コンピュータビジョン 91－4
（1994. 11. 24）

パラメトリック当てはめの最尤推定

金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

コンピュータビジョンやロボティクスに現われるパラメトリックな関数当てはめ問題の最尤推定を定式化し、“指数型当てはめ問題”と呼ぶクラスでは当てはめパラメータの最尤推定量の共分散行列が理論的に可能な下界を第1近似において達成していることを証明する。そして最尤推定量の計算を当てはめパラメータのみの非線形最適化問題に書き直し、点列に対する直線およびコニックの当てはめ、画像による一般物体および平面物体の3次元運動解析、オプティカルフロー解析に適用する。

キーワード: パラメトリックな当てはめ、最尤推定、非線形最適化、画像解析、3次元運動解析、オプティカルフロー

Maximum Likelihood Estimation for Parametric Fitting

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Maximum likelihood estimation for parametric fitting problems that often appear in computer vision and robotics applications is stated in general terms, and the covariance matrix of the maximum likelihood estimator of the fitting paramters is proved to attain the theoretical lower bound in the first order if the problem belongs to a classs called *exponential family*. Then, maximum likelihood estimation is expressed in the form of nonlinear optimization in terms of the fitting parameters alone. By applying our theory, the form of the nonlinear optimiztion for maximam likelihood estimation is given to the problem of fitting a line and a conic to point data, 3-D motion analysis for a general and planar object from two views, and 3-D interpretation of optical flow.

Key words: parametric fitting, maximum likelihood estimation, nonlinear optimization, image analysis, 3-D motion analysis, optical flow

謝辞。本研究の内容について詳細な議論を頂いた東京大学工学部の甘利俊一教授および杉原厚吉教授に感謝します。

[†]連絡先: 376 桐生市天神町1-5-1　群馬大学工学部情報工学科
Tel: (0277)30-1841, Fax: (0277)30-1801
E-mail: kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

1．序論

画像やセンサから得られたデータをもとにして3次元環境のモデルを構築することはコンピュータビジョンやロボッティクスの中心的な課題の一つであり、データの誤差に対処する基本的な手段は、誤差がないときに成立する関係式を未知のパラメターを含んだ形で理論的に導出し、観測したデータにそれを当てはめることである。前報[10]ではこれを一般的に定式化し、当てはめの精度の限界を表す“拡張クラメル・ラオの下界”を導いた。本論文ではパラメトリック当てはめの最尤推定を定式化し、“指数型当てはめ問題”と呼ぶクラスでは当てはめパラメータの最尤推定量の共分散行列が拡張クラメル・ラオの下界を第1近似において達成していることを証明する。指数型当てはめ問題の代表的な例は誤差が正規分布に従う場合である。次に最尤推定量の計算を当てはめパラメータのみの非線形最適化問題に書き直すとともに、計算上の諸問題を指摘する。最後に点列に対する直線およびコニックの当てはめ、画像による一般物体および平面物体の3次元運動解析、オプティカルフロー解析を最尤推定による非線形最適化問題として記述する。

2．当てはめ問題の最尤推定

引数 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^m$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^n$ の連続微分可能なスカラ関数 $F^{(k)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$, $k = 1, ..., L$ が与えられているとする ($\mathcal{R}^p$ は p 次元実数空間)。引数 $\boldsymbol{a}$ の定義域 $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}^m$ は m' 次元多様体であり、引数 $\boldsymbol{u}$ の定義域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ は n' 次元多様体であるとする。**パラメトリック当てはめ問題**とは直観的には L 個の方程式

$$F^{(k)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{1}$$

が $\boldsymbol{a}$ の実現値 (“データ” と呼ぶ) $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に “当てはまる” ように、パラメータ $\boldsymbol{u}$ を計算することである。式(1)を**当てはめ方程式**と呼び、$\boldsymbol{u}$ を**当てはめパラメータ**と呼ぶ。各データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ は未知の真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に未知の誤差が加わったものとする。これを各 α について独立で、$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ をパラメータとする確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ をもつ確率変数であるとみなす。このとき次の問題を考える。

【問 題 1】 真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ が未知のとき、

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{u}}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{2}$$

となる当てはめパラメータ $\boldsymbol{u}$ の値 $\bar{\boldsymbol{u}}$ をデータ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ から推定せよ。

以下、前報[10]で用いた記号や仮定をそのまま引き継ぎ、仮定等に通し番号をつける。

問題1の**最尤推定**とはデータ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ が与えられたとき、それを同時確率密度に代入した $\prod_{\alpha=1}^N p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ を $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$ の関数とみた**尤度**を最大にするように $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\boldsymbol{u}$ を選ぶことである。その解 $\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ をそれぞれ $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\boldsymbol{u}$ の**最尤推定量**と呼ぶ。

