コンピュータビジョン 91－3
（1994. 11. 24）

パラメトリック当てはめの精度の理論限界

金谷 健一†

群馬大学工学部情報工学科

コンピュータビジョンやロボティクスに現われるパラメトリックな関数の当てはめ問題を極めて一般的に定式化し、計算されるパラメータの不偏推定量の共分散行列の下界を理論的に導出する。これはデータを確率変数とみなしたときの真の値に関するフィッシャー情報行列によって表現される。例として点列に対する直線およびコニックの当てはめについて調べ、画像による３次元運動解析、オプティカルフロー解析の精度の下界を導く。

キーワード: パラメトリックな当てはめ、不偏推定量、フィッシャー情報行列、画像解析、３次元運動解析、オプティカルフロー

Accuracy Bound of Parametric Fitting

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Parametric fitting problems that often appear in computer vision and robotics applications are stated in general terms, and a lower bound on the covariance matrix of the unbiased estimator of the fitting parameter is theoretically derived. The data are regarded as random variables, and the lower bound is expressed in terms of the Fisher information matrix with respect to the true value. By applying this theory, the lower bound is computed for the problem of a fitting line, a plane, and a conic to point data. Also, the lower bound is computed for 3-D motion analysis from two views and 3-D interpretation of optical flow.

Key words: parametric fitting, unbiased estimator, Fisher information matrix, likelihood estimation, image analysis, 3-D motion analysis, optical flow

謝辞。本研究の内容について詳細な議論を頂いた東京大学工学部の甘利俊一教授および杉原厚吉教授に感謝します。

†連絡先: 376 桐生市天神町1-5-1　群馬大学工学部情報工学科
Tel: (0277)30-1841, Fax: (0277)30-1801
E-mail: kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

1．序論

画像やセンサから得られたデータをもとにして3次元環境のモデルを構築することはコンピュータビジョンやロボッティクスの中心的な課題の一つであるが、画像やセンサから得られるデータには本質的に不確定さがあり、これにどう対処するかが重要な問題である。基本的な手段は、誤差がないときに成立する関係式を未知のパラメターを含んだ形で理論的に導出し、観測したデータにそれを“当てはめる”ことである [1, 2, 3, 11]。そのための最適化手法や計算したパラメータの信頼性の評価が理論的に研究され [4]、多くの問題では単純な最小二乗法を適用すると、解に統計的な偏差が生じることが知られている。そこで、それを除去して不偏な推定を行なう“くりこみ法”という計算手法が開発されている [6]。

しかし、データに誤差がある以上どんな計算手法を用いても**達成できる精度には限界がある**。本論文では、パラメトリックな当てはめ問題を一般的に定式化し、パラメータの不偏推定量の共分散行列の下界を理論的に導出する。これはデータを (正規分布に限定しない) 確率変数とみしたときの“フィッシャー情報行列”によって表現される。例として、平面上の点列に対する直線およびコニックの当てはめについて調べ、画像による3次元運動解析およびオプティカルフロー解析の精度の下界を導く。

2．パラメトリック当てはめ問題

引数 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^m$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^n$ の連続微分可能なスカラ関数 $F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})$, $k = 1, ..., L$ が与えられているとする ($\mathcal{R}^p$ は p 次元実数空間)。引数 $\boldsymbol{a}$ の定義域 $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}^m$ は m' 次元多様体であり、引数 $\boldsymbol{u}$ の定義域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ は n' 次元多様体であるとする。**パラメトリックな当てはめ問題**とは直観的には L 個の方程式

$$F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{1}$$

が $\boldsymbol{a}$ の実現値 (“データ”と呼ぶ) $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に“当てはまる”ように、パラメータ $\boldsymbol{u}$ を計算することである。式 (1) を**当てはめ方程式**と呼び、$\boldsymbol{u}$ を**当てはめパラメータ**と呼ぶ。各データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ は未知の真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に未知の誤差が加わったものとする。これを各 α について独立で、$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ をパラメータとする確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ をもつ確率変数であるとみなす。このとき次の問題を考える。

【問 題 1】 真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ が未知のとき、

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{2}$$

となる当てはめパラメータ $\boldsymbol{u}$ の値 $\bar{\boldsymbol{u}}$ をデータ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ から推定せよ。

確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ に関して次の仮定を置く。ただし $\nabla_{\mathbf{a}} f = (\partial f/\partial a_1, ..., \partial f/\partial a_n)^\top$ と約束する (記号 $\top$ は転置を表す)。

【仮 定 1】 確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ は $\boldsymbol{a}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に関して任意の回数だけ連続微分可能であり、すべての $\boldsymbol{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ に対して $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) > 0$ である。また $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ の任意の式の $\boldsymbol{a}_\alpha$ に関する積分 $\int_{\mathcal{A}} d\boldsymbol{a}_\alpha$ は (積分が存在すれば) $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に関する微分 $\nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}$ と交換できる。

$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in \mathcal{A}$ であるから、$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \notin \mathcal{A}$ に対しては $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ はどのように定義されていてもよい。そこで、多様体 $\mathcal{A}$ の $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ における接空間を $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}^m$ とするとき、微小な任意のベクトル $\Delta \boldsymbol{a}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})^\perp$ の1次近似において $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) = p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ が成り立つように拡張されているとする (記号 $\perp$ は直交補空間を表す)。直観的にいえば、多様体 $\mathcal{A}$ の“垂直方向には一定”ということであり、正確に書くと次のようになる。

