# CVCV-WG 特別報告：コンピュータビジョンにおける技術評論と将来展望 (IV)
## — 正則化 (Regularization) —

天野 晃

広島市立大学情報科学部知能情報システム工学科

CV の領域では，観測データのみからでは解が一意に定まらない不良設定問題が多く存在する．この問題に対して，個別事例的に手続き的な処理で解を得る手法が数多く存在するが，このような手法では，アルゴリズムの性能や限界が明らかでないため，実用的に利用する場合に微小な環境変化にも対処できないなど，問題が生じることが多かった．これに対して，問題を数学的に統一的に定式化した手法として正則化手法が挙げられる．Tikhonov らによって提案された正則化手法では，連続解のみを対象としていたが，多くの問題は区分的に連続な解となるため，これに対処する手法が必要である．本稿では，確率的正則化手法，スプライン曲線を用いる手法，GNC 法などを取り上げ，不連続解に対処する正則化手法を概観する．

# CVCV-WG Special Report: Technical Review and View in Computer Vision (IV)
## — Regularization —

Akira AMANO

Department of Information Science, Hiroshima City University

In the area of CV, There exists many problems whose solution can not be determined uniquely from the observed data. Formerly, many ad hoc methods were used individually. However, the efficiency of these methods are not clear, thus difficulty occurs when we apply these methods to the real world. Regularization method proposed by Tikhonov is a mathematically defined method for this problem. Only continuous solution is the target of the method proposed by Tikhonov, however, many problems in CV area involv piecewise continuous solution. Thus we need methods to handle them. In this paper, we observ for the methods which use spline function, GNC method etcfor piecewise continuous solution.

# 1 はじめに

CV の研究では，3 次元世界を投影した 2 次元画像から，もとの 3 次元世界に関する記述を得る処理を必要とすることが多い．このような問題は，与えられたデータのみを用いたのでは，解が存在しない，あるいは解が一意に定まらない不良設定問題 (ill-posed problem) である．

これに対して，問題の性質から事前に導かれる知識を用いて解を推定する手法が研究されてきた．この問題は，事前知識を制約とする制約充足問題，あるいはモデルあてはめの問題と考えることができる．多くの特徴量抽出処理も，基本的には想定している特徴量を制約として，それを満足するパターンを，与えられたデータから抽出する処理であると考えられる．しかしながら，従来行なわれてきた研究の多くは，個別事例的であり，アルゴリズムの能力や限界が明らかでないという問題がある．

Tikhonov ら [1] によって提案された不良設定問題の解法である，正則化手法は，数学的に定式化された手法であり，従来手続き的に与えられていた制約を関数の形で表現することにより，制約充足問題を関数の最適化問題として解いている．正則化手法では，制約として観測データの微小な変動に対して，推定される解も微小にしか変動しないという，解の安定性という概念を用いている．この手法は，アルゴリズムの能力，つまり雑音に対する特性，抽出できる対象の性質が明らかであるという特長を持つ．

Tikhonov らによって提案された正則化手法では，制約として，安定な関数でかつ，いたるところで滑らかな関数を挙げている．しかしながら，CV で扱う多くの問題は，不連続解を解とする．本稿では，最近の正則化手法の研究から不連続解への対処法について概観する．

# 2 正則化手法とその問題点

## 2.1 不良設定問題の解法

観測されたデータのみからでは解が一意に定まらない不良設定問題に対して，Tikhonov ら [1] により，可能な解の中から安定な解を選択する解法が示された．

いま，$z$ と $u$ の間に $Az = u$ という関係があり，右辺の値が誤差 $\delta$ でわかっているとする．つまり，正確な値である $u_T$ ではなく，$\rho_U(u_T, \tilde{u}) \leq \delta$ であるような $\tilde{u}$ が与えられているとする．