“変数” と特定の “値” を区別するために $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ を真の期待値とし、それを未知変数とみたものを $\boldsymbol{x}_\alpha$ と書く。最尤推定量を求めるには、尤度の対数をとって符号を変えたものの $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha = 1, ..., N$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ に関する最小化

$$J = -\sum_{\alpha=1}^N \log p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\boldsymbol{x}_\alpha) \to \min \tag{3}$$

を次の制約条件のもとで実行すればよい。

$$F^{(k)}(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{u}) = 0 \tag{4}$$

m 次元行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ を次のように定義する。

$$\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha = -\nabla^2_{\mathbf{x}_\alpha} \log p_\alpha|_{\mathbf{x}_\alpha=\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \tag{5}$$

ただしベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 i 成分を $x_{\alpha(i)}$ とするとき、$\nabla^2_{\mathbf{x}_\alpha} f$ はその (ij) 要素が $\partial^2 f/\partial x_{\alpha(i)}\partial x_{\alpha(j)}$ の行列と約束する。最尤推定量 $\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ はそれぞれの真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ の近くにあると仮定して、$\boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}$ と置く。式(3)の J を真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の近傍で展開すると次のようになる。

$$J = \bar{c} - \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha;\Delta\boldsymbol{x}_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^N (\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha\Delta\boldsymbol{x}_\alpha) + \cdots \tag{6}$$

ただし $\bar{c}$ は J に $\boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ を代入した値であり、$\cdots$ は $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の3次以上の項を表す。

前報[10]の仮定2より行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ のランクは m' を越えないが、さらに次の仮定を置く。これは $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の近傍で J を最小にする $\boldsymbol{x}_\alpha$ の存在と一意性とを保証するものである。

【仮 定 9】 任意 $\boldsymbol{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ に対して行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ は半正値対称行列であり、そのランクは接空間 $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ の次元 m' に等しい。

3．最尤推定量の解析

式(4)から $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の制約が1次近似において

$$(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}^{(k)}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) = -(\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}^{(k)}_\alpha, \Delta\boldsymbol{u}) \tag{7}$$

と書ける。また制約 $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathcal{A}$ より $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は1次近似において制約 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ を受ける。$\Delta\boldsymbol{u}$ を固定し、式(6)の J を最小にする $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を求める。制約(7)に対するラグランジュ乗数を $\bar{\lambda}_\alpha^{(k)}$ とし、J を $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ で微分して0と置き、高次の項を無視すれば、$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の満たす式が次のように得られる(導出省略)。

$$\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha \Delta\boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha + \sum_{k=1}^{L} \bar{\lambda}_\alpha^{(k)} \boldsymbol{P}_\alpha \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)} \tag{8}$$

前報[10]の仮定2と仮定9より $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ が次のように一意的に定まる。

$$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha + \sum_{k=1}^{L} \bar{\lambda}_\alpha^{(k)} \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)} \tag{9}$$

これを制約(7)に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{V}}'_\alpha \bar{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha = &-\Big((\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\boldsymbol{u}) \Big) \\ &- \sum_{k=1}^{L} \Big((\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha) \Big)\end{aligned} \tag{10}$$

ここに $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha = (\bar{\lambda}_\alpha^{(k)})$ であり、$\bar{\boldsymbol{V}}'_\alpha$ は次のように定義する L 次元行列である。

$$\bar{\boldsymbol{V}}'_\alpha = \Big((\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(l)}) \Big) \tag{11}$$

$\bar{\boldsymbol{V}}'_\alpha$ は半正値対称行列である。仮定9より $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ の値域と零空間はそれぞれ $T_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathcal{A})$, $T_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathcal{A})^\perp$ に一致する。ゆえに前報[10]の補題1の証明と同じ論法によって、行列 $\bar{\boldsymbol{V}}'_\alpha$ の値域と零空間はそれぞれ $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha^\perp$ に一致する。したがって $\boldsymbol{a}_\alpha$ が通常データ[10]であれば、式(10)の解は次のように一意的に求まる。

$$\bar{\lambda}_\alpha^{(k)} = -\sum_{l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)\prime} ((\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)}, \Delta\boldsymbol{u}) - (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha)) \tag{12}$$

