

## くりこみ法とそれを用いたオプティカルフローの解析

太田 直哉 金谷 健一

群馬大学 工学部 情報工学科  
〒376 群馬県桐生市天神町 1-5-1

オプティカルフローからカメラの運動パラメータと物体までの距離情報を得る Structure from Motion の問題を、“くりこみ法”と呼ばれる統計的パラメータ推定方法を適用して解く手法について述べる。まず最初にくりこみ法が対象とするパラメータ推定問題を、通常の最小二乗推定問題と対比して説明した後、くりこみ法のアルゴリズムを述べる。次に Structure from Motion の問題をくりこみ法によって解くが、この問題は本来の形ではくりこみ法が適用できないので、これを可能にするために問題の変形を行って解を求める。さらに、この問題の変形が解に及ぼす影響に対する適切な補正について述べ、その効果をシミュレーションによる実験で示す。また、最後に本手法を実画像に適用した例を示す。

キーワード: オプティカルフロー, 3次元運動解析, 距離情報, 最小二乗法, 最尤推定法

## Renormalization and its application for Structure from Motion

Naoya Ohta Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University  
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu 376 Gunma, Japan

This paper describes an application of the *renormalization* scheme for the structure from motion problem. Renormalization is a statistical parameter estimation method, but the problems which renormalization can be applied to differ from the problems that can be solved by the standard least-squares method. We first characterize those problems which renormalization can deal with and then describe the algorithm. Next, we modify the structure from motion problem so that renormalization can be applied. Since this modification deteriorates the accuracy of the resulting solution, the solution is corrected in a statistical optimal way. The advantage of this correction is shown by computer simulation. An experiment using a real image sequence is also shown.

**Key words:** optical flow, 3-D motion analysis, depth map, least square estimation, maximum likelihood estimation

謝辞: 本研究の実験に協力して頂いた群馬大学工学部、情報工学科の森下弘幸君に感謝致します。

## 1 はじめに

本論文ではオプティカルフローの3次元解釈問題に対し、筆者の一人が提案した“くりこみ法”を適用して解く手法について述べる。くりこみ法とは最小二乗解を計算するアルゴリズムの一種であるが、一般に行われる最小二乗法とは問題設定が異なる。そこで、一般的な最小二乗法と対比させながらここで扱う最小二乗法について述べ、次にそれを解くアルゴリズムとしてくりこみ法を述べる。その後にそれを用いたオプティカルフローの解析手法を述べ、実験結果について報告する。紙面の都合上、既存の研究への言及、詳細な数式の導出や定理の証明などは割愛した。これらについては参考文献を参照願いたい。

## 2 2種類の最小二乗問題

通常、最小二乗法は次のように定式化される。推定すべき  $m$  個のパラメータ  $x_i$  があって、それが係数  $a_{\alpha i}$  によって線形変換された結果が計測値  $b_{\alpha}$  として観測される。計測においては計測条件とは独立なノイズが混入し、計測値  $b_{\alpha}$  はその真の値  $\bar{b}_{\alpha}$  にノイズ  $e_{\alpha}$  が加わったものになる。以上のこととを数式で表現すれば以下のようにになる。

$$a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha m}x_m = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_{\alpha}) = \bar{b}_{\alpha} \quad (1)$$

$$b_{\alpha} = \bar{b}_{\alpha} + e_{\alpha} \quad (2)$$

$\mathbf{a}_{\alpha}, \mathbf{x}$  はそれぞれ  $a_{\alpha i}, x_i$  を成分とする  $m$  次元ベクトルで、 $(\cdot, \cdot)$  は内積を表す。式(1)はパラメータと真の観測値との関係を表し、式(2)は計測過程を表す。このような計測を条件を変えながら、すなわち係数  $\mathbf{a}_{\alpha}$  を変えながら  $n$  回繰り返すと  $n$  個の観測値  $b_{\alpha}$  が得られる。ノイズ  $e_{\alpha}$  が平均 0、分散  $\sigma_{\alpha}^2$  のガウスノイズのとき、パラメータ  $\mathbf{x}$  の最ゆう推定問題は以下の最小化問題になる。

$$J = \sum_{\alpha=1}^n W_{\alpha} (b_{\alpha} - (\mathbf{x}, \mathbf{a}_{\alpha}))^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

$$W_{\alpha} = \frac{1}{\sigma_{\alpha}^2} \quad (4)$$

この問題は物理学で“逆問題”と呼ばれるものの最も単純な場合であり、正規方程式を解くことによって解が得られる。以下、この最小二乗法を LS1 と呼ぶ。

次に述べる最小二乗法は、パラメータ  $\mathbf{x}$  が変換された結果を計測値として観測するのではなく、パラメータの線形関係を表す係数  $\mathbf{a}_{\alpha}$  自体を計測値とするものである。

$$\bar{a}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \bar{a}_{\alpha m}x_m = (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{a}}_{\alpha}) = 0, \|\mathbf{x}\| = 1 \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_{\alpha} + \mathbf{e}_{\alpha} \quad (6)$$

$\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}$  は  $\mathbf{a}_{\alpha}$  の真の値、 $\mathbf{e}_{\alpha}$  は平均 0、共分散行列  $V_{\alpha}$  のガウスノイズである。この問題設定においても、式(5)がノイズフリーの時のパラメータの関係を表し、式(6)が計測過程を表す。各  $\mathbf{a}_{\alpha}$  が同時に観測される確率は次のようになる。

$$\Pr(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^n \sqrt{(2\pi)^m |V_{\alpha}|}} \exp(-\frac{1}{2} J) \quad (7)$$

$$J = \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{a}_{\alpha} - \bar{\mathbf{a}}_{\alpha}, V_{\alpha}^{-1}(\mathbf{a}_{\alpha} - \bar{\mathbf{a}}_{\alpha})) \quad (8)$$

ここで  $|\cdot|$  は行列式の値を表す。したがって最ゆう推定解を求めるには式(8)の  $J$  を式(5)で示されるパラメータ

拘束の範囲内で最小化すればよい。そのためにはまず  $\mathbf{x}$  を固定し、 $J$  を最小にする  $\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}$  を求める。導出<sup>1</sup>は省略し、結果のみを示すと、解  $\hat{\mathbf{a}}_{\alpha}$  は次式となる。

$$\hat{\mathbf{a}}_{\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a}_{\alpha})}{(\mathbf{x}, V_{\alpha} \mathbf{x})} V_{\alpha} \mathbf{x} \quad (9)$$