このような場合，$z$ を求めるために，$\rho_U(Az, \tilde{u}) \leq \delta$ となるような $z$ の集合 $Q_\delta$ から解を探索するのは自然な方法である．しかしながら，このような集合は場合によって大き過ぎ，それぞれの要素がかけはなれたところに存在するようなことがある．

このような集合から，解を探索する空間を選択する方法が必要になる．このような選択方法として，Tikhonov らによって選択法と正則化手法が提案された．

- 選択法

  選択法においては，新たに解空間 $M$ を導入し，以下のような $z_0$ を選ぶことによって解を決定する．

  $$\rho_U(Az_0, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u)$$

  ここで，空間 $M$ は閉集合でなければならず，さらに真の解を含まなければならない．

  選択法は，解空間 $M$ を生成するのが困難であり，一般に問題に適用するのは困難である．

- 正則化手法

  正則化手法では，オペレータ $R$ を定義し，観測データ $u$ とその誤差 $\delta$ から解 $z = R(u, \delta)$ を決定する．

画像認識における初期視覚の問題では，解空間 $M$ を生成する困難さから選択法は用いられないが，

正則化手法は適用が容易であり，比較的良い結果が得られることから，広く応用されている．

## 2.2 正則化手法

以下に正則化手法を詳しく説明する．

いま，未知量 $z$ が，線形操作 $A$ を受けた観測量 $u$ として観測されるとする．

$$Az = u$$

真の解 $z_T \in F$ と真の観測量 $u_T \in U$ は $Az_T = u_T$ で表されるとすると，以下のような条件を満たすとき $R(u, \alpha)$ は正則化オペレータであるという．

1. $R(u, \alpha)$ は $\alpha > 0$ で，かつ

$$\rho_U(u, u_T) \leq \delta \leq \delta_1$$

であるような $u$ に対して定義される．

2. 全ての $\epsilon > 0$ に対して，$\delta(\epsilon) \leq \delta_1$ となる $\delta(\epsilon)$ が存在し，以下の条件を満たす $\alpha = \alpha(\delta)$ が存在する．

$$\rho_U(u_T, u_\delta) \leq \delta(\epsilon)$$

ならば，

$$\rho_F(z_T, z_{\alpha(\delta)}) \leq \epsilon$$

である．ただし，$z_{\alpha(\delta)} = R(u_\delta, \alpha(\delta))$ である．

このとき，$z_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$ によって得られる解を正則化解と呼ぶ．

ここで，$\rho_U(u_T, u_\delta) \leq \delta$ であることがわかっているとすると，正則化オペレータの定義より $\alpha = \alpha(\delta)$ を以下のように選ぶことが出来る．すなはち，$\delta \to 0$ となるときに $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha(\delta))$ は，真の解 $z_T$ に近付く．つまり $\rho_F(z_T, z_{\alpha(\delta)}) \to 0$ となる．

正則化オペレータの具体的な例として安定化汎関数があげられる．これは以下の条件を満たすものである．

1. 空間 $F$ の部分空間 $F_1$ 上で定義される非負の汎関数を$\Omega[z]$ とすると，この汎関数を安定化汎関数と呼ぶ．

2. $z_T$ は $\Omega[z]$ の定義域に含まれる．

3. 全ての正の数 $d$ に対して，$\Omega[z] \leq d$ となる空間 $F_1$ の要素 $z$ で構成される部分空間は，コンパクトである．

このような条件を満たす関数として，以下の式を最小化する Tikhonov 型の安定化汎関数を用いた手法が知られている．

$$E = ||Az - y||^2 + \alpha||Pz||^2$$

$$Pz = \sum_{r=0}^{p} q_r(x) \left(\frac{d^r z}{dx^r}\right)^2 dx$$

ただし，$q_r(x)$ は非負の連続関数である．

ここで，式 (2.2) における右辺第 1 項は，観測量との差を表すことから，ペナルティ関数，右辺第 2 項は安定化汎関数と呼ばれている．

## 2.3 正則化手法応用の問題点

### 解空間と安定化汎関数の妥当性

従来研究されてきた，正則化手法の応用例では，安定化汎関数として Tikhonov 型のものを用いることが多かった．その理由として，Tikhonov らによって唯一妥当性が示されている安定化汎関数であること，解空間の性質が把握しやすいこと，求解法が容易であることなどが挙げられる．それぞれの応用において，真の解が滑らかな関数であれば，この手法は良い解を与える．しかしながら，真の解が一様な曲率を持たない場合，あるいは不連続部分を含むような場合，この手法は，必ずしも良い解を与えない．