ただし $\bar{W}_\alpha^{(kl)\prime}$ は次に定義する L 次元行列 $\bar{\boldsymbol{W}}'_\alpha$ の (kl) 要素である。

$$\bar{\boldsymbol{W}}'_\alpha = \bar{\boldsymbol{V}}'^{-}_\alpha \tag{13}$$

式(12)を式(9)に代入し、その結果を式(6)に代入して高次の項を無視すれば、最終的に次の形になる(導出省略)。

$$\begin{aligned}J = \bar{c} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} (\sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)\prime} ((\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\boldsymbol{u}) \\ -(\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha))((\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)}, \Delta\boldsymbol{u}) \\ -(\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha)) - (\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha))\end{aligned} \tag{14}$$

最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は式(14)を最小にする $\Delta\boldsymbol{u}$ を用いて $\hat{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}$ と表せる。制約 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ より $\Delta\boldsymbol{u}$ は1次近似において制約 $\Delta\boldsymbol{u} \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ を受ける。このとき式(14)を最小にする $\Delta\boldsymbol{u}$ の満たす式が次のように得られる(導出省略)。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}'\Delta\boldsymbol{u} = \\ &-\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)\prime} (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha) \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)}\end{aligned} \tag{15}$$

ただし行列 $\boldsymbol{M}'$ を次のように定義した。

$$\boldsymbol{M}' = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)\prime} (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)}) (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)})^\top \tag{16}$$

前報[10]の仮定7は行列 $\boldsymbol{M}'$ にも当てはまると仮定する。

【仮定10】 行列 $\boldsymbol{M}'$ のランクは接空間 $T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ の次元 n' に等しい。

このとき式(15)から $\Delta\boldsymbol{u}$ が次のように一意的に定まる。

$$\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{M}'^{-} \\ &\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)\prime} (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha) \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)}\end{aligned} \tag{17}$$

これから最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列が次のように得られる(導出省略)。

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = E[\boldsymbol{M}'^{-} \boldsymbol{M}'' \boldsymbol{M}'^{-}] \tag{18}$$

ただし行列 $\boldsymbol{M}''$ を次のように定義した。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}'' = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \sum_{k,l,m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)\prime} \bar{W}_\alpha^{(mn)\prime} (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha) \\ (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\beta^{(m)}, \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{l}}_\beta) (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)}) (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\beta^{(n)})^\top\end{aligned} \tag{19}$$

4．指数型当てはめ問題

(フィッシャー)情報行列 $\boldsymbol{J}$ を前報[10]の式(7)で定義すると、次の関係が成立することがよく知られている。ただし微分と積分が交換できることを仮定する(前報[10]の仮定1)。

【補題6】

$$E[\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha] = \boldsymbol{J}_\alpha \tag{20}$$

次の特殊な場合を考える。

【仮 定 11】 行列 $\bar{L}_\alpha$ はデータ a_α に依存しない。

これは確率密度 $p_\alpha(a_\alpha;\bar{a}_\alpha)$ が次の形に表されることを意味する。

$$p_\alpha(a_\alpha;\bar{a}_\alpha)=C_\alpha(\bar{a}_\alpha)e^{(f_\alpha(a_\alpha),\bar{a}_\alpha)+g_\alpha(a_\alpha)} \tag{21}$$

ここに $f_\alpha(a)$ は $a\in\mathcal{R}^m$ の m 次元関数、$C_\alpha(a)$, $g_\alpha(a)$ は $a\in\mathcal{R}^m$ のスカラ関数である。これは**指数型分布**と呼ばれ、通常現われる分布の多くはこの型である。このとき問題1を**指数型当てはめ問題**と呼ぶことにする。代表的な例はデータ a_α が正規分布に従う場合である。指数型当てはめ問題では次の結論が得られる。

【命 題 1】 指数型当てはめ問題の最尤推定量 $\hat{u}$ は第1近似において不偏推定量である。

(証明) 指数型当てはめ問題では $\bar{L}_\alpha=E[\bar{L}_\alpha]=J_\alpha$ であるから、式(16)の M' は定数行列である。式(17)の期待値をとると、$E[\bar{l}_\alpha]=0$ であるから $E[P_{\bar{u}}(\hat{u}-\bar{u})]=E[\Delta u]=0$ となる。 □

統計学ではクラメル・ラオの下界を達成する推定量を**有効推定量**と呼ぶ。これにならって前報[10]の定理1の拡張クラメル・ラオの下界を達成する推定量を**有効推定量**と呼ぶことにする。

