

動的計画法による曲面の分割

櫻井雅範¹ 津村幸治² 井宮淳¹

¹ 千葉大学 情報画像工学科

263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33

Tel +81-43-290-3257 saku@icsd7.tj.chiba-u.ac.jp, imiya@ics.tj.chiba-u.ac.jp

² 東京大学 大学院工学系研究科 計数工学専攻

113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

Tel +81-3-3812-2111 tsumu@crux.t.u-tokyo.ac.jp

あらまし 本論文では、動的計画法を用いて四角形メッシュを双2次ベジェ曲面領域に分割近似する手法を提案する。この手法は、離散点-自由曲面変換の一種であり、与えられた四角形メッシュからユーザー任意の数の双2次ベジェ曲面領域に分割することができる。まず、四角形メッシュをベジェ曲面領域に分割する問題をベジェ曲面の性質から、1次元の領域分割問題の組合せで表現し、動的計画法を用いて分割領域を決定する。次に、与えられた領域に対して双2次ベジェ曲面を生成する。実際にグリッド化されたメッシュデータに対し実験を行なった結果、良好な近似結果が得られた。

キーワード: 曲面生成, 曲面分割, ベジェ曲面, ベジェ曲線, 動的計画法

Bézier surface division of polygon-mesh using Dynamic-Programming

Masanori Sakurai¹ Kouji Tsumura² Atsushi Imiya¹

¹Dept. of Information and Image Sciences, Chiba University
1-33, Yayoi-cho, Inage-ku, 263-8522, Chiba, Japan

Tel +81-43-290-3257 saku@ics7.tj.chiba-u.ac.jp, imiya@ics.tj.chiba-u.ac.jp

²Dept. of Mathematical Engineering and Information Physics,
Graduate School of Engineering, The University of Tokyo
7-3-1, hongo, bunkyo-ku, 113-8656, Tokyo, Japan

Tel +81-3-3812-2111 tsumu@crux.t.u-tokyo.ac.jp

Abstract In this paper, we propose an algorithm for the generation of arbitrary number of biquadric Bézier patches from a square polygon meshes. Since a Bézier surface patch is the product of two Bézier curves, we can convert the patch generation problem to the segmentation problem of a one-valued function. We solve this segmentation problem using the usual dynamic programming. Applying this segmentation method, we obtain a collection of rectangle areas for the generation of patches. Then we generate biquadric Bézier patches in which rectangular areas. Numerical experiments show that our algorithm compress the number of areas for the surface generation keeping the original shapes of surfaces given as polygon mesh data.

Key Words: Surface Generation, Surface Segmentation, Bézier Surface, Bézier Curve, Dynamic Programming,

1 まえがき

3次元コンピュータグラフィックスにおいて、物体の表現モデルとしてポリゴンモデルを用いることが多い。その最大の理由は、3次元モデルを画面に表示する処理が非常に高速に行なえるため、実時間処理などに適しているからである。しかし、緻密な3次元形状をポリゴンモデルで表現するには非常に多くのデータ量が必要であり、また、ポリゴンモデルの直感的な形状編集が難しいことから、そこで本研究では、ポリゴンメッシュデータを任意の数のベジェ曲面領域へ変換する手法を動的計画法を用いて開発する。

3次元コンピュータグラフィックスにおいて、3次元物体の幾何モデルとして大きくわけてポリゴン(多角形)モデル、陰表現代数関数モデル、パラメトリック曲面モデルの3つがある。それぞれの特徴を挙げると、まずポリゴンモデルは、平面多角形(polygon)の組合せで3次元物体を構成できる。そしてデータ構造が単純なためレンダリングを非常に高速に行なうことが可能である。一方、曲面を平面で近似することになるため、正確な形状表現は不可能である。そのため緻密な形状を表現する場合、多くのポリゴンが必要になるのでデータ量が非常に大きくなりがちで、物理シミュレーションなどの計算量が增大する。さらに、形状モデリングが困難であるといった特徴が挙げられる。

次に陰表現代数関数モデルは、3次元物体を $f(x, y, z) = 0$ の形の多項式で表現する。そのため数学的に扱いやすく、混合、掃引、変形、交差、ブーリアン演算といったモデリング、アニメーション操作がやりやすくなる[5][1]。さらにレンダリングも非常にやりやすいが、光線追跡法(Ray-Traceing)などのレンダリングアルゴリズムを使用する必要があるため、実時間表示は困難である。また、複雑な形状を作るのには熟練が必要である。