【仮 定 2】 各 α について $\nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} p_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ である。

式 (1) の L 個の当てはめ方程式は $\boldsymbol{a}$ の関数として代数的に従属でもよい。もし r 個のみが独立であれば、実質的には r 個の制約しかなく、$\boldsymbol{a}$ は特異点を除いて $\mathcal{A}$ のある $(m' - r)$ 次元 (すなわち**余次元** r の) 部分多様体に制約される。r を当てはめ方程式 (1) の**ランク**と呼ぶ。以下、真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ はどれも特異点にはないと仮定する。正確に述べると次のようになる。

【仮 定 3】 当てはめ方程式 (1) は各 $\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ の近傍で同一の余次元 r をもつ $\mathcal{A}$ の部分多様体を定義する。

本論文では L 次元ベクトル $(v^{(1)}, ..., v^{(L)})^\top$ を $(v^{(k)})$ と書く略記法を用いる。データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ を $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta \boldsymbol{a}_\alpha$ と書けば、$\Delta \boldsymbol{a}_\alpha$ の1次近似において

$$(F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta \boldsymbol{a}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})) = (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(1)}, ..., \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(L)})^\top \Delta \boldsymbol{a}_\alpha \tag{3}$$

である。ただし $\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}$ は $\nabla_{\mathbf{a}} F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})$ の略であり、$(\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(1)}, ..., \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(L)})$ は $\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(1)}$, ..., $\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(L)}$ をこの順に列とする L 次元行列である。制約 $\boldsymbol{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ より $\Delta \boldsymbol{a}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるから、式 (3) は $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ から L 次元空間 $\mathcal{R}^L$ のある線形部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ への線形写像を定義する。

接空間 $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}^m$ への射影行列を $\boldsymbol{P}_\alpha$ とすると、任意の $\Delta \epsilon \in \mathcal{R}^m$ に対して $\boldsymbol{P}_\alpha \Delta \epsilon \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるから、部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ の次元は $\{\boldsymbol{P}_\alpha \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}\}$, $k = 1, ..., L$ のランク (線形独立なものの数) に等しい。し

たがって、$\mathcal{L}_\alpha$ の次元は高々 r であるが、次のことを仮定する。

【仮 定 4】 すべての α に対して線形部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ の次元は当てはめ方程式のランク r に等しい。

これは数学的には L 個の当てはめ方程式のそれぞれが $\mathcal{A}$ の余次元1の部分多様体を定義し、それらが $\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N$ において互いに**横断的**に交わっていることを表している。例えば3次元空間で2枚の曲面が曲線や一点で接しているような場合が除外される。また L 個の当てはめ方程式 (1) を例えば一つの方程式 $\sum_{k=1}^{L} F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})^2 = 0$ に置き換えることは許されない。こうすると当てはめ方程式のランクは依然 r であるが、すべての α に対して $\mathcal{L}_\alpha = \{0\}$ となってしまうからである。部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ の次元が当てはめ方程式 (1) のランク r より小さいとき、対応するデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ を**特異データ**と呼び、それ以外のものを**通常データ**と呼ぶ。仮定4は特異データを当てはめのデータから除外することを述べている。

さらに当てはめパラメータ $\boldsymbol{u}$ のとり得る値には $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ 以外の制約が存在しないこと、すなわち式 (2) において $\bar{\boldsymbol{u}}$ に任意に変分 $\Delta\boldsymbol{u}$ を加えても、

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}) = 0 \tag{4}$$

が $k = 1, \ldots, L$ で成立する変分 $\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N$ が存在することを仮定する。多様体 $\mathcal{U}$ の $\bar{\boldsymbol{u}}$ における接空間を $T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ とすると、制約 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ より1次近似において $\Delta\boldsymbol{u} \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ である。同様に制約 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in \mathcal{A}$ より1次近似において $\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ である。式 (4) は1次近似において

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\boldsymbol{u}) = -(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) \tag{5}$$

と書ける。ただし $(\cdot, \cdot)$ はベクトルの内積であり、$\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}$ は $\nabla_{\mathbf{u}}F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})$ の略である。部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ の定義より、上述の仮定は次のように述べられる。

【仮 定 5】 任意の $\Delta\boldsymbol{u} \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ に対して $\left((\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\boldsymbol{u})\right) \in \mathcal{L}_\alpha$。

注意1。以上では "真の値" $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の意味を明確にしていない。直観的には $\boldsymbol{a}_\alpha$ の "期待値" と考えればよいが、データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ は多様体 $\mathcal{A}$ に制約されており、それが "曲がっていれば" 積分 $\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{a}_\alpha p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) d\boldsymbol{a}_\alpha$ が $\mathcal{A}$ から外れるかもしれない。これを避けるには $\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha - \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) d\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{0}$ を満たす値として $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ を定義してもよい。また $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ が最大値をとる $\boldsymbol{a}_\alpha$ の値 ("モード") とみなしてもよい。しかし、以下では $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の満たす条件を直接に用いることはないので、単に $\mathcal{A}$ の "ある値" と考えておけば十分である。