正則化手法では，観測されたデータに対して，考えられる解空間が巨大である不良設定問題に対して，解が安定になる系列を選択することにより一貫性のある解を求める．Tikhonov 型の安定化汎関数を用いた手法は，解が安定になる系列の中で，解が

滑らかな関数となるものを選択する手法であるといえる．したがって，求めようとしている解が滑らかな関数でない場合，Tikhonov 型の安定化汎関数を用いる手法は，適当な手法ではないといえる．

このような問題に対処する方法として，滑らかな関数を解とする問題に対して，様々な二次形式の関数を基底として用いた手法が検討されてきた．また，不連続解を対象とする方法として，確率的正則化手法，Spline 関数を用いた手法，GNC 法などの弱連続拘束を実現する手法，多価関数を用いる手法などが検討されている．

# 3 解空間と安定化汎関数

## 3.1 二次形式の関数を用いた安定化汎関数

従来のほとんどの研究で採用されてきた Tikhonov 型の関数の妥当性に対する検討から，二次形式の関数を用いた安定化汎関数に関する研究が行なわれている．

T.E. Boult[3][4][5] は，

$$\left\{ \sum_{i+j=m} \iint_{R^2} |D_x^i D_y^j \, f|^2 \right\}^{1/2}$$

という形の安定化汎関数の中で，$m = m$ のものを $D^{-m}L^2$ と表し，さらに上記安定化汎関数の中で帯域を $s$ に制限したものを $D^m H^s$ と表し，これらの中の $D^{-2}H^{-.75}$ $D^{-3}H^{-1.75}$ $D^{-4}H^{-2.75}$ $D^{-2}H^{-.5}$ $D^{-2}H^{-.25}$ $D^{-2}L^2$ $D^{-2}H^{.5}$ $D^{-4}L^2$ $D^{-5}L^2$ について，いくつかの $C^1, C^2$ 不連続なデータに対して適用し正解との差を計測している．この中では，全てのデータに対して良い解を与える関数は存在せず，データによって関数を選択しなければならないことが示されているが，具体的な選択方法については言及されていない．

M.A. Snyder[6][7] は，勾配法に基づくオプティカルフローの推定問題において，輝度の 1 次あるいは 2 次微分の項が 2 次関数になる安定化汎関数について，1) 回転不変であり，2) オプティカルフローの 2 成分は独立であるという，物理的な制約を満たす関数は二つの基底関数，$\nabla I \nabla^T I$ と $\nabla\nabla^T I$ の線形結合で示されることを示した．

また，N.B. Karayiannis ら [8] は，Tikhonov 型の安定化汎関数が，どのような統計的な分布を持つ画像に対して妥当かを検討している．

Boult の論文では，不連続解に対して実験を行なっているが，これらの手法はいずれも連続解に対する正則化手法であると考えられる．安定化汎関数は，真の解と観測量との誤差 $\delta$ を小さくしていくと，推定された解は限りなく真の解に近付くという性質を持つ [1] が，不連続解に対しては，この性質を満たさないからである．しかしながら，連続解に対しても解の性質が既知であるならば，Tikhonov 型以外の安定化汎関数を用いた方が良いことが示されており，正則化手法を応用する場合に考慮する必要がある点であるといえる．