そしてパラメトリック曲面モデルは、曲面を $p(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ のようにパラメータ多項式で表現し、3次元形状はそれらの曲面片(パッチ)の組合せで表現する。パラメータ多項式の3次元空間上の制御点を動かすことにより形状を決定するため直感的なモデリングができる。モデリングする手法として最もよく用いられている。しかし、代数関数との相性が悪く、代数直線とパラメトリック曲面との正確な交点計算が難しいため、光線追跡法などの写実的なレンダリングは陰表現代数関数モデルよりも計算量が多くなる。

これら以外にも陰表現代数関数モデルに対して、 $z = f(x, y)$ のような陽表現代数関数モデルというものも存在するが、回転などの座標変換で不変でない、垂直方向に接線を持つ曲線の描写がむずかしい(無限大の傾きがあるため)などの理由から、ほとんど用いられることはない。

本論文では、ポリゴンモデルから低次のパラメトリック曲面モデルへの変換を目的とする。与えられた離散点列から、パラメトリック曲面を構成する研究としては、文献[1]に、三角形ポリゴンからなる多面体を接平面連続(C^1 級連続)を保った三角パラメトリック曲面に変換する手法が提案されている。この手法

では、三角形ポリゴンひとつひとつを三角パラメトリック曲面に変換しているため、曲面パッチの数は多面体を構成するポリゴンの数だけ存在する。そのため本研究で目標としている、アニメーション作成の効率化には適していない。また、Hoppeら[2]による、位相情報を持たない不規則な離散点群から接平面連続を保ったB-spline曲面を自動的に求める手法が提案されている。この手法ではB-spline曲面を自動的に精度良く当てはめることができるものの、制御点の数が多くなりがちである。本研究の手法ではベジェ曲面領域間の位置連続性のみを保ち、 C^1 級以上の連続性は保証しない。

2 2次ベジェ曲線と双2次ベジェ曲面

2次ベジェ曲線の式は次のように与えられる。

$$P(s) = \sum_{i=0}^2 B_{2,i}(s) Q_i \quad (1)$$

$$B_{2,i}(s) = \frac{2!}{(2-i)! \cdot i!} s^i (1-s)^{2-i}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (2)$$

ここで Q_i は3次元ユークリッド空間上の点で、ベジェ曲線の制御点と呼ばれる。また、 $B_{2,i}(s)$ は2次のベルンスタイン基底関数と呼ばれる多項式である。この2次ベジェ曲線上の点を $P(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と置き、各制御点を $Q_k = (x_k, y_k, z_k)$, $0, 1, 2$ と表すとすると、 $x(s), y(s), z(s)$ を

$$\begin{aligned} x(s) &= X_2 s^2 + 2X_1 s + X_0 \\ y(s) &= Y_2 s^2 + 2Y_1 s + Y_0 \\ z(s) &= Z_2 s^2 + 2Z_1 s + Z_0 \end{aligned} \quad (3)$$

と表すことができる。ただし、

$$X_2 = (x_2 - x_1) - (x_1 - x_0)$$

$$X_1 = x_1 - x_0$$

$$X_0 = x_0$$

$$Y_2 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$

$$Y_1 = y_1 - y_0$$

$$Y_0 = y_0$$

$$Z_2 = (z_2 - z_1) - (z_1 - z_0)$$

$$Z_1 = z_1 - z_0$$

$$Z_0 = z_0$$

である。この形をベジェ曲線の階差表現といい、以下、本論文ではこの表記を用いることにする。

2次ベジェ曲面の

$$P(s) = (1-s)^2 Q_0 + 2s(1-s) Q_1 + s^2 Q_2 \quad (4)$$

から1階微分と2階微分を求める。2次ベジェ曲線のパラメータ s による1階微分は、

$$\begin{aligned}\frac{dx(s)}{ds} &= 2(X_2s + X_1) \\ \frac{dy(s)}{ds} &= 2(Y_2s + Y_1) \\ \frac{dz(s)}{ds} &= 2(Z_2s + Z_1)\end{aligned}\quad (5)$$

