。したがって、枝の位数やと枝別れの数を媒介変数として重みを付けて各枝の複雑さをたしあわせた量が樹木全体の枝の複雑さの指標として妥当であると考えられることができる。

まず、

$$B(k) = \{C_i | B^k(C_i, C_i)\} \quad (48)$$

とすると, $B(k)$ は位数 k の枝の集合である. また, 集合 $B(k)$ の要素の数を m とする. そして, 位数 k の枝の平均的な複雑さを

$$H(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m H_i \quad (49)$$

によって定義する. $H(k)$ から, 樹木全体の枝の複雑さを

$$H = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} H(k) \quad (50)$$

によって定義する.

例として, 各校別れ点で r 個の自己相似な枝に次々と分かれていく場合を考える. このとき, 基本構成単位の曲線の複雑さを h とすれば,

$$\begin{aligned} H(k) &= \frac{1}{2^r} \sum_{i=1}^{2^r} h \\ &= h \end{aligned} \quad (51)$$

より,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} H(k) \\ &= 2h \end{aligned} \quad (52)$$

となり, 構成要素の 2 倍の複雑さをもつことになる. 「構成要素 1 つよりもよりも自己相似な要素を持つ曲線の方が全体として幾らか複雑であ。」と我々が感じることを素直に説明できることわかる.

7. むすび

本論文では, 枝別れのある空間曲線や多面体, あるいは点集合の混在した対象の取扱を樹木の情報処理を例に幾何学的測度論に基づいて検討した. そして, 枝別れのある曲線と葉の分布を理想化した空間分布を分離できることを示した. また, 樹木の情報処理の基本的な算法として枝払い算法を提案した.

さらに, 類似性の判定算法は, 既にある算法をほとんど適用できることを示した. これらの算法の樹木の情報処理への適用による個別の改良に付いては今後改めて報告する予定である.

本論文において示した枝別れのある空間曲線の解析法は, 樹木の情報処理だけではなく遺物や美術品の表面の文様の解析や, 概略形状による製造法の分類にも適用可能である. 本研究の一部は, 電気通信

フロンティア研究開発によるものである.

参考文献

- [1] G. Rozenberg and A. Salomaa eds.: *Lindenmayer systems: impacts on theoretical computer science, computer graphics, and developmental biology*, Springer-Verlag; Berlin, 1992.
- [2] P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer: *The algorithmic beauty of plants*, Springer-Verlag; New York, 1990.
- [3] A. Waksman and A. Rosenfeld: "Sparse, opaque three-dimensional texture 1. Arborcentnt patterns," *Computer Vision Graphics and Image processing: Image Understanding*, Vol.53, pp.338-399, 1993.
- [4] S. Watanabe: *Pattern recognition*, John Wiley & Sons; New York, 1985.
- [5] 上坂吉則, 尾関和彦: パターン認識と学習のアルゴリズム, 文一総合出版; 東京, 1990.
- [6] 井宮 淳: "3 次元離散近傍の構造と応用," *情報処理学会論文誌*, Vol.34, pp.2153-2164, 1993.
- [7] K. Falconer: *Fractal geometry: mathematical foundation and applications*, John Wiley & Sons; Chichester, 1993.
- [8] A. M. Turing: *Morphogenesis*, P. T. Saunderson ed. *Collected works of A. M. Turing*, Elsevier Science Pub.; Amsterdam, 1990.
- [9] 井宮 淳, 堀 英昭: "空間曲線のためのフーリエ記述子," *情報処理学会研究報告 CV-63-8*, 1989.
- [10] B. Chazelle, and D. P. Dobkin: "Intersection of convex objects in two and three dimension," *Journal of ACM*, Vol. 34, pp.1-27, 1987.
- [11] M. Dyer, A. Frieze, and R. Kannan: "A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies," *Journal of ACM*, Vol. 38, pp.1-17, 1991.
- [12] R. Schnider: "Random approximation of convex sets," *Journal of Microscopy*, Vol. 151,

pp.211-277, 1988.

[13] A. Imiya and K. kakuda: "Description of line figures," Proceedings of 8th SCIA, Vol.1, pp.601-608, 1993.

付録 Housdorff 次元

n 次元ユークリッド空間 R^n のハウスドルフ次元は以下のように定義される [7]. $U \subset R^n$ に対して,

$$|U| = \sup_{x, y \in U} (|x - y|)$$

とする. また, $F \subset R^n$ に対して,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < |U_i| \leq \delta$$

であるとき, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ を F の δ 被覆という. 零以上の整数 s に対して,

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right)$$

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

とおけば, F のハウスドルフ次元は $\mathcal{H}(F)$ は

$$\mathcal{H}(F) = \inf(s; \mathcal{H}^s(F)) = \sup(s; \mathcal{H}^s(F) = \infty)$$

によって定義される. すなわち,

$$0 < \mathcal{H}(F) < \infty$$

であり,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{if } s < \mathcal{H}(F) \\ 0, & \text{if } s > \mathcal{H}(F) \end{cases}$$

である.

図の説明

図 1: 葉の集合は樹木の枝全体の分布と比べれば, 微小な閉集合が空間的に分布したものと考えることができる.

影の情報だけでは, それが, 葉の生い茂った樹木なのか, 影の形をした模型なのかを判断できない.

枝の大きさに対して, 葉が十分に微小であり, しかも 1 枚 1 枚の葉が十分に分離していれば, 葉が影に映り, 影の上でも葉の分布と枝を分離できる.

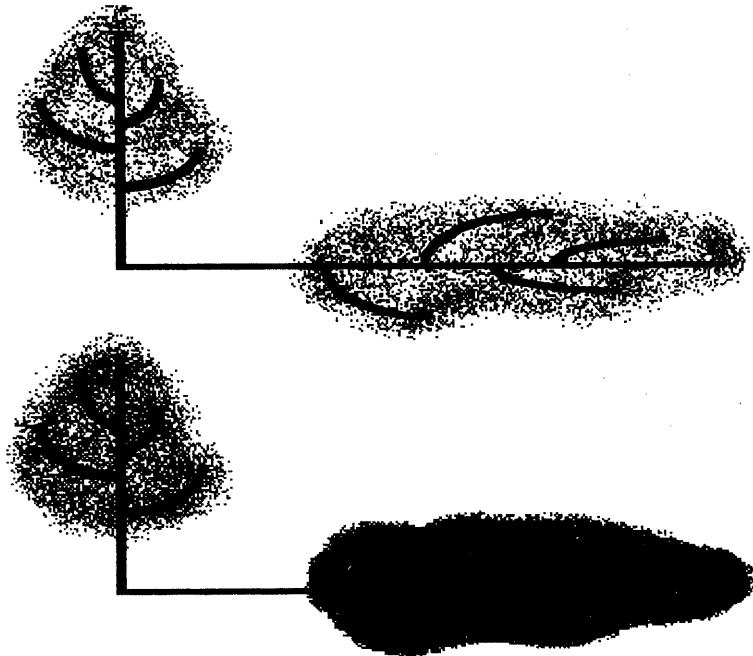


図 1