これを式(8)の  $J$  に代入すると、最終的に次の最小化問題となる。

$$J = \sum_{\alpha=1}^n W_{\alpha} (\mathbf{a}_{\alpha}, \mathbf{x})^2 \rightarrow \min, \|\mathbf{x}\| = 1 \quad (10)$$

$$W_{\alpha} = \frac{1}{(\mathbf{x}, V_{\alpha} \mathbf{x})} \quad (11)$$

式(10)、(11)から分かるように、 $J$  の値はベクトル  $\mathbf{x}$  の方向のみに依存し、そのノルムには無関係である。したがって、式(10)の  $\mathbf{x}$  に関する制約は、定数倍の自由度を減らすものなら他の制約でも同じ問題となる。以下、この最小二乗法を LS2 と呼ぶ。

LS2 においてノイズ  $e_{\alpha}$  の各成分が独立で等しい分散を持っている場合には、共分散行列が  $V_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 I$  ( $I$  は単位行列) となるので、式(11)は  $W_{\alpha} = 1/\sigma_{\alpha}^2$  となり、式(10)は次式のように変形できる。

$$J = (\mathbf{x}, M \mathbf{x}) \rightarrow \min, \|\mathbf{x}\| = 1 \quad (12)$$

$$M = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}^T}{\sigma_{\alpha}^2} \quad (13)$$

式(12)の最小化問題では、パラメータに関する制約は  $\|\mathbf{x}\| = 1$  でなければならない。この問題の解は式(13)で定義する“モーメント行列” $M$  の最小固有値に対応する単位固有ベクトルとなる。

共分散行列  $V_{\alpha}$  が一般の場合には、上記のような固有値問題として解くことができず、式(10)の最小化は Newton 法のような数値探索によらざるを得ない<sup>2</sup>。くりこみ法はこの問題、すなわち最小二乗法 LS2 において計測値に含まれるノイズが一般の共分散行列を持っている場合の問題を解くアルゴリズムであり、一般的な数値探索アルゴリズムを適用するよりも、効率的に解を得ようとするものである<sup>3</sup>。また、くりこみ法によって得られる解は式(10)の解、すなわち最ゆう推定解とは厳密には一致しないが、統計的な推定精度は一次近似において同等であることが示される。

以上の問題を視覚的に説明するために、平面上の点に原点を通る直線を当てはめる問題を例にとりる(図1参照)。この問題に LS1 を適用するためには、パラメータの次元  $m$  を 1、データ点の座標を  $(a_{\alpha 1}, b_{\alpha})$ 、ノイズの分散  $\sigma_{\alpha}^2$  を 1 とする、 $\mathbf{a}_{\alpha}$  は 1 次元ベクトル  $(a_{\alpha 1})$  となる。これによって推定したパラメータ  $\hat{x}_1$  が直線の傾きを与え、その直線は、直線と点との距離を  $b$  軸にそって測ったときに(図1の  $r_1$ )最も適合するものになっている。一方、LS2 を用いた当てはめでは、パラメータの次元  $m$  は 2、データ点の座標は  $(a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2})$  であり、ベクトル  $\mathbf{a}_{\alpha}$  は  $(a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2})^T$  となる。共分散行列  $V_{\alpha}$  を単位行列とすれば、得られる直線は直線と点との距離を直線への垂線で測ったときに(図

<sup>1</sup>Lagrange の未定乗数法を用いる。

<sup>2</sup> $V_{\alpha}$  が一般の場合でも  $\alpha$  によらないときは一般固有値問題になり、変形によって固有値問題として解くことができる。

<sup>3</sup>その他、ノイズの絶対値の推定が同時に行われる、推定されたパラメータ  $\mathbf{x}$  の分散が同時に計算される、などの利点がある。

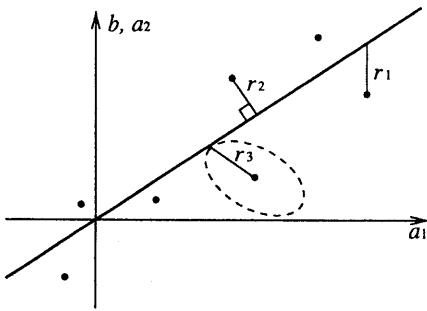


図 1: 最小二乗法による直線の当てはめ

1の $r_2$ )最も適合したものになる。そして推定したパラメータ $\hat{x}$ は直線の法線を与える。共分散行列 $V_\alpha$ が一般の場合は、点と直線までの距離を各点固有の Mahalanobis 距離で測ったときに(図 1 の $r_3$ : 楕円は等距離の位置を示す)最も適合する直線が得られる。くりこみ法が対象とするのはこの場合である。なお、多変量解析における回帰分析と主成分分析は、データ点の重心を原点として、分散 $\sigma_\alpha$ が 1 の LS1 および共分散行列 $V_\alpha$ が単位行列の LS2 による当てはめを適用したものと見ることができる。

### 3 くりこみ法

LS2において、共分散行列 $V_\alpha$ が一般の場合に式(10)の最小化問題を解くには数値探索が必要であること述べたが、この問題の特性を生かした解法を考える。

式(10)の最小化問題が式(12)のように固有値問題となるのは $V_\alpha$ が単位行列の定数倍の場合、すなわち式(10)の重み $W_\alpha$ が定数の場合である。このことから、直観的に次のような解法が考えられる。まず重み $W_\alpha$ を定数であると考えて適当な初期値を与え、これを固有値問題として解く。すなわち次式の行列 $M^*$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルを計算する。

$$M^* = \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\alpha^T \quad (14)$$

次に、この固有ベクトルを式(11)に代入して重み $W_\alpha$ を更新し、上記の固有値計算を繰り返す。以下、このアルゴリズムを AL1 と呼ぶ。

AL1 は直観的ではあるが、その解は式(10)の $J$ の最小値には収束しない<sup>4</sup>。したがって、AL1 は式(10)の最小化問題の解法にはならない。しかし式(10)の最小化問題は式(5)、(6)の推定問題から導出されたものであり、我々が最終的に行いたいのはパラメータ推定であることを考えると、AL1 が式(10)の $J$ の最小値を与えないとしても、その解の推定量としての性質が最ゆう推定解と同程度の精度を持てば有用なアルゴリズムといえる。しかし、この解の推定量としての性質を調べると、解がバイアスを持つことが分かる<sup>5</sup>。そこで AL1 をバイアスを持たない解を与えるように改良することを考える。それには、各ステップの固有ベクトル計算によって得られる推定値を不偏にす

<sup>4</sup>このアルゴリズムの解の周りで式(10)の $J$ の第1変分を解析することにより得られる。

<sup>5</sup>式(10)の $W_\alpha$ を定数として $J$ をパラメータの真の値の周りで展開し、その第1変分の期待値をとることによって得られる。

ればよいが、それは行列 $M^*$ を次式で示す“不偏モーメント行列” $\hat{M}$ に補正することで達成できる[6]。

$$\hat{M} = \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha (\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\alpha^T - V_\alpha) \quad (15)$$