【命 題 2】 指数型当てはめ問題の最尤推定量 $\hat{u}$ は第1近似において有効推定量である。

(証明) $\bar{L}_\alpha=J_\alpha$ であるから、式前報[10]の式(13)と式(11)より $\bar{V}'_\alpha=\bar{V}_\alpha$ となる。したがって、前報[10]の式(8)と式(13)より $\bar{W}'_\alpha=\bar{W}_\alpha$ であり、前報[10]の式(9)と式(16)より $M'=M$ である。各 a_α の独立性より、式(19)の期待値をとると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&E[M'']\\
&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)},\\
&\quad J_\alpha^{-}E[\bar{l}_\alpha\bar{l}_\beta^\top]J_\beta^{-}\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\beta^{(m)})(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)})\\
&\quad(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\beta^{(n)})^\top\\
&=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)},\\
&\quad(J_\alpha^{-}J_\alpha J_\alpha^{-})\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(m)})(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)})\\
&\quad(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(n)})^\top\\
&=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{l,n=1}^{L}(\sum_{k,m=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(lk)}(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)},\\
&\quad J_\alpha^{-}\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(m)})\bar{W}_\alpha^{(mn)})(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)})\\
&\quad(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(n)})^\top\\
&=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{l,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(ln)}(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)})(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(n)})^\top\\
&=M
\end{aligned}\tag{22}$$

ただし恒等式 $J_\alpha^{-}J_\alpha J_\alpha^{-}=J_\alpha^{-}$, $\bar{W}_\alpha\bar{V}_\alpha\bar{W}_\alpha=\bar{W}_\alpha\bar{W}_\alpha^{-}\bar{W}_\alpha=\bar{W}_\alpha$ を用いた。これから式(18)が $V[\hat{u}]=M^{-}MM^{-}=M^{-}$ と書ける。 □

統計学ではデータ数が増加するとき真の値に近づく推定量を**一致推定量**と呼ぶ。当てはめ問題ではつぎのことがいえる。

【命 題 3】 データの真の値 $\{\bar{a}_\alpha\}$, $\alpha=1,...,N$ がすべて $\mathcal{A}$ の有界集合に含まれていれば、指数型当てはめ問題の最尤推定量 $\hat{u}$ は第1近似において一致推定量である。

(証明) 各 $\bar{a}_\alpha$ が有界集合に限定されていれば $M=O(N)$ であるから $V[\hat{u}]=O(1/N)$ である。 □

すべてのデータが同じ分布形をもてば、前報[10]の式(8)で定まる $\bar{W}_\alpha^{(kl)}$ は $\bar{a}_\alpha$ の関数として $\bar{W}^{(kl)}(\bar{a}_\alpha)$ と書ける。各データの真の値 $\bar{a}_\alpha$ が有界集合 $\tilde{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}$ からデータ密度 $P(a)$ (データ数は $N=\int_{\tilde{\mathcal{A}}}P(a)da$) により独立に選ばれるとし、

$$M_\infty=\int_{\tilde{\mathcal{A}}}\sum_{k,l=1}^{L}W^{(kl)}(a)(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}F^{(k)}(a,\bar{u}))(P_{\bar{u}}\nabla_{\mathbf{u}}F^{(l)}(a,\bar{u}))^\top P(a)da \tag{23}$$

と置けば、N が十分大きいときは拡張クラメル・ラオの下界が M_∞^{-} で近似できる。これを拡張クラメル・ラオの下界の**漸近近似**と呼ぶ。

注意。命題1, 2, 3はすべて式(15)から得られる。これは関数 J を引数の真の値の周りで2次関数に近似し、制約(4)を線形近似して得られた結果である。したがって、すべての結果は誤差が小さいときの第1近似としての表現である。命題1, 2, 3に“第1近似において”とあるのはこの意味である。誤差に関する第1

近似としての表現を考えるのが本論文の視点である。

5．最尤推定量の計算

固定した $\boldsymbol{u}$ に対して制約 (4) のもとに最小化 (3) の解 $\boldsymbol{x}_\alpha$ を求め、それを J に代入した残差を $J[\boldsymbol{u}]$ と置いて、$\boldsymbol{u}$ のみについての最小化問題を導く。ここで、尤度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\boldsymbol{x}_\alpha)$ が $\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha$ で最大値をとるとする。これは、データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ 以外に他の情報が何も与えられなければ、$\bar{a}_\alpha$ の最尤推定量は $\boldsymbol{a}_\alpha$ 自身であることを意味する。具体的に必要な条件は次の仮定である。

【仮定 12】 $\nabla_{\mathbf{x}_\alpha} p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\mathbf{x}_\alpha)|_{\mathbf{x}_\alpha=\mathbf{a}_\alpha}=\mathbf{0}$