## 3.2 不連続解への対処

### 3.2.1 確率的正則化

Tikhonov 型及び二次形式の関数の安定化汎関数はいずれも連続解に対しては有効であるが，不連続解に対しては理論的に適当な関数ではない．CV の領域では，解の中に不連続部分を含む問題が多く，このような問題に対しては，不連続解に対処する手法が必要である．

不連続解の推定を行なう場合，解の連続性あるいは不連続性に関するなんらかの事前の知識が必要になるが，確率的正則化手法では，不連続部分に関する頻度や形状などの統計的な性質を用いて解を確率的に探索する．

S. Geman ら [9] は，画像復元の問題に対して，領域境界の統計的分布を用いて確率的弛緩法を適用している．ここでは，X 軸方向に隣接する画素の間，および Y 軸方向に隣接する画素の間にそれぞれ線過程 (line process) と呼ばれる変数を導入し，この変数の値によって隣接する画素が同じ領域に属するかそうでないかを制御している．隣接する線過程変数の状態が統計的に既知であるとして，確率的に変

数を変化させることにより最大事後確率となる状態を探索する.

D. Geiger ら [10] は，不連続性に関する統計的性質がわかっている場合に，領域分割の問題を統一的に扱う枠組を提案している．その中では，X 軸 Y 軸の 2 つの線過程を用いる方法に対して，単一の線過程を用いる方法は，異方性をなくし，不連続境界が軸に沿いやすい性質をなくすという利点があるとして，こちらを採用している.

確率的正則化手法は，扱える問題の範囲が広いという利点があるが，解を得るのに莫大な計算量を必要とするという問題がある．現在のところ強い制約を加えない限り実用的な問題は解けないと考えられている．A. Blake[13] は，決定的な手法で解ける問題として，1 次元の弱連続拘束問題を取り上げ，決定的な手法と非決定的な (確率的な) 手法との比較を行なっている．弱連続拘束問題は，決定的手法で解ける最も弱い拘束であるが，このクラスの問題では，明らかに決定的手法が，能力においても，計算時間においても有利であると結論している.

このようなことから，不連続解の推定を行なう正則化では，可能であるならば決定的正則化手法を用いることが望ましいといえる．しかしながら，現在のところ決定的手法で解ける問題のクラスは大きくないため，決定的手法で解けない問題に対しては，確率的手法を用いる以外に方法がない.

### 3.2.2 決定的正則化

決定的手法を用いた正則化手法では，多くの場合，解の性質として，区分的に滑らかな関数を考え，滑らかな部分における 1 次あるいは 2 次の勾配がある範囲内に収まる，逆にいうと，観測データにおいて，ある閾値を越える勾配を持つ部分は不連続境界になる，という制約 (弱連続拘束) を考えている．このような問題は通常非凸問題となるが，これをいかにして計算するかが問題となる．また，弱連続拘束以外の制約に対しても安定化汎関数を構成する研究が進められている.

**スプライン曲線を用いる手法** D. Terzopoulos[14] は，スプライン関数に重み関数を導入した安定化汎関数による不連続正則化手法を提案している．そこでは，以下のような安定化汎関数を用いる.

$$\sum_{m=0}^{r} \int_{R^d} w_m(x) \sum_{j_1+\cdots+j_d=m} \frac{m!}{j_1!\cdots j_d!} \left( \frac{\partial^m v(x)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_d^{j_d}} \right)^2 dx$$

ここで，$v(x)$ は観測データであり，$w_m$ は重み関数である．論文の中では，$w_m$ に関するオイラー方程式を導出しているが，これは非凸問題である．しかしながら弱連続拘束問題に対しては，凸問題となるとしている.

また，D. Lee ら [15] は，通常の 2 次スプライン関数について，Terzopoulos と同様の手法で，1 次元信号の復元を行なっている.