となる。これを制御点の位置ベクトルによって表すと、

$$\frac{dP(s)}{ds} = 2((Q_2 - 2Q_1 + Q_0)s + (Q_1 - Q_0)) \quad (6)$$

となる。ベジェ曲線の始点 $P(0)$ と終点 $P(1)$ における接線の傾きは、

$$\frac{dP(0)}{ds} = 2(Q_1 - Q_0), \quad \frac{dP(1)}{ds} = 2(Q_2 - Q_1) \quad (7)$$

となる。次に2階微分は、

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(s)}{ds^2} &= 2X_2 \\ \frac{d^2y(s)}{ds^2} &= 2Y_2 \\ \frac{d^2z(s)}{ds^2} &= 2Z_2\end{aligned}\quad (8)$$

となる。このとき同様に制御点の位置ベクトルで表現すると、

$$\frac{d^2P(s)}{ds^2} = 2(Q_2 - 2Q_1 + Q_0) \quad (9)$$

を得る。

2次ベジェ曲線は次のような幾何的性質を持っている。

- 曲線は制御ポリゴンの内部に必ず存在し(凸閉包性)、制御ポリゴンに類似した形状になる。
- $P(0) = Q_0, P(1) = Q_2$ であることから、曲線は両端点 Q_0, Q_2 を通る。
- $\frac{dP(0)}{ds} = 2(Q_1 - Q_0), \frac{dP(1)}{ds} = 2(Q_2 - Q_1)$ であることから、曲線は両端点で直線 Q_0Q_1, Q_1Q_2 にそれぞれ接する。

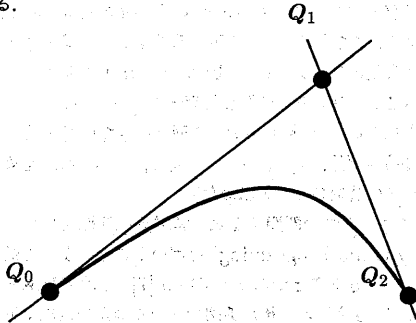


図1: 2次ベジェ曲線の始点と終点における接線

- 線分 Q_0Q_1, Q_1Q_2 の中点をそれぞれ、 R_0, R_1 、線分 R_0R_1 の中点を S_0 としたとき、

$$\begin{aligned}P(0.5) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q_0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) Q_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (Q_0 + Q_1) + \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} (R_0 + R_1) \\ &= S_0\end{aligned}\quad (10)$$

であるので、曲線は $t = \frac{1}{2}$ のとき S_0 を通り、それは2次ベジェ曲線上の頂点となる。

曲線上の微小な線分 ds は、成分を用いて、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (11)$$

である。 dx, dy, dz はパラメータ s の関数である。従って、ベジェ曲線の弧長 L は、

$$\begin{aligned}L &= \int_{s_1}^{s_2} \left((2(X_2s + X_1))^2 + (2(Y_2s + Y_1))^2 \right. \\ &\quad \left. + (2(Z_2s + Z_1))^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds\end{aligned}\quad (12)$$

で計算できる。

しかし、このような形の積分を代数的に求めることは不可能で、数値積分をする必要がある。本論文では数値積分の手法として Simpson 公式を用いてベジェ曲線の弧長を求める。2次ベジェ曲線の $s = s_1$ から $s = s_2$ 、($0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$) までの弧長は、

$$\begin{aligned}L &= \frac{h}{3} \{ (l_0 + l_n) + 2(l_2 + l_4 + \dots + l_{n-2}) \\ &\quad + 4(l_1 + l_3 + \dots + l_{n-3} + l_{n-1}) \}\end{aligned}\quad (13)$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned}h &= \frac{s_2 - s_1}{n}, \quad l_j = L(S_j), \\ S_j &= s_1 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ n &: \text{等分割数}\end{aligned}$$

で与えられる。本論文では分割数を6~10とする。

次に、双2次ベジェ曲面の式は次のように与えられる。

$$P(s, t) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_{2,i} B_{2,j} Q_{i,j} \quad (14)$$

$$B_{2,i}(s) = \frac{2!}{(2-i)! \cdot i!} s^i (1-s)^{2-i}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (15)$$

$$B_{2,j}(t) = \frac{2!}{(2-j)! \cdot j!} t^j (1-t)^{2-j}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (16)$$

ここで $Q_{i,j}$ はベジェ曲面の空間上の制御点で, $B_{2,i}(s), B_{2,j}(t)$ はそれぞれ 2 次のベルンスタイン基底関数である.