例えば原点 0 で最大値をとるスカラ関数 $f(\cdot)$ により、確率密度が $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{a}_\alpha)=f(\boldsymbol{a}_\alpha-\bar{a}_\alpha)$ と表されていれば仮定12が成立する。特に正規分布ではこれが成立する。

最小化 (3) の解はデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ の近くにあると仮定して $\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha+\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を式 (3) の J に代入し、$\boldsymbol{a}_\alpha$ の近傍で展開する。

$$J=c+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{L}_\alpha\Delta\boldsymbol{x}_\alpha)+\cdots \tag{24}$$

ただし c は J に $\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha$ を代入した値であり、$\boldsymbol{L}_\alpha$ は次のように定義した m 次元行列である。

$$\boldsymbol{L}_\alpha=-\nabla^2_{\mathbf{x}_\alpha}\log p_\alpha|_{\mathbf{x}_\alpha=\mathbf{a}_\alpha} \tag{25}$$

ここで仮定9が行列 $\boldsymbol{L}_\alpha$ についても成立すると仮定する。これは $\boldsymbol{a}_\alpha$ の近傍で J を最小にする $\boldsymbol{x}_\alpha$ の存在と一意性とを保証するものである。

【仮定 13】 任意 $\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$ に対して行列 $\boldsymbol{L}_\alpha$ は半正値対称行列であり、そのランクは接空間 $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ の次元 m' に等しい。

式 (4) は 1 次近似において

$$(\nabla_{\mathbf{a}}F^{(k)}_\alpha,\Delta\boldsymbol{x}_\alpha)=-F^{(k)}_\alpha \tag{26}$$

となる。ただし $F^{(k)}_\alpha$, $\nabla_{\mathbf{a}}F^{(k)}_\alpha$ はそれぞれ $F^{(k)}(\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{u})$, $\nabla_{\mathbf{a}}F^{(k)}(\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{u})$ の略である。制約 $\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$ より、$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は 1 次近似において制約 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\in T_{\mathbf{a}_\alpha}(\mathcal{A})$ を受ける。制約 (26) に対するラグランジュ乗数を $\lambda^{(k)}_\alpha$ として高次の項を無視すれば、仮定 9より式 (24) の J を最小にする $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は次ように一意的に定まる (導出省略)。

$$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha=\sum_{k=1}^{L}\lambda^{(k)}_\alpha\boldsymbol{L}^-_\alpha\nabla_{\mathbf{a}}F^{(k)}_\alpha \tag{27}$$

これを制約 (26) に代入すると次のようになる。

$$\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{\lambda}_\alpha=-(F^{(1)}_\alpha) \tag{28}$$

ただし $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(k)}_\alpha)$ であり、$\boldsymbol{V}_\alpha$ は次のように定義する L 次元行列である。

$$\boldsymbol{V}_\alpha=\Big((\nabla_{\mathbf{a}}F^{(k)}_\alpha,\boldsymbol{L}^-_\alpha\nabla_{\mathbf{a}}F^{(l)}_\alpha)\Big) \tag{29}$$

ここで**計算上の問題**が生じる。式 (4) の L 個の方程式が “代数的に” 独立ではなく r 個だけが独立であれば、3 節で指摘したように式 (11) の行列 $\bar{V}'_\alpha$ のランクは r となる。これを当てはめ方程式 (1) の**ランク**と呼ぶ [10]。しかし、データ値で定義した式 (29) の行列 $\boldsymbol{V}_\alpha$ のランクは r より大きくなることがある。すなわち式 (4) の 1 次近似 (26) にデータを代入したものは r 個以上が “線形” 独立になることがある。そのような当てはめ問題は**退化**していると呼ぶ (前報 [10] の注意 3 参照)。このとき $\boldsymbol{a}_\alpha\to\bar{a}_\alpha$ の極限で行列 $\boldsymbol{V}_\alpha$ の小さい正の固有値のいくつかが 0 に収束する。すなわち、誤差が小さいと $\boldsymbol{\lambda}$ に関する 1 次方程式 (28) が悪条件となる。