行列 $\hat{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルをパラメータ $\hat{x}$ の推定量として見た場合、重み $W_\alpha$ がどのような定数であっても第一近似<sup>6</sup>において不偏になる。もちろん推定値の精度(分散)は重み $W_\alpha$ を適切に選ばないと良いものとはならないので、AL1 と同様に反復によって重み $W_\alpha$ を更新する。すなわち、 $W_\alpha$ に適当な初期値を与えて行列 $\hat{M}$ を計算し、その最小固有値に対する単位固有ベクトルと式(11)から重み $W_\alpha$ を更新し、これを繰り返す。以下、このアルゴリズムを AL2 と呼ぶ。

さて、実際に AL2 を適用するには共分散行列 $V_\alpha$ が正確に分かっている必要がある。これが正確でないと推定値の不偏性が失われてしまうが、この情報を正確に知ることは難しい。しかし、一般に共分散行列の相対的な性質、すなわち定数倍を除いて情報が得られている場合は多い。そこで、その定数をもパラメータとして推定することを考える。共分散行列を次のように置く。

$$V_\alpha = \epsilon^2 V_\alpha^0 \quad (16)$$

上式における定数 $\epsilon$ を“ノイズレベル”、 $V_\alpha^0$ を“正規化共分散行列”と呼び、正規化共分散行列 $V_\alpha^0$ は既知であるがノイズレベル $\epsilon$ は未知であるとする。上式を式(15)に代入して不偏モーメント行列 $\hat{M}$ を求め、それをデータ数 $n$ で割ったものを改めて $\hat{M}$ と置けば次式が得られる<sup>7</sup>。

$$\hat{M} = M^* - \epsilon^2 N \quad (17)$$

$$M^* = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\alpha^T, \quad N = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha V_\alpha^0 \quad (18)$$

式(14)の $M^*$ もデータ数 $n$ で割ったものを改めて $M^*$ と置いた。問題は式(17)の行列 $\hat{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルが不偏推定値となるように $\epsilon^2$ を定めることであるが、これを厳密に行なうには求めるべき真のパラメータの値を必要とする。そこで、 $\hat{M}$ の真の値 $M$ が備えているべき性質である特異性<sup>8</sup>に注目し、 $\hat{M}$ が特異行列になるように、言い換えれば最小固有値が 0 になるように $\epsilon^2$ を選ぶ。これは以下の式を満たす $\epsilon$ が存在するよう $\epsilon^2$ を決定することである。

$$\hat{M} \hat{x} = (M^* - \epsilon^2 N) \hat{x} = 0 \quad (19)$$

上式は次のように変形することができる。

$$M^* \hat{x} = \epsilon^2 N \hat{x} \quad (20)$$

式(20)は $M^*$ の $N$ に関する一般固有値問題になっている。すなわち、この一般固有値を $\epsilon^2$ とすれば、対応する単位一般固有ベクトルが $\hat{M}$ の固有値 0 に対する固有ベクトル $\hat{x}$ となっている。したがって式(20)の一般固有値問題を解くことで、 $\epsilon^2$ の決定とパラメータの推定値 $\hat{x}$ の計

<sup>6</sup>行列とその固有ベクトルの摂動の関係を線形近似したこと意味する。

<sup>7</sup>定数倍しても固有ベクトルは不变である。

<sup>8</sup>真のモーメント行列 $M$ による残差 $J = (\hat{x}, M \hat{x})$ はパラメータの真の値 $\hat{x}$ で 0 になる。

算が同時に実行される。以上のことから3番目のアルゴリズム AL3 が構築できる。重み  $W_\alpha$  に適当な初期値を与え、式(18)により  $M^*$  と  $N$  を計算して式(20)の一般固有値問題を解いて  $\epsilon^2$  と  $\mathbf{x}$ を得、式(11)によって重み  $W_\alpha$  を更新し、これを繰り返す。これがくりこみ法の原型である。

AL3 には一般固有値問題が含まれており、これは2回の固有値計算によって解くことができる[6]が、これを1回の固有値計算を反復する解法に直し、その反復を重み  $W_\alpha$  の更新のための反復と同時に実行するのがくりこみ法である。一般固有値の反復解法は次のとおりである。まず変数  $c$  に適当な初期値を与える以下の  $\hat{M}$  を計算する。

$$\hat{M} = M^* - cN \quad (21)$$

次に  $\hat{M}$  の最小固有値  $\lambda_0$  と対応する単位固有ベクトル  $\mathbf{x}_0$  を求め、次式によって  $c$  を更新する。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_0}{(\mathbf{x}_0, N\mathbf{x}_0)} \quad (22)$$

この計算が収束したとき、 $c$  が  $M^*$  の  $N$  に関する最小の一般固有値、 $\mathbf{x}_0$  が対応する一般固有ベクトルになっている。以上の解法の反復と重み  $W_\alpha$  の更新の反復を同時に実行すればくりこみ法になる。以下にそれをまとめる。

**step 1:** データ  $a_\alpha$  とその正規化共分散行列  $V_\alpha^0$  を入力し、 $W_\alpha = 1, c = 0$  と置く。

**step 2:** 式(18)により行列  $M^*, N$  を計算し、次の行列  $\hat{M}$  を求める。

$$\hat{M} = M^* - cN$$

**step 3:** 行列  $\hat{M}$  の最小固有値  $\lambda_0$  と対応する固有ベクトル  $\mathbf{x}_0$  を計算し、 $\lambda_0 \approx 0$  ならば終了して  $\mathbf{x}_0, c, \hat{M}$  を出力する。

**step 4:** 次式により  $W_\alpha$  と  $c$  を更新し、**step 2** に戻る。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_0}{(\mathbf{x}_0, N\mathbf{x}_0)}, \quad W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\mathbf{x}_0, V_\alpha^0 \mathbf{x}_0)}$$

以上のアルゴリズムが収束したとき、 $\mathbf{x}_0$  がパラメータの推定値となる。変数  $c$  はノイズレベルの二乗  $\epsilon^2$  に対応するが、そのまま推定値として用いるとバイアスを持つことが分かる。 $c$  に対する統計解析を行うと、 $nc/\epsilon^2$  が近似的に自由度  $n - m + 1$  の  $\chi^2$  分布を示すことが示され、次のように不偏推定量  $\hat{\epsilon}^2$  とその分散  $V[\hat{\epsilon}^2]$  が導かれる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - (m-1)/n}, \quad V[\hat{\epsilon}^2] = \frac{2\hat{\epsilon}^4}{n-m+1} \quad (23)$$

また、推定値  $\mathbf{x}$  とその共分散行列  $V[\mathbf{x}]$  が次のように得られる。

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0, \quad V[\hat{\mathbf{x}}] = \frac{\hat{\epsilon}^2}{n} \hat{M}^{-} \quad (24)$$

上式の  $\hat{M}^{-}$  は  $\hat{M}$  の一般逆行列を表す。実際の計算では  $M$  を固有値分解し、最小固有値を0とし、それ以外の固有値は逆数をとってから合成することで得られる。