**GNC 法** 弱連続拘束問題に対して，不連続部分を検出できる能力及びその精度を証明した手法として A. Blake らの GNC 法 [18] が挙げられる.

不連続部分を $Z$ 個含む，1 次元信号 $u_i$ が，正規分布に従うノイズを含む信号 $d_i$ として観測されているとする．このとき $d_i$ から $u_i$ を推定する問題は以下の関数の最小化問題として定義される.

$$E = \sum((u_i - d_i)^2 + \lambda^2(u_i - u_{i-1})^2) + \alpha Z$$

この問題は GNC 法を用いることにより，以下のように推定できることが証明されている.

1. $d_i = \pm h/2$ であるとき，$h > h_0 = \sqrt{2\alpha/\lambda}$ ならばその不連続を検出できる.
2. 傾きが $h_0/2\lambda$ であるような部分を不連続部分として検出する.
3. $d_i$ が分散 $n_0^2$ のノイズを含む時，不連続部分の精度には $8Ln_0^2/h^2$ の不確かさが存在する.

GNC 法では，上記の問題を解くために，以下のような関数群を用いる.

$$F^{(p)} = \sum_i((u_i - d_i)^2 + g^{(p)}(u_i - u_{i-1}))$$

$$g^{(p)}(t) = \begin{cases} \lambda^2|t|^2 & \text{if } |t| < q \\ \alpha - c(|t| - r)^2/2 & \text{if } q \le |t| < r \\ \alpha & \text{if } |t| \ge r \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{2p}, \quad r^2 = \alpha(\tfrac{2}{c} + \tfrac{1}{\lambda}), \quad q = \frac{\alpha}{\lambda^2 r}$$

連続な関数である $F^1$ を最小化し，その解を用いて漸近的に，$p$ を 0 に近付けていった $F^p$ を最小化する解を求め，最終的に $F^0$ を最小化する解を求める．このような手法により，本来非凸問題である最小化問題を漸近的に解いている．

同様の方法として，S.Z. Li[19] による，指数関数を用いた手法が挙げられる．そこでは，アナログネットワークによる専用ハードウェアによる高速計算法が示唆されている．

また，R.L. Stervenson ら [20] は，Terzopoulos [14] のスプライン関数を用いた手法に対して，重みパラメータを GNC 法と同様の関数群を用いて漸近的に推定することにより問題を凸関数の最小化に持ち込んでいる．

**正則化パラメータの関数化**　C. Schnörr[22] は，不連続解に対処する正則化手法の中で，1) 観測データの大局的な性質，2) 事前にわかっている解の性質，を組み込むことが可能な，正則化理論の要件を満たす定式として，Tikhonov 型の安定化汎関数を用い，正則化パラメータ$\lambda$を，推定データ $v$の勾配の関数$\lambda = \phi(|v|)$ とする手法について解析している．$\phi$を GNC 法で用いられる関数と同様の関数とすることにより，GNC 法と同様の区分的に連続な解を推定することができる．

この手法は，観測データを一様な安定化汎関数に当てはめようとするスプライン関数を用いる方法や GNC 法に対して，観測データに合わせて，局所的に当てはめ精度を変化させることにより，不連続関数の当てはめを行なうものと考えられる．

また，不連続解に対処する手法ではないが，武川 [24] は，オプティカルフローの推定問題において，ペナルティ関数に観測雑音の局所的な分散を導入し，画素毎に異なる雑音の分散によってペナルティ関数の重みが変化する正則化手法を提案している．

**モデルを用いる方法**　天野ら [26] は，安定化汎関数として，例示されるサンプルとの差を最小にする関数を用いる手法を提案している．この手法では，サンプルに不連続性を持たせることにより，関数には明示的に不連続性を持ち込まずに区分的に不連続な解を推定している．この手法では，事前にサンプルが必要であるが，複数のサンプルを提示することにより，一般的には経験的に決定されている正則化パラメータを推定することも可能にしている．