注意2。p 次元空間 $\mathcal{R}^p$ からその q 次元部分空間 ($q \leq p$) への (**直交**) **射影行列** $\boldsymbol{P}_\mathcal{V}$ とは、任意の $\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}^p$ に対して $\boldsymbol{P}_\mathcal{V}\boldsymbol{r} \in \mathcal{V}$ かつ $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{P}_\mathcal{V}\boldsymbol{r} \in \mathcal{V}^\perp$ となる p 次元行列のことである。これは対称 ($\boldsymbol{P}_\mathcal{V}^\top = \boldsymbol{P}_\mathcal{V}$) かつべき等 ($\boldsymbol{P}_\mathcal{V}^2 = \boldsymbol{P}_\mathcal{V}$), であり、ランク q の半正値行列である。部分空間 $\mathcal{V}$ のある正規直交基底を $\{\boldsymbol{v}_i\}$, $i = 1, \ldots, q$ をとると、$\boldsymbol{P}_\mathcal{V} = \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^\top$ と表される。

注意3。一見すると、線形部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ は "多様体" $\mathcal{F} = \{(F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{u}})) \in \mathcal{R}^L \,|\, \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}\}$ の $\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ における "接空間" として定義できるように思える。しかし、問題によっては $\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ が $\mathcal{F}$ の特異点にあたり、$\mathcal{F}$ が $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の近傍で $r' > r$ なる $\mathcal{R}^{r'}$ に局所的に同位相となることがあるので、$\mathcal{F}$ が多様体であるとはいえない。言い換えれば、式 (3) で真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ をデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ で置き換えると、同様に定義される部分空間の次元は r より大きくなることがある [7]。そのような当てはめ問題は**退化**していると呼ぶ。

3．情報行列とモーメント行列

m 次元確率変数 $\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha$ を

$$\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha = \nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \log p_\alpha \tag{6}$$

と定義する。各 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に関する (**フィッシャー**) **情報行列**を次のように定義する。ただし $E[\cdot]$ は同時密度分布 $\prod_{\alpha=1}^{N} p_\alpha$ に関する期待値である (各 α ごとに $\boldsymbol{a}_\alpha$ は独立であるから、$\boldsymbol{a}_\alpha$ のみに関する量では $E[\cdot]$ は p_α に関する期待値に等しい)。

$$\boldsymbol{J}_\alpha = E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha^\top] \tag{7}$$

仮定2より $\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるが、$\boldsymbol{a}_\alpha$ が $\mathcal{A}$ のすべてにわたるとき、$\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha$ は接空間 $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ のあらゆる方向をとり得ると仮定する。このとき確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ は $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ において**正則**であると呼ぶ。正確に書くと次のようになる。

【仮 定 6】 情報行列 $\boldsymbol{J}_\alpha$ のランクは接空間 $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ の次元 m' に等しい。

行列の (**ムーア・ペンローズ**) **一般逆行列**を $(\cdot)^-$ で表す。また (kl) 要素が $\bar{W}_\alpha^{(kl)}$ である L 次元行列を $(\bar{W}_\alpha^{(kl)})$ と略記し、

$$(\bar{W}_\alpha^{(kl)}) = ((\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(l)}))^- \tag{8}$$

と定義する。すなわち、右辺は (kl) 要素が $(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(l)})$ の L 次元行列の一般逆行列の略記である。n 次元行列 $\boldsymbol{M}$ を

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)})(\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)})^\top \tag{9}$$

と定義し、モーメント行列と呼ぶ。$P_{\bar{\mathbf{u}}}$ は多様体 $\mathcal{U}$ の u における接空間 $T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R}^n$ への射影行列である。

データ $\{a_\alpha\}$ は十分多数あり、その真の値 $\{\bar{a}_\alpha\}$ は $\bar{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ であること以外には特別な制約はなく、"一般的に" 分布しているとする。すなわちデータが局在して当てはめに不定性が生じることはないと仮定する。これを正確に書くと、次のようになる。

【仮 定 7】 モーメント行列 M のランクは接空間 $T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ の次元 n' に等しい。

4．当てはめ精度に関する主定理

当てはめパラメータ u のある**不偏推定量**を $\hat{u} = \hat{u}(a_1, ..., a_N)$ とする。これは u の満たすべき制約を満たしていることを要求する。

【仮 定 8】 任意の $a_\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha = 1, ..., N$ に対して $\hat{u}(a_1, ..., a_N) \in \mathcal{U}$ が成立する。

推定量は一般にはその期待値が真の値に一致するとき "不偏" であるというが、多様体 $\mathcal{U}$ が "曲がっていれば" $\hat{u}$ の期待値が $\mathcal{U}$ にあるとは限らない (2 節の注意 1 参照)。そこで不偏性を次のように定義する。

$$E[P_{\bar{\mathbf{u}}}(\hat{u} - \bar{u})] = 0 \tag{10}$$

したがって $\hat{u}$ の**共分散行列**を次のように定義するのが自然である。

$$V[\hat{u}] = E[(P_{\bar{\mathbf{u}}}(\hat{u} - \bar{u}))(P_{\bar{\mathbf{u}}}(\hat{u} - \bar{u}))^\top] \tag{11}$$