以上に述べたように、くりこみ法は最ゆう推定のような統計的な基準から定義された推定量を計算するものではないが、その解の推定量としての性質は一次近似の範囲内においては不偏であり有効であることが示される[7, 8]。ここに述べたくりこみ法は最も単純な場合の原型であり、計測過程の関係が複数あって、しかも線形従属である場合にも適用できる。この場合は一般逆行列のランクの解析が複雑になる。

#### 4 オプティカルフローの解析

オプティカルフローからカメラの運動パラメータと環境の3次元形状を復元する問題について考える。カメラの焦点距離を1とすると、画像上の点  $\mathbf{x}$  とオプティカルフロー  $\dot{\mathbf{x}}$  はそれぞれ  $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$  および  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T$  と表される。静止環境中をカメラが並進速度  $\mathbf{v}$ 、回転速度  $\omega$  で運動したときに生じるオプティカルフローが物体までの距離によらず満たすべき関係は、次式で示す  $e(\mathbf{x})$  が0になることである。

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}| + (\mathbf{v} \times \mathbf{x}, \omega \times \mathbf{x}) \\ &= |\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{x}, \mathbf{v}| \end{aligned} \quad (25)$$

ここで  $|\cdot, \cdot, \cdot|$  はスカラー3重積を表す。条件  $e(\mathbf{x}) = 0$  は視線、静止環境を基準にしたオプティカルフローおよびカメラの並進速度ベクトルが同一平面上にあることを表し、“エビポーラ拘束”と呼ばれる。画像上では、この条件は回転成分を除いた後のオプティカルフローがFOEを通る直線上に存在することを表す。ここで解くべき問題はノイズを含んだ計測値  $\dot{\mathbf{x}}$  からパラメータ  $(\mathbf{v}, \omega)$  を推定することであり、エビポーラ拘束  $e(\mathbf{x}) = 0$  が式(5)の最初の式に対応する。また、オプティカルフローの解析で並進速度  $\mathbf{v}$  の定数倍の自由度が残ることはよく知られており、ここで  $\|\mathbf{v}\| = 1$  と置く。これが式(5)の2番目の式に対応する。物体までの距離は運動パラメータを推定した後に計算される真のオプティカルフローの推定値から計算できる。

さて、エビポーラ拘束  $e(\mathbf{x}) = 0$  は式(5)の最初の式に對応すると言ったが、それは真の値の関係を表すという意味であって、この関係がパラメータ  $(\mathbf{v}, \omega)$  と計測値  $\dot{\mathbf{x}}$  との内積ではないので最小二乗法 LS2 にはならず、くりこみ法によって解くことはできない。そこで計測値  $\dot{\mathbf{x}}$  とパラメータ  $(\mathbf{v}, \omega)$  に変換を施して、それらの関係を線形化することを考える。なお、ここまで計測値やパラメータをベクトル、分散を行列で表現したが、ここで階数を上げて、それぞれ行列、テンソルによる記述を用いる<sup>9</sup>。これは表記の簡便性のためだけではなく、問題の持つ幾何学的な構造を座標変換に不变な形式で表して、幾何学的意味を明確にするためでもある。まず、次式で示す計測行列  $\mathbf{X}$  およびフロー行列  $\mathbf{F}$  を定義する。

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^T + A[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] \quad (26)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v}, \omega)\mathbf{I} + S[\mathbf{v}\omega^T] + \mathbf{v} \times \mathbf{I} \quad (27)$$

ここで、ベクトルと行列の外積は行列の各列ベクトルとの外積をその列ベクトルとする行列を表す。また、 $S[\cdot]$  および  $A[\cdot]$  はそれぞれ行列の対称化および半対称化作用素であり、次式で定義される。

$$S[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad A[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (28)$$

行列の内積  $(\cdot, \cdot)$  をベクトルの場合と同じように対応する成分の積の和として定義すると、式(25)は計測行列  $\mathbf{X}$  およびフロー行列  $\mathbf{F}$  の内積として次のように表される。

$$e(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}; \mathbf{F}) \quad (29)$$

また  $\|\mathbf{v}\| = 1$  の拘束は次式の拘束となる。

$$\|A[\mathbf{F}]\| = \sqrt{(A[\mathbf{F}]; A[\mathbf{F}])} = \sqrt{2} \quad (30)$$

<sup>9</sup> テンソル演算の詳細は文献[3]を参照。

計測行列  $\mathbf{X}$  の分散は、その  $(ij)$  要素と  $(kl)$  要素の共分散を  $(ijkl)$  要素に持つ共分散テンソル  $\mathcal{V}[\mathbf{X}]$  で表され、その  $(ijkl)$  要素は式(26)より次のようにになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{V}[\mathbf{X}]_{ijkl} &= \frac{1}{4}(V[\dot{\mathbf{x}}]_{ik}x_jx_l - V[\dot{\mathbf{x}}]_{il}x_jx_k \\ &\quad - V[\dot{\mathbf{x}}]_{jk}x_ix_l + V[\dot{\mathbf{x}}]_{jl}x_ix_k)\end{aligned}\quad (31)$$

ここで  $V[\dot{\mathbf{x}}]$  は  $\dot{\mathbf{x}}$  の共分散行列<sup>10</sup>である。また正規化共分散テンソル  $\mathcal{V}^0[\mathbf{X}]$ 、ノイズレベル  $\epsilon$  も式(16)と同様に定義される。

以上でくりこみ法を適用する準備は整ったが、式(27)の変換によって見かけ上のパラメータの次元が増えていく。すなわち、もともとのパラメータ  $(v, \omega)$  は  $\|\mathbf{v}\|=1$  の制約により 5 次元の自由度を持っているが、フロー行列  $\mathbf{F}$  は  $3 \times 3$  の行列であり、式(30)の制約を考慮しても見かけ上 8 次元の自由度がある。これは  $\mathbf{F}$  が式(27)で示されるような  $(v, \omega)$  に分解されなければならないことに起因し、これが  $\mathbf{F}$  に対する 3 次の制約になっている。しかし、この制約を課すとくりこみ法が適用できなくなるので、まずこの制約が無いものとして解き、その解を制約を満たすように適切に補正するという手法を用いる。これを“線形化手法”と呼ぶ。以下、くりこみ法による解法を説明し、次にこの補正について述べる。

問題を最小二乗法 LS2 と対応させて整理すると、式(5)の計測値  $a_\alpha$  およびパラメータ  $\mathbf{x}$  がそれぞれ計測行列  $\mathbf{X}$  およびフロー行列  $\mathbf{F}$  に対応し、式(5)が式(29)の  $e(\mathbf{x})=0$ 、および式(30)に対応する。したがって、くりこみ法は次のようになる。ただし添字の  $\alpha$  はオブティカルフローが得られている画素 ( $n$  個) に対する通し番号を表す。