**多価関数を用いる手法**　通常観測データに対して当てはめを行なう関数は 2 次微分の総和が一定値以下などの集合で表されるが，志沢ら [27] は，これを特定の関数で表し，さらに二つの関数を拘束として用いることにより，区分的に観測データをこれらの関数に拘束している．

曲面 $y = f(x)$ に拘束する正則化手法は以下の関数の最小化問題と表せる．

$$E^{(1)}[f] = \sum_{i=1}^{N} \left(y_{(i)} - f(x_{(i)})\right)^2 + \lambda||Sf(x)||^2$$

ここで拘束関数を $f_1(x), f_2(x)$ の二つにすると，これらの関数への拘束条件は以下のように表される．

$$\begin{aligned}(y - f_1(x))(y - f_2(x)) &= \\ y^2 - (f_1(x) + f_2(x))y &+ f_1(x)f_2(x) = 0\end{aligned}$$

ここで，$F(x) = f_1(x)f_2(x), G(x) = -(f_1(x) + f_2(x))$ とおくことにより，二つの関数を拘束条件とする正則化は，以下の関数の最小化問題となる．

$$\begin{aligned}&E^{(2)}[F, G] = \\ &\quad \sum_{i=1}^{N} \left\{\left(F(x_{(i)}) + G(x_{(i)})\right)y_{(i)} + y_{(i)}^2\right\}^2 \\ &\quad +\lambda_F||S_F F(x)||^2 + \lambda_G||S_G G(x)||^2\end{aligned}$$

この手法には，観測データがいずれの曲面に属するかということを明示的に与えたり推定する必要がないという利点がある．

## 4　おわりに

正則化手法の研究の中から，解の性質と安定化汎関数の関係について，特に不連続解への対処法について研究例を挙げた．ここでは，これらの研究の方向をまとめると同時に，今後の正則化手法研究の方向性についてもまとめる．

### 確率的正則化

現在のところ確率的正則化手法は，もっとも広い範囲の問題を扱える方法である．現在のところ，不連続境界と近傍領域のデータとの出現頻度を制約とする手法が一般的であるが，確率的に解を探索していく問題では，計算量の問題が必ず生じるため，現在のところ実用的なサイズのデータに対して有効な求解方法は存在しない．

同じクラスの問題に対しては，決定的手法を用いる方が良いことがわかっているため，今後の研究の方向としては，決定的手法で解けない問題のクラスでかつ，効率的に解を探索できる制約のクラスを構築することが考えられる．

### 決定的正則化

決定的な手法で不連続解を扱う場合，現在のところ区分的に連続でかつ，1次あるいは2次の勾配が不連続部分を除きある範囲内に収まる，弱連続拘束を満たすものが対象になっているものが多い．これらの問題に対しては，GNC法などで得られる解の性質が明らかになっている手法が存在する．しかしながら，問題に対する制約としては弱連続拘束は比較的強い拘束であるため，応用できる範囲は必ずしも多いとはいえない．今後はより弱い拘束を扱える拡張に関する研究が進められることが期待される．

さらに，確率的正則化で利用されるように，不連続部分の形状に関する制約は事前に得られることも多く，決定的手法に導入する研究が期待される．

本稿では，正則化手法の研究について主に不連続解に対処する正則化手法を取り上げた．画像認識の研究においては，ある認識結果を与える処理系を生成する技術と，能動的に環境を認識していく学習系を実現する技術の二つが重要であると考えられるが，正則化手法は前者に対して，理論的な性質が明らかなモジュールを与える一つの方向であると考えられる．今後は，後者の立場から，安定化汎関数の学習などの研究が進められることを期待したい．

## 参考文献


[1] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, "Solutions of Ill-Posed Problems," Winston, Washington DC, 1977.

[2] T. Poggio, V. Torre, C. Koch: "Computational vision and regularization theory," Nature, **317**, 6035, pp.314-319, 1985.

[3] T. E. Boult, "What is Regular in Regularization?," 1st. ICCV, pp.644-651, 1987.