以下、次の定理を証明する。ただし対称行列 A, B に対して $A \succeq B$ とは $A - B$ が半正値であることと約束する。

【定 理 1】

$$V[\hat{u}] \succeq M^- \tag{12}$$

5．準備

【補 題 1】 L 次元行列

$$\bar{V}_\alpha = ((\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, J_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(l)})) \tag{13}$$

のランクは当てはめ方程式のランク r に等しい。

(証明) $x = (x^{(k)})$ を任意の L 次元ベクトルとすると、

$$(x, \bar{V}_\alpha x) = (\sum_{k=1}^{L} x^{(k)} \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, J_\alpha^- \sum_{l=1}^{L} x^{(l)} \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(l)}) \tag{14}$$

である。J_α^- は半正値であるから、上式は任意の x で非負である。したがって $\bar{V}_\alpha$ も半正値である。x が $\bar{V}_\alpha$ の零空間 (固有値 0 の固有ベクトルの集合) に属しているとする。このとき上式が 0 になるから $\sum_{k=1}^{L} x^{(k)} \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}$ は J_α^- の零空間に属する。J_α^- の零空間は J_α の零空間に一致する。仮定 6 より J_α の零空間は $T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})^\perp$ である。したがって

$$\sum_{k=1}^{L} x^{(k)} (\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta a_\alpha) = 0 \tag{15}$$

が任意の $\Delta a_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ に対して成立する。部分空間 $\mathcal{L}_\alpha$ の定義により、これは $x \in \mathcal{L}_\alpha^\perp$ を意味する。逆に $x \in \mathcal{L}_\alpha^\perp$ なら、式 (15), (14) を逆にたどって $(x, \bar{V}_\alpha x) = 0$ である。すなわち L 次元行列 $\bar{V}_\alpha$ の零空間は $(L-r)$ 次元部分空間 $\mathcal{L}_\alpha^\perp \subset \mathcal{R}^L$ に一致し、$\bar{V}_\alpha$ のランクは r である。 □

部分空間 $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{R}^L$ への射影行列を $P_{\mathcal{L}_\alpha}$ とすると、式 (8) の定義から直ちに次の結論を得る。

【系 1】 L 次元行列 $\bar{W}_\alpha = (\bar{W}_\alpha^{(kl)})$ のランクも r であり、次の関係が成り立つ。

$$\bar{V}_\alpha \bar{W}_\alpha = P_{\mathcal{L}_\alpha} \tag{16}$$

次の補題が定理 1の証明で本質的な役割を果たす。

【補 題 2】 $\bar{a}_\alpha$ の変分 $\Delta\bar{a}_\alpha$ を

$$\Delta\bar{a}_\alpha = -J_\alpha^- \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} (\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta u) \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(l)} \tag{17}$$

と選ぶと、任意の $\Delta u \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ に対して $\Delta\bar{a} \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であり、1 次近似において

$$F^{(k)}(\bar{a}_\alpha + \Delta\bar{a}_\alpha, u + \Delta u) = 0 \tag{18}$$

が $k = 1, ..., L$ で成立する。

(証明) 仮定 2 より $\bar{l}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるから、式 (7) より $P_\alpha J_\alpha = J_\alpha$ である。したがって $P_\alpha J_\alpha^- = J_\alpha^-$ でもあり、$\Delta\bar{a}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ である。式 (18) を示すには

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\bar{a}_\alpha) = -(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta u) \tag{19}$$

を示せばよい。式 (17), (16) より

$$(\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta\bar{a}_\alpha) = -\sum_{l=1}^{L}(\sum_{m=1}^{L} (\nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, J_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}}\bar{F}_\alpha^{(m)}) \bar{W}_\alpha^{(ml)}) \tag{20}$$

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)}, \Delta u) = -\sum_{l=1}^{L} (P_{\mathcal{L}_\alpha})_{kl} (\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(l)}, \Delta u) \tag{21}$$

となる。ただし $(P_{\mathcal{L}_\alpha})_{kl}$ は $P_{\mathcal{L}_\alpha}$ の (kl) 要素である。仮定 5 より L 次元ベクトル $((\nabla_{\mathbf{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}, \Delta u))$ は $\mathcal{L}_\alpha$ の要素である。ゆえに式 (19) が示された。 □

【補 題 3】

$$E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha] = 0 \tag{22}$$

（証明） $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ が確率密度であるから

$$\int_{\mathcal{A}} p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha; \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) d\boldsymbol{a}_\alpha = 1 \tag{23}$$

である。これは $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in \mathcal{A}$ について恒等的に成立するから、$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に $\Delta\bar{\boldsymbol{a}} \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ なる任意の変分を加えても、左辺の第1変分は0である。仮定1および対数微分公式 $\nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} p_\alpha = p_\alpha \nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \log p_\alpha$ から、式(23)の左辺の第1変分は次のように書ける。

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \log p_\alpha, \Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) p_\alpha d\boldsymbol{a}_\alpha = (E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha], \Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) \tag{24}$$