**step 1:** オブティカルフロー  $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$  およびその正規化共分散行列  $\mathcal{V}^0[\dot{\mathbf{x}}_\alpha]$  を入力し、式(26)および式(31)により計測行列  $\mathbf{X}_\alpha$  および共分散テンソル  $\mathcal{V}^0[\mathbf{X}_\alpha]$  を計算すると共に、 $W_\alpha = 1, c = 0$  と置く。

**step 2:** “不偏モーメントテンソル”  $\hat{\mathcal{M}}$  を次式により計算する。ここで  $\hat{\mathcal{M}}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  は 4 階 3 次のテンソルであり、 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  は要素で示す。

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} - c\mathcal{N} \\ \mathcal{M}_{ijkl} &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha X_{\alpha ij} X_{\alpha kl} \\ \mathcal{N}_{ijkl} &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha \mathcal{V}^0[\mathbf{X}_\alpha]_{ijkl}\end{aligned}$$

**step 3:** 不偏モーメントテンソル  $\hat{\mathcal{M}}$  の最小固有値  $\lambda_0$  と対応する固有行列  $\mathbf{F}_0$  を計算し<sup>11</sup>、 $\lambda_0 \approx 0$  ならば終了して  $\hat{\mathcal{M}}, \mathbf{F}_0, c$  を出力する。固有行列  $\mathbf{F}_0$  は  $\|A[\mathbf{F}_0]\| = \sqrt{2}$  となるように正規化する。

**step 4:** 次式により  $W_\alpha$  と  $c$  を更新し<sup>12</sup>、step 2 に戻る。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_0 \| \mathbf{F}_0 \|^2}{(\mathbf{F}_0; \mathcal{V}^0 \mathbf{F}_0)}$$

<sup>10</sup>第 3 行および第 3 列の成分は 0 である。

<sup>11</sup>テンソル  $\hat{\mathcal{M}}$  の各要素を  $9 \times 9$  対称行列に並べ換えて固有値分解し、その固有ベクトルを  $3 \times 3$  行列に並べ換えて固有行列  $\mathbf{F}$  とする。要素の並び換えについては文献[3]参照のこと。

<sup>12</sup>FOE では重み  $W_\alpha$  が発散するので、FOE 付近のデータは除く。

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\mathbf{F}_0; \mathcal{V}^0[\mathbf{X}_\alpha] \mathbf{F}_0)}$$

ここで、テンソル  $\mathcal{T}$  と行列  $\mathbf{A}$  の積  $\mathcal{T}\mathbf{A}$  は、その  $(ij)$  要素が次式で定義される行列である。

$$(\mathcal{T}\mathbf{A})_{ij} = \sum_{k,l} \mathcal{T}_{ijkl} A_{kl}$$

ノイズレベルの二乗の不偏推定値  $\hat{\epsilon}^2$  とその分散  $V[\hat{\epsilon}^2]$  は次式で与えられる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 8/n}, \quad V[\hat{\epsilon}^2] = \frac{2\hat{\epsilon}^4}{n-8} \quad (32)$$

フロー行列の推定値  $\hat{\mathbf{F}}$  は  $\mathbf{F}_0$  である。その分散の情報は  $\hat{\mathcal{M}}$  が担っているのであるが、式(24)を直接用いることはできない。これはパラメータのノルムに関する拘束が  $\|\mathbf{F}\|=1$  でなく式(30)であることに起因する。拘束が  $\|\mathbf{F}\|=1$  のときにはパラメータ  $\mathbf{F}$  は半径 1 の超球上に束縛されており、式(24)で計算される共分散行列(テンソル)は超球の半径方向、すなわち  $\mathbf{F}$  方向に null space を持っている<sup>13</sup>。しかし、ここでの束縛は式(30)であるので、この拘束に対して直交する方向を null space に持つ共分散テンソルを求めなければならない。これは  $\mathcal{M}$  を拘束が定義する多様体の接空間に射影すればよく、これは次式に成分を示す射影テンソル  $\mathcal{P}$  で実現される。

$$\mathcal{P}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}A[\hat{\mathbf{F}}]_{ij}A[\hat{\mathbf{F}}]_{kl} \quad (33)$$

ここで  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。射影されたテンソル  $\hat{\mathcal{M}}'$  の要素は次式となる。

$$\hat{\mathcal{M}}'_{ijkl} = \sum_{m,n,p,q} \mathcal{P}_{ijmn} \mathcal{P}_{ktpq} \hat{\mathcal{M}}_{mnpq} \quad (34)$$

これより  $\hat{\mathbf{F}}$  の共分散テンソル  $\mathcal{V}[\hat{\mathbf{F}}]$  が次式で与えられる<sup>14</sup>。

$$\mathcal{V}[\hat{\mathbf{F}}] = \epsilon^2 \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}], \quad \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}] = \frac{1}{n} \hat{\mathcal{M}}'^{-1} \quad (35)$$

さて、フロー行列の推定値  $\hat{\mathbf{F}}$  とその正規化共分散テンソル  $\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  が得られたので、次に行うべきことは  $\hat{\mathbf{F}}$  を式(27)を満たす  $(v, \omega)$  が存在するように補正し、 $(v, \omega)$  に分解することである。まず、行列  $\mathbf{D}$  を次のように定義する。

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) - 2S[\mathbf{K} \mathbf{v} \mathbf{v}^T] \quad (36)$$

$$\mathbf{K} = S[\mathbf{F}], \quad \mathbf{v} = (A[\mathbf{F}]_{32}, A[\mathbf{F}]_{13}, A[\mathbf{F}]_{21})^T \quad (37)$$

すると、フロー行列  $\mathbf{F}$  が式(27)のように分解できることと、次式が成り立つこととは同値になる[4]。

$$\mathbf{D} = \mathbf{O} \quad (38)$$

式(38)の条件は  $\mathbf{F}$  の存在する 9 次元空間中で 6 次元の多様体を定義するが、くりこみ法においてこの条件を考慮

<sup>13</sup>パラメータに拘束がある場合、推定値もその拘束が表す多様体の接空間から外れる方向には誤差を生じ得ない。この方向が共分散行列の null space として表現される。

<sup>14</sup>ここで  $\hat{\mathcal{M}}'^{-1}$  は  $\hat{\mathcal{M}}'$  の一般逆であり、 $9 \times 9$  対称行列に変換して固有値分解した後、最小固有値を 0 として合成する。文献[3]参照。