双 2 次ベジェ曲面の式は 2 次ベジェ曲線を, s 方向, t 方向について合成したものである. 2 次ベジェ曲線と同様な幾何的性質を持つ.

- 制御ポリゴンの内部に必ず曲面が存在し, 制御ポリゴンに類似した形状になる.
- 双 2 次ベジェ曲面の式において $s = a, (0 \leq a \leq 1)$ と固定した場合は,

$$\begin{aligned} P(a, t) = & B_{0,2}(t) \times \\ & (B_{0,2}(a)Q_{0,0} + B_{1,2}(a)Q_{1,0} + B_{2,2}(a)Q_{2,0}) \\ & + B_{1,2}(t) \times \\ & (B_{0,2}(a)Q_{0,1} + B_{1,2}(a)Q_{1,1} + B_{2,2}(a)Q_{2,1}) \\ & + B_{2,2}(t) \times \\ & (B_{0,2}(a)Q_{0,2} + B_{1,2}(a)Q_{1,2} + B_{2,2}(a)Q_{2,2}) \end{aligned} \quad (17)$$

と書き, t についての 2 次ベジェ曲線になる. 同様に $t = b, (0 \leq b \leq 1)$ と固定した場合は,

$$\begin{aligned} P(s, b) = & B_{0,2}(s) \times \\ & (B_{0,2}(b)Q_{0,0} + B_{1,2}(b)Q_{0,1} + B_{2,2}(b)Q_{0,2}) \\ & + B_{1,2}(s) \times \\ & (B_{0,2}(b)Q_{1,0} + B_{1,2}(b)Q_{1,1} + B_{2,2}(b)Q_{1,2}) \\ & + B_{2,2}(s) \times \\ & (B_{0,2}(b)Q_{2,0} + B_{1,2}(b)Q_{2,1} + B_{2,2}(b)Q_{2,2}) \end{aligned} \quad (18)$$

のように s についての 2 次ベジェ曲線となる.

- 2. より, 双 2 次ベジェ曲面の式に $s = 0, t = 0, s = 1, t = 1$ 各々代入した場合に得られる式は,

$$\begin{aligned} P(s, 0) \\ = & B_{0,2}(s)Q_{0,0} + B_{1,2}(s)Q_{1,0} + B_{2,2}(s)Q_{2,0} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P(s, 1) \\ = & B_{0,2}(s)Q_{0,2} + B_{1,2}(s)Q_{1,2} + B_{2,2}(s)Q_{2,2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P(0, t) \\ = & B_{0,2}(t)Q_{0,0} + B_{1,2}(t)Q_{0,1} + B_{2,2}(t)Q_{0,2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P(1, t) \\ = & B_{0,2}(t)Q_{2,0} + B_{1,2}(t)Q_{2,1} + B_{2,2}(t)Q_{2,2} \end{aligned} \quad (22)$$

となり, これらは双 2 次ベジェ曲面の領域の境界を表す.

3 動的計画法による領域分割

$m \times n$ 分割の双 2 次ベジェ曲面で近似することを考える. その際に生じる近似誤差は領域の分割の仕方によって変化するもので, その近似誤差が最小になるように領域分割をする必要がある. 解くものとする.

ポリゴンメッシュの制約

与えられるポリゴンメッシュは, 四角形メッシュとし, メッシュの格子点は平面座標 (UV 平面とする) でパラメトライズできる.

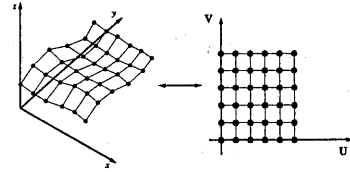


図 2: ポリゴンメッシュと UV 平面の対応

領域分割における制約

格子を横切るような分割はしないものとする. ポリゴンメッシュをベジェ曲面領域に分割する数は U 方向, V 方向について任意に指定できる.