[4] T.E. Boult: "Using Optimal Algorithms to Test Model Assumptions in Computer Vision," IUW, pp.921-925, 1987.

[5] T.E. Boult, John R. Kender, "Visual Surface Reconstruction Using Sparse Depth Data," CVPR, pp.68-76, 1986.

[6] M. A. Snyder, "On the Mathematical Foundations of Smoothness Constraints for the Deterimination of Optical Flow and for Surface Reconstruction," PAMI, **13**, 11, pp.1105-1114, 1991.

[7] M. A. Snyder, "The Mathematical Foundations of Smoothness Constraints: A New Class of Coupled Constraints," IUW, pp.154-161, 1990.

[8] N.B. Karayiannis, A.N. Venetsanopoulos: "Regularization theory in image restoration-the stabilizing functional approach," ASSP, **38**, 7, pp.1155-1179, 1990.

[9] S. Geman, D. Geman, "Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution, and the Bayesian Restoration of Images," PAMI, **6**, 6, pp.721-741, 1985.

[10] D. Geiger, A. Yuille: "A Common Framework for Image Segmentation", IJCV, **6**, 3, pp.227-243, 1991.

[11] S.T. Barnard: "A Stochastic Approach to Stereo Vision," AAAI, pp.676-680, 1986.

[12] D. Lee and G.W. Wasilkowski: "Discontinuity Detection and Thresholding — a Stochastic Approach," CVPR '91, pp.208-214, 1991.

[13] A. Blake: "Comparison of the Efficiency of Deterministic and Stochastic Algorithms for Visual Reconstructiòn," PAMI, **11**, 1, pp.2-12, 1989.

[14] D. Terzopoulos: "Regularization of inverse Visual Problems Involving Discontinuities," PAMI, **8**, 4, pp.413-424, 1986.

[15] D. Lee, T. Pavlidis: "One-Dimensional Regularization with Discontinuities," PAMI, **10**, 6, pp.822-829, 1988.

[16] T. Pajdla, V. Hlavac: "Surface Discontinuities in Range Images," 4th. ICCV, pp.524-528, 1993.

[17] D. Terzopoulos: "The Computation of Visible-Surface Representations," PAMI, **10**, 4, pp.417–438, 1988.

[18] A. Blake, A. Zisserman: "Some properties of weak continuity constraints and the GNC algorithm," CVPR, pp.656-667, 1986.

[19] S.Z. Li: "Reconstruction without Discontinuities," 3rd. ICCV, pp.709-712, 1990.

[20] R.L. Stevenson, B.E. Schmitz, E.J. Delp: "Discontinuity Preserving Regularization of Inverse Visual Problems," SMC, **24**, 3, pp.455-469, 1994.

[21] M.J. Black, P. Anandan: "A Framework for the Robust Estimation of Optical Flow," 4th. ICCV, pp.231-236, 1993.

[22] C. Schnörr: "Unique reconstruction of piecewise smooth images by minimizing strictly convex nonquadratic functionals," JMIV 4, pp.189-198, 1994.

[23] 武川 直樹: "正則化の拡張定式化," 情処研報, CV76-5, pp.33-40, 1992.

[24] 武川 直樹: "ビジョンにおける正則化の分散推定," 情報処理学会シンポジウム MIRU'92-II, pp.1-8, 1992.

[25] 坂部 朋洋, 前田 純治, 久保 洋: "反復減衰最小二乗法による画像復元と最適な正則化パラメータの推定," 第23回画像工学コンファレンス, pp.27–30, 1992.

[26] 天野 晃, 坂口 嘉之, 美濃 導彦, 池田 克夫: "サンプル輪郭モデルを利用した Snakes," 信学論, **J76-D-II**, 6, pp.1168-1176, 1993.

[27] 志沢雅彦: "標準正則化理論の多価関数への拡張 — 滑らかな多重表面の復元 —," 信学論, **J76-DII**, pp.1146, 1994.