これを避けるために式 (28) の両辺を $\boldsymbol{V}_\alpha$ の大きい r 個の固有値に対応する固有空間に射影する。これは式 (26) の L 個の方程式のうちから実質的に r 個のみを用いることを意味する。これによって安定な解が得られ、退化していない当てはめ問題には影響を与えない。もちろん方程式 (28) の厳密解とは異なるものが得られるが、式 (26) は制約 (4) の 1 次近似から得られたものであり、1 次近似の範囲では差は無視できる。このとき $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ の解は次のように一意的に求まる (詳細省略)。

$$\lambda^{(k)}_\alpha=-\sum_{l=1}^{L}W^{(kl)}_\alpha F^{(l)}_\alpha \tag{30}$$

ただし $W^{(kl)}_\alpha$ は次のように定義した L 次元行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ の (kl) 要素であり、$(\cdot)^-_r$ はランクを r に強制した (大きい順に r 個の固有値のみを残し、残りの固有値を 0 に置き換えて計算した) 一般逆行列を表す。

$$\boldsymbol{W}_\alpha=(\boldsymbol{V}_\alpha)^-_r \tag{31}$$

式 (30) を式 (27) に代入し、それを式 (24) に代入して高次の項を無視すれば次のようになる (導出省略)。

$$J=c+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}W^{(kl)}_\alpha F^{(k)}_\alpha F^{(l)}_\alpha \tag{32}$$

定数 c と係数 1/2 は最適化に関係しないから、次の結論を得る。

【命 題 4】 ベクトル $\boldsymbol{u}$ の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は制約 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ のもとでの次の非線形最適化問題の解として与えられる。

$$J[\boldsymbol{u}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)} F_\alpha^{(k)} F_\alpha^{(l)} \to \min \qquad (33)$$

6．直線当てはめ

平面上の点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に直線 $Ax + By + C = 0$ を当てはめる問題を考える。(x_α, y_α) は各 α ごとに独立で、期待値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をもつ確率変数とする。直線当てはめは次の推定問題として定式化できる。

【問 題 2】 $\alpha = 1, ..., N$ に対して

$$A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + C = 0 \qquad (34)$$

が成立する定数 A, B, C をデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定せよ。

式 (34) のランクは 1 である。3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \qquad (35)$$

と定義する。命題4より $\boldsymbol{n}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる。

$$J[\boldsymbol{n}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})} \to \min \qquad (36)$$

これは非線形最適化問題であるが、“くりこみ法” によって探索によらずに計算できる [5, 8]。誤差が同一かつ等方的であれば式 (36) は “最小二乗法” $\sum_{\alpha=1}^{N}(Ax_\alpha + By_\alpha + C)^2/(A^2 + B^2) \to \min$ に帰着する。

データ点数が大きいとき、式 (23) の漸近近似 M_∞^- を計算することによって、画素の密な列として定義されるエッジへの直線当てはめの精度を定量的に表現することができる [2, 3, 8]。それを利用すれば精度を最大にするカメラキャリブレーションシステムを設計することもできる [13]。

7．コニック当てはめ

平面上の点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に 2 次曲線 (コニック) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0$ を当てはめる問題を考える。各 α ごとに (x_α, y_α) は独立で、期待値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ の 2 次元確率変数とする。コニック当てはめは次の推定問題として定式化できる。

【問 題 3】 $\alpha = 1, ..., N$ に対して

$$A\bar{x}_\alpha^2 + 2B\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha + C\bar{y}_\alpha^2 + 2(D\bar{x}_\alpha + E\bar{y}_\alpha) + F = 0 \qquad (37)$$

となる定数 A, B, C, D, E, F をデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定せよ。

式 (37) のランクは 1 である。3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$ を式 (35) の第 1 式のように定義し、3 次元行列 $\boldsymbol{Q}$ を

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} A & B & E \\ B & C & F \\ E & F & D \end{pmatrix} \qquad (38)$$

と定義する。$\boldsymbol{x}_\alpha$ が正規分布に従い、共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ をもつとする。誤差は小さいと仮定し、独立な誤差の積を正規分布で近似すると、命題4より $\boldsymbol{Q}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる (3 次元行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ の内積を $(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij}$ と定義する)。

$$J[\boldsymbol{Q}] = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}_\alpha)^2}{2(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha) + (V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}; \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha])} \to \min \qquad (39)$$

これは非線形最適化問題であるが、“くりこみ法” によって探索によらずに計算できる [5, 7]。直線およびコニックだけではなく、平面や多項式曲線、多項式曲線の当てはめ、ステレオによる 3 次元復元 [11, 12] についても本論文の理論が同様に適用できる。

8．一般の3次元運動解析

空間中の N 個の特徴点 $\{P_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ を 2 台のカメラで観測したとき、P_α の画像座標がそれぞれ $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $(\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$ であるとする (単位は画素)。3 次元ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha/f \\ \bar{y}_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}'_\alpha/f' \\ \bar{y}'_\alpha/f' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (40)$$