これが任意の $\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ で0になるから、$E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha] \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})^\perp$ である。仮定2より $\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるから、$E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha] \in T_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であり、式(22)を得る。 □

n 次元確率変数 $\boldsymbol{m}_\alpha$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{m}_\alpha = \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} (\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha, \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}) \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)} \tag{25}$$

【補 題 4】

$$E[(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{m}_\alpha)^\top] = -\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \tag{26}$$

（証明）式(10)は $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ であって、かつ式(2)を満たす $\bar{\boldsymbol{a}}_1, ..., \bar{\boldsymbol{a}}_N, \boldsymbol{u}$ については恒等的に成立する。このことは、任意の $\Delta\boldsymbol{u} \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ に対して $\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ を式(17)のように選べば、式(10)の左辺の第1変分が0になることを意味する。仮定1および対数微分公式から、式(10)の左辺の第1変分は次のように書ける。

$$\begin{aligned} &E[-\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \Delta\bar{\boldsymbol{u}}] + \int_{\mathcal{A}^N} \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} (\hat{\boldsymbol{u}} \\ &-\bar{\boldsymbol{u}}) \prod_{\beta=1}^{N} p_\beta \sum_{\alpha=1}^{N} (\nabla_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \log p_\alpha, \Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) d\boldsymbol{a}_1 \cdots d\boldsymbol{a}_N \\ &= -\Delta\boldsymbol{u} - E[\hat{\boldsymbol{u}} (\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} (\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha, \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(l)}) \\ &\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)})^\top] \Delta\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{27}$$

ただし1次近似において $\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}+\Delta\mathbf{u}} = \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}}$ であることを用いた。式(27)が任意の $\Delta\boldsymbol{u} \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ に対して0となる。$\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \Delta\boldsymbol{\xi}$ と置くと、任意の $\Delta\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{R}^n$ に対して $\Delta\boldsymbol{u} \in T_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathcal{U})$ である。したがって

$$\begin{aligned} &-E[\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} (\hat{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}) (\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} (\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha, \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(l)}) \\ &\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)})^\top] \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \Delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \Delta\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{28}$$

が任意の $\Delta\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{R}^n$ に対して成立する。これから式(26)を得る。 □

【補 題 5】

$$\boldsymbol{M} = E[(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{m}_\alpha)(\sum_{\beta=1}^{N} \boldsymbol{m}_\beta)^\top] \tag{29}$$

（証明）補題3と式(25)より $E[\boldsymbol{m}_\alpha] = \boldsymbol{0}$ である。各 α に対する $\boldsymbol{a}_\alpha$ の独立性より

$$\begin{aligned} &E[(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{m}_\alpha)(\sum_{\beta=1}^{N} \boldsymbol{m}_\beta)^\top] \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} E[\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}_\beta^\top] = \sum_{\alpha=1}^{N} E[\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha^\top] \end{aligned} \tag{30}$$

である。式(25)より

$$\begin{aligned} &E[\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha^\top] \\ &= \sum_{k,l,m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} \bar{W}_\alpha^{(mn)} \\ &(\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{J}_\alpha^- E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha \bar{\boldsymbol{l}}_\alpha^\top] \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(m)}) \\ &(\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)})(\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(n)})^\top \\ &= \sum_{l,n=1}^{L} (\sum_{k,m=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(lk)} (\nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{J}_\alpha^- \nabla_{\mathbf{a}} \bar{F}_\alpha^{(m)}) \\ &\bar{W}_\alpha^{(mn)}) (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)})(\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(n)})^\top \\ &= \sum_{k,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(ln)} (\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)})(\boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha^{(n)})^\top \end{aligned} \tag{31}$$

となり、式(30)から式(29)を得る。ただし式(31)の変形で、行列 $\bar{\boldsymbol{W}}_\alpha$ の定義(8)と恒等式 $\bar{\boldsymbol{W}}_\alpha \bar{\boldsymbol{V}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha = \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha^- \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha = \bar{\boldsymbol{W}}_\alpha$ を用いた。 □

6．定理1の証明

補題4, 5から

$$E[\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} (\hat{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}) \\ \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{m}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\bar{\mathbf{u}}} (\hat{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}}) \\ \sum_{\beta=1}^{N} \boldsymbol{m}_\beta \end{pmatrix}^\top]$$

$$= \begin{pmatrix} V[\hat{u}] & -P_{\bar{u}} \\ -P_{\bar{u}} & M \end{pmatrix} \tag{32}$$

となる。定義からこの行列は半正値である。一般に行列 A が半正値であれば、任意の行列 B に対して行列 $B^\top AB$ も (積が定義できれば) 半正値であるから、次の行列も半正値である。

$$\begin{pmatrix} P_{\bar{u}} & M^- \\ & M^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V[\hat{u}] & -P_{\bar{u}} \\ -P_{\bar{u}} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\bar{u}} & \\ M^- & M^- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V[\hat{u}] - M^- & \\ & M^- \end{pmatrix} \tag{33}$$

ただし上式の変形で仮定7から M の零空間が $T_{\bar{u}}(\mathcal{U})^\top$ に一致し、したがって $MM^- = M^-M = P_{\bar{u}}$ となることを用いた。式 (33) の行列が半正値であり、行列 M^- も半正値であるから、行列 $V[\hat{u}] - M^-$ も半正値である。 □