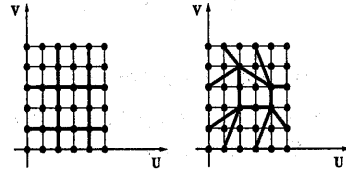


図 3: UV 平面からみた分割の制約. 左の図のようになる

1 次元領域分割問題

ある $n+1$ 個の順番が定まったデータ列 $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ が与えられているとする. データ同士の間には, ある評価基準で距離が設定されていて, a_i と a_j との距離を $d(a_i, a_j)$ と表すとする. このとき, データ列の順番を入れかえることなく, 最初と最後のデータ a_0, a_n を含めて, $m+1$ 個のデータを選択することを考える. 選択したデータ $\{a_0 = b_0, b_1, \dots, b_m = a_n\}$ において, 隣接するデータ同士の距離の総和 $D = d(a_0 = b_0, b_1) + d(b_1, b_2) + \dots + d(b_{m-1}, b_m = a_n)$ を最小とするデータの選択の仕方を求めたい.

このような形の問題を 1 次元領域分割問題といい, 動的計画法 (Dynamic Programming) を用いることによって効率良く解くことができることがわかっている [7]. 1 次元領域分割問題の例として, 与えられた折れ線図形をいくつかの直線で近似する問題がある.

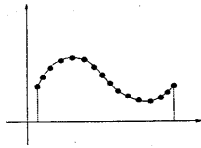


図4: 与えられた離散点列

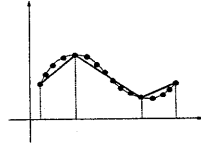


図5: 区間を一次式で近似

ここで、与えられた折れ線図形の離散点の数を $N+1$ 、近似する直線の数を n ($n \ll N$) とする。問題は $N+1$ 個の点列 $a_0, a_1, \dots, a_N$ から始点 a_0 と終点 a_N を含めた $n+1$ 個の点列 $b_0 = a_0, b_1, b_2, \dots, b_n = a_N$ を折れ線図形と直線との誤差の総和が最小となるように選択することである。この問題を定式化すると次のようになる。区間 $[b_i, b_{i+1}]$ における直線と折れ線図形との誤差を

$$E(b_i, b_{i+1}) \quad (23)$$

とすると、誤差の総和は

$$E_{All} = \sum_{i=0}^{n-1} E(b_i, b_{i+1}) \quad (24)$$

と表され、問題は

$$\min_{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}} E_{All} \quad (25)$$

と表現し直すことができる。

この問題の計算量を検証する。とりうる区間の組み合わせの総数は $(N-1)!/(N-n)!(n-1)!$ 通りあるので、

	計算回数
誤差計算	$(N-1)!/(N-n)!(n-1)! \times$
加算	$(N-1)!/(N-n)!(n-1)!$
比較	$(N-1)!/(N-n)!(n-1)! - 1$

だけの計算回数が必要となる。 $n \ll N$ であることから、これらの計算量はほぼ $O(N^n)$ となる。一方、動的計画法を用いた場合の計算量は、要する計算回数は、

	計算回数
誤差計算	$1/2(N-n)(N-n+1)(n-2) + 2(N-n+1)$
加算	$1/2(N-n)(N-n+1)(n-2) + (N-n+1)$
比較	$1/2(N-n)(N-n+1)(n-2) + (N-n+1) - 2$

になり、同様に $n \ll N$ ($m \geq 2$) であるから、動的計画法による計算量は、ほぼ $O(n^2)$ である。

本論で解くべき問題は与えられたポリゴンメッシュを U 方向、 V 方向について任意の数に分割するのに、分割されたすべての領

域に対し双2次ベジェ曲面を近似し、それらのポリゴンメッシュとの誤差の総和が最小となるように分割を行う2次元の領域分割問題となる。この問題は次のように定式化できる。与えられたポリゴンメッシュは U 方向に M 個、 V 方向に N 個のメッシュとし、ベジェ曲面領域の分割数は U 方向に m ($m \ll M$)、 V 方向に n ($n \ll N$) とする。

U 方向の区間 $[Ub_i, Ub_{i+1}]$ 、および V 方向の区間 $[Vb_j, Vb_{j+1}]$ において近似した双2次ベジェ曲面とポリゴンメッシュとの誤差を

$$E(Ub_i, Ub_{i+1}, Vb_j, Vb_{j+1}) \quad (26)$$

とすると、すべての領域における誤差の総和は

$$E_{All} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} E(Ub_i, Ub_{i+1}, Vb_j, Vb_{j+1}) \quad (27)$$