せずに解いたので、得られた解  $\hat{\mathbf{F}}$  が必ずしもこの多様体上に乗っていない。したがって、ここで行うべきことは  $\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  を計量とする Maharanobis 距離で  $\hat{\mathbf{F}}$  を多様体上の最も近い点へ射影することである。しかし解は解析的には求めないので、線形近似による解法を繰り返す。まず、式(36)の右辺を  $\hat{\mathbf{F}}$  の周りで線形化し、その線形関数を用いて  $\mathbf{D}$  を  $\mathbf{O}$  とするような  $\hat{\mathbf{F}}$  の補正量を  $\Delta\mathbf{F}$  とすると次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{C}\Delta\mathbf{F} = \mathbf{D} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= \frac{1}{2} \text{trK}(\delta_{ik}v_j + \delta_{jk}v_i) - K_{ik}v_j - K_{jk}v_i \\ &\quad - \delta_{jk} \sum_l K_{il}v_l - \delta_{ik} \sum_l K_{jl}v_l \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} B_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{kl}v_iv_j - \delta_{ik}v_lv_j \\ &\quad - \delta_{jl}v_kv_i - \delta_{ji}v_kv_i - \delta_{il}v_kv_j - \delta_{jk}v_lv_i) \end{aligned} \quad (41)$$

$$C_{ijkl} = -\frac{1}{2} \sum_m \epsilon_{klm} A_{ijm} + B_{ijkl} \quad (42)$$

ここで  $A$  は 3 階 3 次の、 $B$  よび  $C$  は 4 階 3 次のテンソル、 $\epsilon_{ijk}$  は Eddington のイプシロンである。式(39)は第 1 近似としての  $\Delta\mathbf{F}$  が存在する 6 次元線形空間を表しており、この制約の下に Maharanobis 距離  $I$  が最小となる点を求める。

$$I^2 = (\Delta\mathbf{F}, \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]^{-1}\Delta\mathbf{F}) \rightarrow \min, \quad \mathcal{C}\Delta\mathbf{F} = \mathbf{D} \quad (43)$$

この問題の解は次式で与えられる。

$$\Delta F_{ij} = \sum_{k,l,m,n,p,q} \mathcal{W}_{mnpq} C_{mnkl} \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijkl} D_{pq} \quad (44)$$

ただしテンソル  $\mathcal{W}$  は次のように定義される。

$$\mathcal{W} = (\mathcal{V})_3^-, \quad \mathcal{V}_{ijkl} = \sum_{m,n,p,q} C_{ijmn} C_{klpq} \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{mnpq} \quad (45)$$

上式において  $(\cdot)_3^-$  はランクを 3 に制限した一般逆<sup>15</sup>を表す。なお、式(30)の制約の情報は  $\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  の null space として表現されており、式(44)はこの制約を破らない方向への修正を与えるものであるが、これは線形近似であるので、再びノルムの正規化を行って新たな  $\mathbf{F}$  とする。

$$\hat{\mathbf{F}} \leftarrow \frac{\sqrt{2}(\hat{\mathbf{F}} - \Delta\mathbf{F})}{\|A[\hat{\mathbf{F}} - \Delta\mathbf{F}]\|} \quad (46)$$

また、フロー行列  $\hat{\mathbf{F}}$  の更新に伴って式(30)の制約に関係した  $\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  の null space も変化するので、これも次式によって更新する。

$$\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijkl} \leftarrow \sum_{m,n,p,q} \mathcal{P}_{ijmn} \mathcal{P}_{klpq} \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{mnpq} \quad (47)$$

ここでテンソル  $\mathcal{P}$  は式(33)に新たな推定値  $\hat{\mathbf{F}}$  を代入したものである。以上の計算を  $\mathbf{D} \approx \mathbf{O}$  となるまで繰り返す。

さて、以上のフロー行列  $\hat{\mathbf{F}}$  の補正によって  $\hat{\mathbf{F}}$  は式(38)が表す多様体上に乗ったが、この多様体の接平面に直交する方向へは誤差が生じ得ないことを共分散テンソル

<sup>15</sup>テンソル  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_{ijkl})$  は  $ij$  より  $kl$  に関して対称であるので、 $6 \times 6$  対称行列に変換される。この行列を固有値分解して固有値を大きい方から 3 つ残して合成し、再びテンソルに変換する。文献[3]参照。

$\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  に反映させる必要がある。これは  $\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  が接平面と直交する方向に null space を持つように修正すればよく、次式で達成される。

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijkl} &\leftarrow \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijkl} - \\ &\quad \sum_{m,n,p,q,a,b,c,d} \mathcal{W}_{abcd} \mathcal{C}_{abmn} \mathcal{C}_{cdpq} \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijmn} \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{klpq} \end{aligned} \quad (48)$$

補正したフロー行列  $\hat{\mathbf{F}}$  とその共分散テンソル  $\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]$  が得られたので、これを運動パラメータ  $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\omega})$  に分解すると共に、それらの共分散行列  $V[\hat{\mathbf{v}}], V[\hat{\mathbf{v}}, \hat{\omega}], V[\hat{\omega}]$  を計算する。これらは次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{v}} = (A[\hat{\mathbf{F}}]_{32}, A[\hat{\mathbf{F}}]_{13}, A[\hat{\mathbf{F}}]_{21})^T \quad (49)$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2} (\text{tr}\hat{\mathbf{F}} + 3(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{v}}))\hat{\mathbf{v}} - 2S[\hat{\mathbf{F}}]\hat{\mathbf{v}} \quad (50)$$

$$V[\hat{\mathbf{v}}]_{ij} = \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{k,l,m,n} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \hat{\mathcal{V}}^0[\mathbf{F}]_{klmn} \quad (51)$$

$$V[\hat{\omega}]_{ij} = \epsilon^2 \sum_{k,l,m,n} A_{ikl} A_{jmn} \hat{\mathcal{V}}^0[\mathbf{K}]_{klmn} +$$

$$\epsilon^2 \sum_{k,l} B_{ik} B_{jl} V^0[\hat{\mathbf{v}}]_{kl} +$$

$$\epsilon^2 \sum_{k,l,m} (A_{ikl} B_{jm} \hat{\mathcal{V}}^0[\mathbf{K}, \hat{\mathbf{v}}]_{klm} +$$

$$B_{ik} A_{ilm} \hat{\mathcal{V}}^0[\mathbf{K}, \hat{\mathbf{v}}]_{lmk}) \quad (52)$$

$$V[\hat{\omega}, \hat{\mathbf{v}}]_{ij} = \epsilon^2 \sum_{k,l} A_{ikl} \hat{\mathcal{V}}^0[\mathbf{K}, \hat{\mathbf{v}}]_{klj} +$$

$$\epsilon^2 \sum_k B_{ik} V^0[\hat{\mathbf{v}}]_{kj} \quad (53)$$

$$\mathcal{V}^0[\mathbf{K}]_{ijkl} = \frac{1}{4} (\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijkl} + \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijlk} +$$

$$\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{jikl} + \mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{jilk}) \quad (54)$$

$$\mathcal{V}^0[\mathbf{K}, \hat{\mathbf{v}}]_{ij} = -\frac{1}{4} \sum_{l,m} \epsilon_{klm} (\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{ijlm} +$$

$$\mathcal{V}^0[\hat{\mathbf{F}}]_{jilm}) \quad (55)$$

$$A_{ijk} = \frac{1}{2} \delta_{jk} v_i - 2 \delta_{ij} v_k \quad (56)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \text{trK} \delta_{ij} - 2 K_{ij} \quad (57)$$