定理 1の下界は通常の統計的推論の**クラメル・ラオの下界**に相当しているので、これを**拡張クラメル・ラオの下界**と呼ぶ。

取り扱いが容易でかつ現実的な誤差モデルは、データ a_α を正規分布に従う確率変数とみなすことである。しかし、正規分布はユークリッド空間全域で定義される分布であり、無限遠にまで正の確率をもつのに対して、ここでは a_α が $\mathcal{R}^m$ の m' 次元多様体 $\mathcal{A}$ に限定されている。そこで誤差が小さいと仮定し、各 $a_\alpha \in \mathcal{A}$ の分布は $\bar{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ のごく近傍に集中していて、接空間 $T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$ での正規分布と同一視できるとする。このような分布を**局所正規分布**と呼ぶ。これは誤差が小さいときの漸近的な表現を考える本論文の立場と適合している。このとき密度関数は次の形に表せる。

$$p_\alpha(a_\alpha; \bar{a}_\alpha) = Ce^{-(a_\alpha - \bar{a}_\alpha, V[a_\alpha]^-(a_\alpha - \bar{a}_\alpha))/2} \tag{34}$$

ただし C は正規化定数である。$V[a_\alpha]$ は a_α の共分散行列であり、次のように定義される。

$$V[a_\alpha] = E[(P_\alpha(a_\alpha - \bar{a}_\alpha))(P_\alpha(a_\alpha - \bar{a}_\alpha))^\top] \tag{35}$$

この定義より $V[a_\alpha]$ はランク m' の特異行列であり、その零空間は $T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})^\perp$ である。このとき当てはめ問題は明らかに指数型である。式 (34) より $\bar{L}_\alpha = J_\alpha = V[a_\alpha]^-$ である。

7．直線当てはめ

平面上の点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に直線 $Ax + By + C = 0$ を当てはめる問題を考える。(x_α, y_α) は各 α ごとに独立で、期待値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をもつ確率変数とする。直線当てはめは次の推定問題として定式化できる。

【問 題 2】 $\alpha = 1, ..., N$ に対して

$$A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + C = 0 \tag{36}$$

が成立する定数 A, B, C をデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定せよ。

定数倍の不定性を除くために $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ と正規化する。3次元ベクトル x_α, n を

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{37}$$

と定義する。$\bar{x}_\alpha = E[x_\alpha]$ とし、$\bar{x}_\alpha$ に関する情報行列を J_α とする。定理 1より、n の不偏推定量 $\hat{n}$ の共分散行列 $V[\hat{n}]$ の拡張クラメル・ラオ下界が次のように与えられる。

$$V[\hat{n}] \succeq \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha^\top}{(n, J_\alpha^- n)} \right)^- \tag{38}$$

例えば $x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta x_\alpha$, $y_\alpha = \bar{y}_\alpha + \Delta y_\alpha$ として、誤差 $(\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha)$ がどの点について同一かつ等方的で平均 (0,0)、$E[\Delta x_\alpha^2] = E[\Delta y_\alpha^2] = \epsilon^2$, $E[\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha] = 0$ の正規分布に従うと、式 (38) の右辺は次のようになる。

$$\frac{\epsilon^2}{1+d^2} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha & N \end{pmatrix}^- \tag{39}$$

ただし d は直線 $Ax + By + C = 0$ の座標原点からの距離である。式 (39) の下界は通常の最小二乗法によれば第 1 近似において到達できる。

8．コニック当てはめ

平面上の点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$ に2次曲線 (**コニック**) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Dx+Ey)+F = 0$ を当てはめる問題を考える。(x_α, y_α) は各 α ごとに独立で、期待値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をもつ確率変数とする。コニック当てはめは次の推定問題として定式化できる。

【問 題 3】 $\alpha = 1, ..., N$ に対して

$$A\bar{x}_\alpha^2 + 2B\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha + C\bar{y}_\alpha^2 + 2(D\bar{x}_\alpha + E\bar{y}_\alpha) + F = 0 \tag{40}$$

が成立する定数 A, B, C, D, E, F をデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定せよ。

定数倍の不定性を除くために$A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2=1$と正規化する。直線当てはめの場合と同様に$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$を定義し、$\boldsymbol{X}_\alpha=\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha^\top$, $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top$と置く。また行列$\boldsymbol{Q}$を次のように定義する。

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \tag{41}$$

行列$\boldsymbol{Q}$の不偏推定量$\hat{\boldsymbol{Q}}$の共分散テンソルを

$$\mathcal{V}[\hat{Q}]=E[\mathcal{P}_{\mathbf{Q}}(\hat{\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{Q})\otimes\mathcal{P}_{\mathbf{Q}}(\hat{\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{Q})] \tag{42}$$

と定義する。$\mathcal{P}_{\mathbf{Q}}$は$(ijkl)$要素が$\delta_{ik}\delta_{jl}-Q_{ij}Q_{kl}$の射影テンソルである。ただし$\delta_{ij}$はクロネッカのデルタである($i=j$のとき1、それ以外は0をとる)。定理1より、共分散テンソル$\mathcal{V}[\hat{Q}]$の拡張クラメル・ラオの下界が次のように与えられる。

$$\mathcal{V}[\hat{Q}]\succeq\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha\otimes\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha}{(\boldsymbol{Q};\mathcal{J}_\alpha^-\boldsymbol{Q})}\right)^- \tag{43}$$