と表され、問題は

$$\min_{Ub_1, Ub_2, \dots, Ub_{m-1}, Vb_1, Vb_2, \dots, Vb_{n-1}} E_{All} \quad (28)$$

となる。

この問題の計算量は、すべての組み合わせについては $O(N^n \times M^m)$ であり、動的計画法を用いると $O(N^2 \times M^2)$ となる。1次元領域分割問題の場合と同様に動的計画法を用いることにより大幅に計算量を減らせることができるが、それでも現実的ではない大きな計算量であるといえる。

ポリゴンメッシュとベジェ曲面との誤差を次のように定義した。双2次ベジェ曲面は、2節で示したように、 $Q_{0,0} \sim Q_{2,2}$ の9つの制御点によって決定される。双2次ベジェ曲面の幾何的性質よりそれらの制御点のうち、 $Q_{1,1}$ を除く8つは曲面の領線を構成する4つの2次ベジェ曲線の制御点であるとみなすことができる。

そのため、図6のようなポリゴンメッシュに対して1つの双2次ベジェ曲面を近似するには、まずポリゴンメッシュの領線を4つの2次ベジェ曲線で近似したのちに、領線内に含まれるポリゴンメッシュの格子点と双2次ベジェ曲面の誤差が最小になるように $Q_{1,1}$ を決定すればよいことになる。

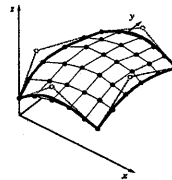


図6: メッシュの領線を2次ベジェ曲線で近似

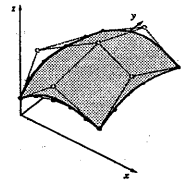


図7: 誤差が最小となるように決定

ここで、双2次ベジェ曲面および2次ベジェ曲線の幾何的性質に注目すると、曲面の頂点は、パラメータ s または t を固定し

た場合の2次ベジェ曲線の頂点の集合からなる2つの2次ベジェ曲線、 $P(0.5, t)$, $P(s, 0.5)$ の交点であることがわかる。このことより、ポリゴンメッシュがU方向に M 、V方向に N 分割で与えられているとすると、U方向に $M+1$ 個の2次ベジェ曲線、V方向に $N+1$ 個の2次ベジェ曲線で近似し、それらの誤差を $Eu(i), Ev(j)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, M$)、また、U, V各方向の2次ベジェ曲線の頂点を結んだ新たなポリゴン辺を近似する2つの2次ベジェ曲線を求め、それらの誤差を EU, EV とすると双2次ベジェ曲面の誤差を、

$$\sum_{i=0}^N Eu(i) + \sum_{j=0}^M Ev(j) + EU + EV \quad (29)$$

と表すことができる。しかし、これらの中でも誤差の比率が大きいのは $Eu(i), Ev(j)$ である。そこで本論文では、

$$\sum_{i=0}^N Eu(i) + \sum_{j=0}^M Ev(j) \quad (30)$$

を双2次ベジェ曲面の誤差と定義する。この定義より、与えられたポリゴンメッシュをU方向に m 、V方向に n 個の双2次ベジェ曲面で近似する問題は、Uにおける1次元領域分割問題とVにおける1次元領域分割問題の和の形で与えられることになる。そして動的計画法を用いた際の計算量は $O(M^2) + O(N^2)$ となる。しかし、近似の精度を重視するような場合には、十分な近似が得られない可能性もある。その場合は領域分割数を増やすことにする。

4 誤差計算

前節で、与えられたポリゴンメッシュの双2次ベジェ曲面による近似する問題が、ポリゴンメッシュの辺を2次ベジェ曲線で近似する問題になることを示した。この節では、ポリゴン辺と2次ベジェ曲線との近似の程度の評価について説明する。