次に、推定した運動パラメータ  $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\omega})$  をもとにして真的オブティカルフローの推定値  $\hat{\mathbf{x}}$  を求める。これには計測したフロー  $\dot{\mathbf{x}}$  をエピポーラ拘束  $e(\mathbf{x}) = 0$  が表す直線上で<sup>16</sup>、 $V^0[\dot{\mathbf{x}}]$  を計量とする Maharanobis 距離で測って最も近い点に修正すればよい。修正したフロー  $\hat{\mathbf{x}}$  と、それから計算される距離の推定値  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  は次式となる。

$$\hat{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \frac{e(\mathbf{x}) V^0[\dot{\mathbf{x}}](\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{x})}{(\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{x}, V^0[\dot{\mathbf{x}}](\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{x}))} \quad (58)$$

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = -\frac{(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{Q}_x^T V^0[\dot{\mathbf{x}}]^{-1} \mathbf{Q}_x \hat{\mathbf{v}})}{(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{Q}_x^T V^0[\dot{\mathbf{x}}]^{-1} \mathbf{Q}_x (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\omega} \times \mathbf{x}))} \quad (59)$$

$$\mathbf{Q}_x = I - \mathbf{x}(0, 0, 1) \quad (60)$$

次に、距離の推定値  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  の分散を評価する。距離  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  はフローの推定値  $\hat{\mathbf{x}}$  と運動パラメータの推定値

<sup>16</sup>エピポーラ拘束  $e(\mathbf{x}) = 0$  はフロー  $\dot{\mathbf{x}}$  に対しては線形拘束である。

$(\hat{v}, \hat{\omega})$  から計算される。一方、フローの推定値  $\hat{x}$  はその計測値  $x$  と運動パラメータの推定値  $(\hat{v}, \hat{\omega})$  から計算されるが、運動パラメータ  $(\hat{v}, \hat{\omega})$  自体もフローの計測値  $x$  から得られるので、両者には相関がある。距離  $\hat{Z}(x)$  の誤差の評価にあたって、正しくはこの相間を考慮しなければならないが、これは複雑のために困難である。そこでフロー  $\hat{x}$  の誤差と運動パラメータ  $(\hat{v}, \hat{\omega})$  の誤差とは独立であると見なして距離の推定値の分散  $V[\hat{Z}(x)]$  を評価する<sup>17</sup>。このために、まず運動パラメータ  $(\hat{v}, \hat{\omega})$  が正しいとしてフロー  $\hat{x}$  の誤差が距離の推定値  $\hat{Z}(x)$  に与える影響を計算すると、その共分散行列  $V_f[\hat{Z}]$  は次式となる。

$$V_f[\hat{Z}(x)] = \frac{\epsilon^2 \hat{Z}(x)^4 (\text{tr} V^0[\hat{x}])}{(\hat{v}, S_x \hat{v})} \quad (61)$$

$$V^0[\hat{x}] = V^0[\hat{x}] - \frac{(V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x)) (V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))^T}{(\hat{v} \times x, V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))} \quad (62)$$

$$S_x = (x \times \text{diag}(1, 1, 0)) (x \times I)^T \quad (63)$$

ここで  $\text{diag}(1, 1, 0)$  は対角要素が 1, 1, 0 の対角行列を表す。次にフロー  $\hat{x}$  は正しいとして、運動パラメータの推定値  $(\hat{v}, \hat{\omega})$  の誤差が距離  $\hat{Z}(x)$  に与える影響を計算する。これは次式の共分散行列  $V_m[\hat{Z}(x)]$  で表される。

$$\begin{aligned} V_m[\hat{Z}(x)] &= \frac{\hat{Z}(x)^4}{(\hat{v}, S_x \hat{v})} \left( (V_m[\hat{x}]; S_x) + \frac{(V_m[\hat{x}]; S_x)}{\hat{Z}(x)} \right. \\ &\quad + (x \times V[\hat{\omega}] \times x; S_x) + \frac{2(V[\hat{v}, \hat{x}]; S_x)}{\hat{Z}(x)} - \\ &\quad \left. 2(x \times V[\hat{\omega}, \hat{x}]; S_x) - \frac{2(x \times V[\hat{\omega}, \hat{v}]; S_x)}{\hat{Z}(x)} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

$$V_m[\hat{x}] = \frac{V[e(x)] (V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x)) (V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))^T}{(\hat{v} \times x, V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))^2} \quad (65)$$

$$V[\hat{v}, \hat{x}] = \frac{V[\hat{v}, e(x)] (V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))^T}{(\hat{v} \times x, V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))} \quad (66)$$

$$V[\hat{\omega}, \hat{x}] = \frac{V[\hat{\omega}, e(x)] (V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))^T}{(\hat{v} \times x, V^0[\hat{x}] (\hat{v} \times x))} \quad (67)$$

$$V[\hat{v}, e(x)] = V[\hat{v}] a(x) + V[\hat{\omega}, \hat{v}] b(x) \quad (68)$$

$$V[\hat{\omega}, e(x)] = V[\hat{\omega}, \hat{v}] a(x) + V[\hat{\omega}] b(x) \quad (69)$$

$$\begin{aligned} V[e(x)] &= (a(x), V[\hat{v}] a(x)) + \\ &\quad 2(b(x), V[\hat{\omega}, \hat{v}] a(x)) + \\ &\quad (b(x), V[\hat{\omega}] b(x)) \end{aligned} \quad (70)$$

$$a(x) = x \times \hat{x} + \|x\|^2 \hat{\omega} - (x, \hat{\omega}) x \quad (71)$$

$$b(x) = \|x\|^2 \hat{v} - (x, \hat{\omega}) x \quad (72)$$

最終的な共分散行列  $V[\hat{Z}(x)]$  はこれらの共分散行列の和として与えられる。

$$V[\hat{Z}(x)] = V_f[\hat{Z}(x)] + V_m[\hat{Z}(x)] \quad (73)$$

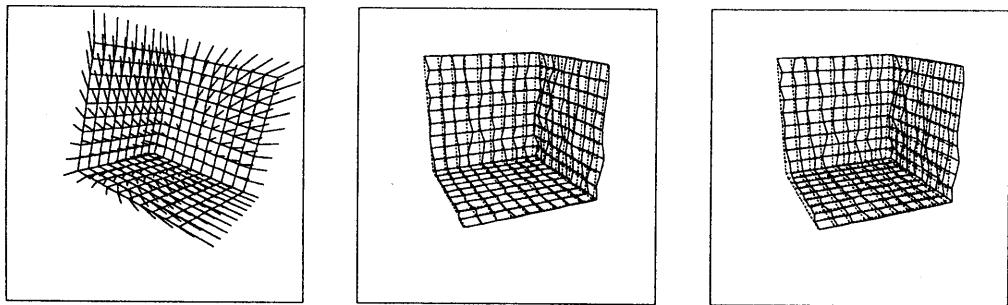
<sup>17</sup> 運動パラメータは多数 ( $n$  個) のオプティカルフローから計算されるので、画像上的一点のフローの寄与は  $1/n$  である。したがって、單一のフローの誤差と運動パラメータの誤差とを独立と見なすことは妥当であると考えられる。これは物理学で多体電子系の作る電磁場と個々の電子とが独立であるとする“平均場近似”に相当している。