と定義する。f, f' はそれぞれのカメラの焦点距離である (単位は画素)。第 2 のカメラの位置は第 1 のカメラに並進 $\boldsymbol{h}$、回転 $\boldsymbol{R}$ を施して得られた位置にあるとすると、次のエピ極線方程式が成り立つ [1, 2]。

$$|\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha| = 0 \qquad (41)$$

左辺はベクトルのスカラ三重積であり、画像に誤差はないものとする。$\{\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{R}\}$ を**運動パラメータ**と呼ぶ。運動パラメータ $\{\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{R}\}$ に対する制約は式 (41) が必要十分である。

画像に誤差があり、実際に観測される値 $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ は各点ごとに独立で、期待値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ をもつ確率変数であるとする。3次元運動解析は次のような当てはめ問題とみなせる。

【問 題 4】 データ $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ から、エピ極線方程式 (41) が成立する運動パラメータ $\{\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{R}\}$ を推定せよ。

式 (41) のランクは1である。$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ が正規分布に従い、それぞれ共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ をもつとする。誤差は小さいと仮定し、独立な誤差の積を正規分布で近似すると、命題4より $\{\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{R}\}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる。ただし3次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$ と3次元行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ との積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}$ を (ij) 要素が $\sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ikl} a_k A_{lj}$ の行列と定義する (ϵ_{ijk} は**エディングトンのイプシロン**であり、(ijk) が (123) の偶順列のとき 1、奇順列のとき -1、その他の場合に 0 をとる)。

$$J[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}] = \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}) |\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha|^2 \to \min \tag{42}$$

$$\begin{aligned} W_\alpha(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}) = 1/((&\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha, V[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \\ &+(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{R}V[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{x}_\alpha) \\ &+ (V[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}); (\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R})V[\boldsymbol{x}'_\alpha])) \end{aligned} \tag{43}$$

これは非線形最適化問題であるが、“くりこみ法” によって探索によらずに計算できる [6, 9]。

9．平面の3次元運動解析

前節の解法では、すべての特徴点が**臨界曲面**と呼ばれる特殊な曲面の上にあれば解が不定となる。臨界曲面は一般には二つのカメラのレンズの中心を通る一葉双曲面であり、実の線織面であることが知られている [2]。しかしその縮退として、任意の平面も臨界曲面になっており、すべての特徴点が平面上にあるときは別の解法が必要となる。

空間中の特徴点 P_α, $\alpha = 1, ..., N$ がすべて同一平面上にあれば、ある正則行列 $\boldsymbol{A}$ が存在して式 (40) のベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha \propto \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ の関係を満たす [1, 2]。これは画像上で**射影変換**が引き起こされることを意味している。射影変換を定義する行列 $\boldsymbol{A}$ が求まれば、これから平面の方程式や運動パラメータが解析的に計算できる [1, 2]。

画像に誤差があり、実際に観測される値 $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ は誤差は各点ごとに独立で期待値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の確率変数であるとする。平面の3次元運動解析は次のような当てはめ問題とみなせる。

【問 題 5】 $\alpha = 1, ..., N$ に対して

$$\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{0} \tag{44}$$

が成立する行列 $\boldsymbol{A}$ をデータ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$, $\{\boldsymbol{x}'_\alpha\}$ からを推定せよ。

式 (44) の3成分は $\boldsymbol{A}$ に関する3個の線形方程式を与えるが、これらは1次従属であり、2個のみ1次独立である。したがって式 (44) のランクは2である。しかし、データ $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ および $\boldsymbol{A}$ の真の値からの摂動の1次近似式を作ると、得られる3個の方程式は1次独立となる。したがって、この当てはめ問題は“退化” している (前報 [10] の注意3参照)。$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ が正規分布に従い、それぞれ共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ をもつとする。誤差は小さいと仮定し、独立な誤差の積を正規分布で近似すると、命題4より $\boldsymbol{A}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる。ただし3次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $\boldsymbol{b} = (b_i)$ と3次元行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ に対して $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と $[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]$ をそれぞれ (ij) 要素が $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} a_k b_m A_{ln}$, $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} A_{km} B_{ln}$ の行列と定義する。

$$J[\boldsymbol{A}] = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) \to \min \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{A}) = (&\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{A}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top \times \boldsymbol{x}'_\alpha \\ &+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha)\times V[\boldsymbol{x}'_\alpha]\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\alpha) \\ &+ [\boldsymbol{A}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{A}^\top \times V[\boldsymbol{x}'_\alpha]])_2^- \end{aligned} \tag{46}$$

これは非線形最適化問題であるが、“くりこみ法” によって探索によらずに計算できる [6, 14]。

10．オプティカルフロー解析

空間中のある特徴点をカメラで観測した画像座標を (x, y) とする (単位は画素)。カメラが並進速度 $\boldsymbol{v}$、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の瞬間運動を行なうときの画像座標 (x, y) の変化速度 (**オプティカルフロー**) を $(\dot{x}, \dot{y})$ とする。カ