4.1 近似2次ベジェ曲線の誤差計算

ポリゴンメッシュの辺の一部が m 点で構成されるとして、その部分辺を

$$M : \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \quad (31)$$

とおく。この時、この部分辺を近似する2次ベジェ曲線を $P(s)$ とすると、 M がベジェ曲線と同一のパラメータ s の関数 $M(s)$ であるならば、その誤差 E は以下のように与えられる。

$$\int_0^1 |M(s) - P(s)| ds \quad (32)$$

実際には、 M はパラメータ s の関数ではないので M 上の点に対応する近似2次ベジェ曲線 $P(s)$ 上の座標点を計算する必要

がある。パラメータ s の2次ベジェ曲線の弧長は一般に非線形方程式となるので、本論文では非線形方程式をニュートン法によって解を求める。 M が2次ベジェ曲線 $P(s)$ によって十分近似されていると仮定すると M の全長と $P(s)$ の全長はほぼ等しいと考えられる。 M の始点 p_0 から p_j ($0 < j \leq m$)までの長さを L_j とすると、

$$L_j = \sum_{i=0}^{j-1} |p_{i+1} - p_i| \quad (33)$$

と書ける。従って、 M の全長に対する L_j の割合は L_j/L_m であらわされる。これより、 p_j に対応する $P(s)$ 上の点は、次のアルゴリズムで与えられる。

1. 近似2次ベジェ曲線 $P(s)$ の全長 L_B を求め、 p_j に対応する点までの弧長を

$$L_T = (L_j/L_m)L_B \quad (34)$$

とする。

2. L_T を与えるパラメータ s の第一近似値を

$$s_i = L_j/L_m \quad (35)$$

とする。

3. この s_1 を用いて計算された弧長 L が任意に設定した許容範囲を越えていれば、 s の第二近似値 s_2 を次のようにとる。

$$s_2 = s_1 + \frac{L_T - L(s_1)}{\frac{d}{ds} L(s_1)} \quad (36)$$

4. s_2 を用いて得られる L が許容範囲を越えていれば以下同様に3.を繰り返し許容範囲内に収まる s_j を求め、目的の近似2次ベジェ曲線上の点 $P(s_j)$ が得られる。

以上を踏まえると、ポリゴンメッシュの部分辺 $M : \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ とそれを近似する2次ベジェ曲線との誤差 E は、

$$E = \sum_{j=1}^{m-1} |p_j - P(s_j)| \quad (37)$$

で与えられる。

4.2 近似2次ベジェ曲線の選択

実際に誤差 E を求めるには、2次ベジェ曲線が近似されている必要がある。近似する2次ベジェ曲線の両端点=3つの制御点のうちの2つ Q_0, Q_2 は、ポリゴンメッシュの部分辺 $M : \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ の両端点 p_0, p_m に一致しているため、求める制御点は、 Q_1 だけである。部分辺 M が2点 p_0, p_1 のみから

なる場合は、両端点の中心を Q_1 とする。すなわち、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(p_0 + p_1) \\ &= \frac{1}{2}(Q_0 + Q_2) \end{aligned} \quad (38)$$

M が3点 p_0, p_1, p_2 のみからなる場合は、 p_1 が2次ベジェ曲線の頂点となるように Q_1 を設定するのが妥当であるので、そのような制御点が、

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2p_1 - \frac{1}{2}(p_0 + p_2) \\ &= 2p_1 - \frac{1}{2}(Q_0 + Q_2) \end{aligned} \quad (39)$$

で与えられる。しかし、 M が4点以上からなる場合では、誤差 E が最小になるような Q_1 を解析的に求めるのは不可能なので、探索を行なう必要がある。本論文では探索領域計算量を少なくするため、探索範囲を次のように定めた。

2次ベジェ曲線の探索範囲

1. 近似するポリゴン辺 $M : \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ の両端点を結ぶ直線を $p_0\bar{p}_m$ とする。
2. $p_0\bar{p}_m$ からの距離が最も遠い M 上の点 p_i を求め、その距離を h とする
3. p_i を中心として半径 r , ($0 < r < \max\{|p_{top} - p_0|, |p_{top} - p_1|\}$) の球の内部に2次ベジェ曲線の頂点 p_{top} が存在すると仮定して、 p_{top} をその球の内部で動かし、ポリゴン辺との誤差が最少となるような2次ベジェ曲線の制御点 Q_1 を以下の式で定める。

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2p_{top} - \frac{1}{2}(p_0 + p_m) \\ &= 2p_{top} - \frac{1}{2}(Q_0 + Q_2) \end{aligned} \quad (40)$$