ただし$\succeq$は左辺と右辺の差が半正値であることを意味し、$\mathcal{J}_\alpha$は$\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha$に関する(フィッシャー)情報テンソルである。また3次元行列$\boldsymbol{A}=(A_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(B_{ij})$の内積を$(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})=\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}B_{ij}$と定義している。上式は定理1において、ベクトル代数を内積$(\cdot;\cdot)$による行列の線形空間に拡張したものである[7]。式(43)の下界は“くりこみ法”によって到達できる[6, 8]。

9．3次元運動解析

空間中のN個の特徴点$\{P_\alpha\}$, $\alpha=1,\ldots,N$を2台のカメラで観測したとき、P_αの画像座標がそれぞれ$(\bar{x}_\alpha,\bar{y}_\alpha)$, $(\bar{x}'_\alpha,\bar{y}'_\alpha)$であるとする(単位は画素)。3次元ベクトル$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$を

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha=\begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha/f \\ \bar{y}_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha=\begin{pmatrix} \bar{x}'_\alpha/f' \\ \bar{y}'_\alpha/f' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

と定義する。f, f'はそれぞれのカメラの焦点距離である(単位は画素)。第2のカメラの位置は第1のカメラに並進$\boldsymbol{h}$、回転$\boldsymbol{R}$を施して得られた位置にあるとすると、次のエピ極線方程式が成り立つ[2, 3]。

$$|\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha,\boldsymbol{h},\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha|=0 \tag{45}$$

左辺はベクトルのスカラ三重積であり、画像に誤差はないものとする。$\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{R}\}$を運動パラメータと呼ぶ。運動パラメータ$\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{R}\}$に対する制約は式(45)が必要十分である。

画像に誤差があり、実際に観測される値$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$は各点ごとに独立で、期待値$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$をもつ確率変数であるとする。3次元運動解析は次のような当てはめ問題とみなせる。

【問題4】 データ$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,N$から、エピ極線方程式(45)が成立する運動パラメータ$\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{R}\}$を推定せよ。

運動パラメータ$\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{R}\}$の不偏推定量$\{\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{R}}\}$が得られたとする。ただしスケールの不定性を除くために$\|\boldsymbol{h}\|=1$と正規化する。相対回転$\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^\top$も回転行列であるから、これはある回転軸$\boldsymbol{l}$(単位ベクトル)の周りの正の回転角$\Delta\Omega$の回転である。$\boldsymbol{h}$に垂直な平面への射影行列を$\boldsymbol{P}_{\mathbf{h}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{h}\boldsymbol{h}^\top$とし、推定量$\{\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{R}}\}$の共分散行列を次のように定義する[7]。

$$\begin{aligned} V[\hat{\boldsymbol{h}}]&=E[(\boldsymbol{P}_{\mathbf{h}}(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}))(\boldsymbol{P}_{\mathbf{h}}(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}))^\top] \\ V[\hat{\boldsymbol{R}}]&=E[(\Delta\Omega)^2\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}^\top] \\ V[\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{R}}]&=V[\hat{\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{h}}]^\top=E[(\boldsymbol{P}_{\mathbf{h}}(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}))(\Delta\Omega\boldsymbol{l})^\top] \end{aligned} \tag{46}$$

$\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{x}'_\alpha$が正規分布に従い、それぞれ共分散行列$V[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{x}'_\alpha]$をもつとする。誤差は小さいと仮定し、独立な誤差の積を正規分布で近似すると、定理1より、拡張クラメル・ラオの下界は次のように与えられる(詳細省略)。ただし3次元ベクトル$\boldsymbol{a}=(a_i)$と3次元行列$\boldsymbol{A}=(A_{ij})$との積$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}$を$(ij)$要素が$\sum_{k,l=1}^{3}\epsilon_{ikl}a_kA_{lj}$の行列と定義する($\epsilon_{ijk}$はエディングトンのイプシロンであり、$(ijk)$が(123)の偶順列のとき1、奇順列のとき$-1$、その他の場合に0をとる)。

$$\begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{h}}] & V[\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{R}}] \\ V[\hat{\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{h}}] & V[\hat{\boldsymbol{R}}] \end{pmatrix}\succeq \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha^\top & \sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha^\top \\ \sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha^\top & \sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha^\top \end{pmatrix}^- \tag{47}$$

ただし次のように定義する。

$$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\times\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha \tag{48}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha=(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha,\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)\boldsymbol{h}-(\boldsymbol{h},\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \tag{49}$$

$$\begin{aligned} W_\alpha=1/((&\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha,V[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha) \\ &+(\boldsymbol{h}\times\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha,\boldsymbol{R}V[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\times\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) \\ &+(V[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R});(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R})V[\boldsymbol{x}'_\alpha])) \end{aligned} \tag{50}$$

$\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}$は基本行列と呼ばれる[2, 3]。式(47)の下界は“くりこみ法”によって到達できる[10]。