メラの焦点距離を f(単位は画素) とし、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\dot{\boldsymbol{x}}} = \begin{pmatrix} \bar{\dot{x}}/f \\ \bar{\dot{y}}/f \\ 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

と置くと、次の**エピ極線方程式**が成り立つ [2, 4]。

$$|\boldsymbol{x}, \bar{\dot{\boldsymbol{x}}}, \boldsymbol{v}| + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) = 0 \tag{48}$$

ただしオプティカルフローに誤差はないものとする。$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ を (瞬間) **運動パラメータ**と呼ぶ。運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ に対する制約は式 (48) が必要十分である。

オプティカルフローに誤差があり、実際に観測される値 $\dot{\boldsymbol{x}}$ は各点ごとに独立で、期待値 $\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}$ をもつ確率変数であるとする。オプティカルフロー解析は次のような当てはめ問題とみなせる。

【問 題 6】 データフロー $\dot{\boldsymbol{x}}$ からエピ極線方程式 (48) が成立するな運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ を推定せよ。

式 (48) のランクは 1 である。誤差が正規分布に従い、$\dot{\boldsymbol{x}}$ が共分散行列 $V[\dot{\boldsymbol{x}}]$ をもてば、命題4より $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる。ただし $\int_S dxdy$ はオプティカルフローの定義されているすべての画素にわたる総和を表す。

$$J[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}] = \int_S W(\boldsymbol{x})(|\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v}| + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}))^2 dxdy \to \min \tag{49}$$

$$W(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}, V[\dot{\boldsymbol{x}}](\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}))} \tag{50}$$

これは非線形最適化問題であるが、"くりこみ法" によって探索によらずに計算できる [4, 6]。ただし、カメラの並進方向 $\boldsymbol{v}$ にある点 $\boldsymbol{x}_{foe}$(出現点) のフローは "特異データ" であり、$W(\boldsymbol{x}_{foe}) = \infty$ になるので、推定した $\boldsymbol{v}$ の方向およびその近傍にある点 $\boldsymbol{x}$ は最適化の過程で除去する必要がある (詳細省略)。

1 1 . まとめ

本論文ではコンピュータビジョンやロボティクスに現われるパラメトリックな関数当てはめ問題の最尤推定を定式化し、"指数型当てはめ問題" と呼ぶクラスでは当てはめパラメータ最尤推定量の共分散行列が前報 [10] で導いた拡張クラメル・ラオの下界を第 1 近似において達成していることを証明した。そして最尤推定量の計算を当てはめパラメータのみの非線形最適化問題に書き直し、計算上の諸問題を指摘するとともに、点列に対する直線およびコニックの当てはめ、画像による一般物体および平面物体の 3 次元運動解析、オプティカルフロー解析に対する最尤推定を行なう非線形最適化問題を導いた。

参考文献

[1] 金谷健一, 「画像理解／3 次元認識の数理」, 森北出版, 1990.

[2] Kanatani, K., *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1993.

[3] 金谷健一, 画像の 3 次元解釈の統計的信頼性, 情報処理学会論文誌, vol. 34, no. 10, pp. 2062–2070, 1993.

[4] Kanatani, K., "3-D interpretation of optical flow by renormalization," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 11, no. 3, pp. 267–282, 1993.

[5] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, vol. 35, no. 2, 201–209, 1993.

[6] Kanatani, K., *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University, April 1994.

[7] Kanatani, K., "Statistical bias of conic fitting and renormalization," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 16, no. 3, 1994.

[8] Kanatani, K., "Statistical analysis of geometric computation," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 59, no. 3, 1994.

[9] Kanatani, K., "Renormalization for motion analysis: Statistically optimal algorithm," *IEICE Trans. Infor. Sys.*, vol. E77-D, no. 11, 1994.

[10] 金谷健一, パラメトリック当てはめの精度の理論的限界, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91 (1994-11).

[11] 金澤 靖, 金谷健一, ステレオによる平面の直接的な再構成, 情報処理学会研究報告, 94-CV-89 (1994-5).

[12] 川島徹, 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる 3 次元復元の信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 94-CV-90 (1994-9).

[13] 丸山 保, 金谷健一, カメラの焦点距離の最適キャリブレーションシステム, 情報処理学会研究報告, 93-CV-82 (1993-3).

[14] 武田佐知男, 金谷健一, くりこみ法による平面の 3 次元運動解析, 情報処理学会研究報告, 94-CV-90 (1994-9).