## 5 実験

本手法の有効性を確認するために行ったコンピュータシミュレーションの結果を示す。図 2(a) は物体と生成したオプティカルフローである。ここで、カメラの焦点距離は 600 画素、画像の大きさは  $512 \times 512$  画素とし、運動パラメータは  $v = (0, -1.15, 1.15)^T \times 10^5$  (画素/frame),  $\omega = (-0.21, 0, 0)^T$  (rad/frame)とした。また、カメラと物体との距離はおおよそ  $6 \times 10^5$  画素である。このオプティカルフローに標準偏差 1 画素のガウスノイズを加えたフローから復元された 3 次元形状が図 2(b) である。なお、図の破線は元の形状を示している。図 2 の(c) は文献 [1] の方法による結果で、式 (43) によるフロー行列  $\hat{F}$  の修正が行われていない。図 2(b) ではフロー行列  $\hat{F}$  の修正により精度が向上していることが分かる。このシミュレーションを乱数の系列を変えて 100 回行い、計算した運動パラメータの分布を 3 次元空間に図示したのが図 3 で、(a)(c) が本手法、(b)(d) が文献 [1] の方法である。フロー行列の補正により推定値の分散が減少していることが分かる。図中の立方体は大きさの基準のため表示したもので、同一の大きさである。また、楕円は理論上の精度の限界 (クラメル・ラオの下界)[7] となる標準偏差を示す。従来、線形化手法は計算の簡便化の代償として精度を低下させると考えられていたが、フロー行列の統計的に最適な補正と併用すれば、理論的な精度限界をほぼ達成することが分かる。次に実画像による結果を示す。図 4(a) が原画像とオプティカルフロー、図 4(b) が復元結果である。復元結果は  $V[\hat{Z}]$  が一定値以下の部分のみを表示している。オプティカルフローの検出には文献 [10] の方法を用いた。距離の平滑化を行っていないので所々誤っている点が見られるが、全体的には物体の遠近が復元されている。運動パラメータの推定値は  $\hat{v} = (0.12, 0.63, 0.76)^T$ ,  $\hat{\omega} = (7.1, -0.22, -1.4)^T \times 10^{-3}$  であり、定性的には妥当な値であった。

## 参考文献

- [1] Kanatani, K., 3-D interpretation of optical flow by renormalization, *International Journal of Computer Vision*, vol. 11, no. 3, 1993, pp.267-282.
- [2] 太田直哉, 信頼性情報を持ったオプティカルフローからの形状復元とその移動物体検出への応用, 電子情報通信学会論文誌, vol. 76-D-II, no. 8, 1993-8, pp.1562-1571.
- [3] Kanatani, K., Statistical optimization for geometric computation: Theory and Practice, *Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University*, April 1994.
- [4] Kanatani, K., *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1993.
- [5] 金谷健一, 空間データの数理, 朝倉書店, 1995.
- [6] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, vol. 35, no. 2, 1993, pp.201-209.
- [7] 金谷健一, パラメトリック当てはめの精度の理論限界, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91-3, 1994-11.
- [8] 金谷健一, パラメトリック当てはめの最ゆう推定, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91-4, 1994-11.
- [9] 金谷健一, 幾何学的補正問題の精度の理論限界と最適計算法, 情報処理学会研究報告, 95-CV-94-5, 1995-5.
- [10] Ohta, N., Image movement detection with reliability indices, *IEICE Transactions*, E74, 10, Oct. 1991, pp.3379-3388.

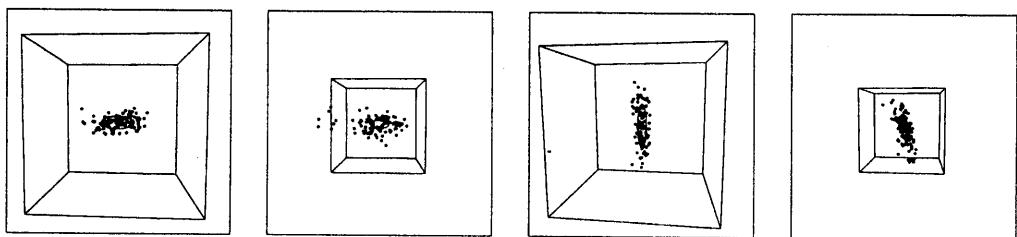


(a) 物体とオプティカルフロー

(b) 復元形状 (本手法)

(c) 復元形状 (従来法)

図2: オプティカルフローと復元された物体形状



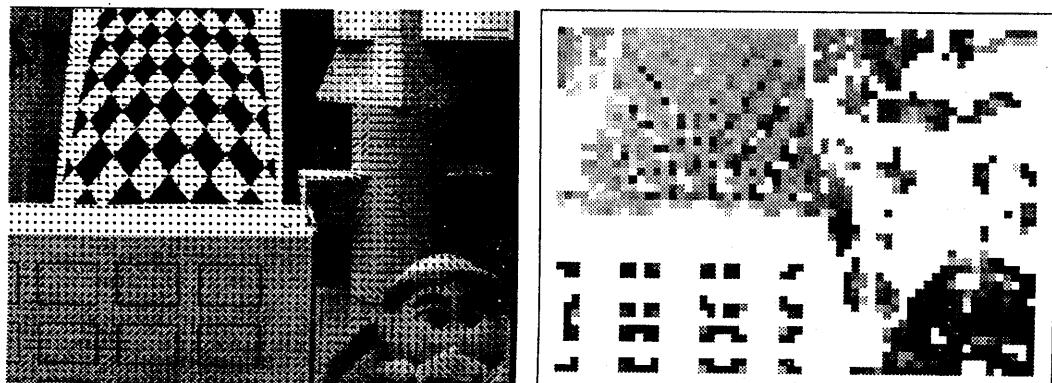
(a) 並進速度  $\hat{v}$ (本手法)

(b) 並進速度  $\hat{v}$ (従来法)

(c) 回転速度  $\hat{\omega}$ (本手法)

(d) 回転速度  $\hat{\omega}$ (従来法)

図3: 推定された運動パラメータの分布



(a) 原画像とオプティカルフロー

(b) 距離画像 (明るい部分が遠く、暗い部分が近い)

図4: 実画像による結果