１０．オプティカルフロー解析

空間中のある特徴点をカメラで観測した画像座標を (x, y) とする (単位は画素)。カメラが並進速度 $\boldsymbol{v}$、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の瞬間運動を行なうときの画像座標 (x, y) の変化速度 (**オプティカルフロー**) を $(\bar{\dot{x}}, \bar{\dot{y}})$ とする。カメラの焦点距離を f(単位は画素) とし、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\dot{\boldsymbol{x}}} = \begin{pmatrix} \bar{\dot{x}}/f \\ \bar{\dot{y}}/f \\ 1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

と置くと、次の**エピ極線方程式**が成り立つ [3, 5]。

$$|\boldsymbol{x}, \bar{\dot{\boldsymbol{x}}}, \boldsymbol{v}| + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) = 0 \tag{52}$$

ただしオプティカルフローに誤差はないものとする。$\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ を (**瞬間) 運動パラメータ**と呼ぶ。運動パラメータ $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ に対する制約は式 (52) が必要十分である。

オプティカルフローに誤差があり、実際に観測される値 $\dot{\boldsymbol{x}}$ は各点ごとに独立で、期待値 $\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}$ をもつ確率変数であるとする。オプティカルフロー解析は次のような当てはめ問題とみなせる。

【問 題 5】 データフロー $\dot{\boldsymbol{x}}$ からエピ極線方程式 (52) が成立するな運動パラメータ $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ を推定せよ。

$\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ の不偏推定量 $\{\hat{\boldsymbol{v}},\ \hat{\boldsymbol{\omega}}\}$ が得られたとする。ただしスケールの不定性を除くために $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ と正規化する。$\boldsymbol{v}$ に垂直な平面への射影行列を $\boldsymbol{P}_{\mathbf{V}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top$ とし、推定量 $\{\hat{\boldsymbol{v}},\ \hat{\boldsymbol{\omega}}\}$ の共分散行列を次のように定義する。

$$\begin{aligned} V[\hat{\boldsymbol{v}}] &= E[(\boldsymbol{P}_{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}))(\boldsymbol{P}_{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}))^\top] \\ V[\hat{\boldsymbol{\omega}}] &= E[(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega})(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega})^\top] \\ V[\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}] &= V[\hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{v}}]^\top = E[(\boldsymbol{P}_{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}))(\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega})^\top] \end{aligned} \tag{53}$$

誤差が正規分布に従い、$\dot{\boldsymbol{x}}$ が共分散行列 $V[\dot{\boldsymbol{x}}]$ をもてば、定理 1 より拡張クラメル・ラオの下界は次のように与えられる (詳細省略)。

$$\begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{v}}] & V[\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}] \\ V[\hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{v}}] & V[\hat{\boldsymbol{\omega}}] \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} \int_S W\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{a}}^\top dxdy & \int_S W\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}^\top dxdy \\ \int_S W\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{a}}^\top dxdy & \int_S W\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{b}}^\top dxdy \end{pmatrix}^- \tag{54}$$

ただし $\int_S dxdy$ はオプティカルフローの定義されているすべての画素にわたる総和を表し、$\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, W を次のように定義する。

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{x} \times \bar{\dot{\boldsymbol{x}}} + \|\boldsymbol{x}\|^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x} \tag{55}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{x} \tag{56}$$

$$W = \frac{1}{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}, V[\dot{\boldsymbol{x}}](\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{x}))} \tag{57}$$

式 (57) の下界は“くりこみ法” によって到達できる [7]。

１１．まとめ

コンピュータビジョンやロボティクスに現われるパラメトリックな関数当てはめ問題ではデータに誤差がある以上、達成できる精度には限界がある。本論文では問題を一般的に定式化し、パラメータの不偏推定量の共分散行列の下界を理論的に導出した。例として点列に対する直線およびコニックの当てはめについて調べ、画像による３次元運動解析、オプティカルフロー解析の精度の下界を導いた。

参考文献

[1] R. M. Bolle and B. C. Verumi, “On three-dimensional surface reconstruction methods,” *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 9, no. 1, pp. 1–13, 1991.

[2] 金谷健一,「画像理解／３次元認識の数理」, 森北出版, 1990.

[3] Kanatani, K., *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1993.

[4] 金谷健一, 画像の３次元解釈の統計的信頼性, 情報処理学会論文誌, vol. 34, no. 10, pp. 2062–2070, 1993.

[5] Kanatani, K., “3-D interpretation of optical flow by renormalization,” *Int. J. Comput. Vision*, vol. 11, no. 3, pp. 267–282, 1993.

[6] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, vol. 35, no. 2, 201–209, 1993.

[7] Kanatani, K., *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University, April 1994.

[8] Kanatani, K., “Statistical bias of conic fitting and renormalization,” *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 16, no. 3, 1994.

[9] Kanatani, K., “Statistical analysis of geometric computation,” *CVGIP: Image Understanding*, vol. 59, no. 3, 1994.

[10] Kanatani, K., “Renormalization for motion analysis: Statistically optimal algorithm,” *IEICE Trans. Infor. Sys.*, to appear.

[11] 武田晴夫, L.-C. Latombe, 透視距離データからの直線の最ゆう推定, 電子情報通信学会論文誌 D-II, vol. J77-D-II, no. 6, pp. 1096–1103, 1994.