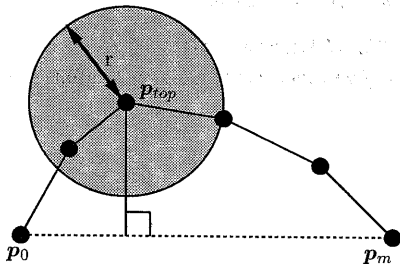


図8: 2次ベジェ曲線の探索範囲
(2次元の場合)

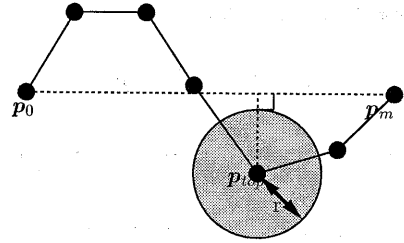


図9: 近似がうまくいかない場合

大域的な誤差の最小値探索ではないが、ポリゴン辺の離散点が非常に不規則に存在する場合でもない限り、ポリゴン辺の形状に近い2次ベジェ曲線が求められる。また、ポリゴン辺のすべての頂点が、ある平面上に存在するような場合は、探索範囲が球ではなく、円とすることができるので、さらに探索領域計算量を少なくすることができる。

5 アルゴリズム

以下の仮定のもとで領域を分割する。

- ポリゴンメッシュの点は xy 座標系で表現
- メッシュの分割数は x 方向に M 個、 y 方向に N 個
- 領域分割数は x 方向に m 個、 y 方向に n 個

- 領域分割アルゴリズム -

1. x 方向の辺 $y = 0, y = 1, \dots, y = N - 1$ について各辺の同じ区間で m 個の2次ベジェ曲線で近似する。
2. 各辺の各区間において近似したベジェ曲線との誤差をもとめ、それらの総和をとる。
3. 2. で得られる誤差の総和を評価基準として動的計画法を適用し、最適な区間を求める。
4. 同様に1. ~ 3. を y 方向について行なう。

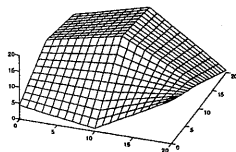
以上から、ポリゴンメッシュをベジェ曲面領域に分割するための領域線が得られる。次に領域線に囲まれた部分のベジェ曲面を近似する。まず、領域線に囲まれた一つの領域 D が $a \times b$ 分割のポリゴンメッシュを含んでいるとする。そのポリゴンメッシュの x, y 方向に分割する各辺は先のアルゴリズムにおいて近似2次ベジェ曲線が得られている。2次ベジェ曲線は制御点 Q_1 、及2次ベジェ曲面は $Q_{1,1}$ が形状の外見を決定する性質がある。この領域 D 内において x 方向の各ベジェ曲線の $Q_{1,1}^{D,A}, 0 \leq A \leq a$, 同じく y 方向の各ベジェ曲線の $Q_{1,1}^{D,B}, 0 \leq B \leq b$ から及2次ベジェ曲面 $P_D(s, t)$ の $Q_{1,1}^D$ を推定する。

ベジェ曲面近似アルゴリズム

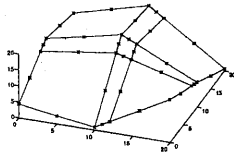
1. x 方向の各ベジェ曲線の頂点 $p_x^{D,0}, p_x^{D,1}, \dots, p_x^{D,a}$ を求める。
2. $p_x^{D,0}, p_x^{D,1}, \dots, p_x^{D,a}$ を結んだ辺を近似する 2 次ベジェ曲線を求める。
3. 2. で得られたベジェ曲線の頂点 p_X^D を求める。
4. y 方向について同様に 1. ~ 3. を行ない p_Y^D を求める。
5. 得られた p_X^D, p_Y^D の平均の点 $\bar{p}_{XY}^D$ を求め、 $\bar{p}_{XY}^D = P_D(0.5, 0.5)$ となるような $Q_{1,1}^D$ を求める。
6. 全ての領域に囲まれた部分について 1. ~ 5. を繰り返す。

6 実験結果

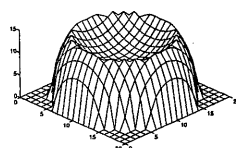
20 × 20 分割のポリゴンメッシュを 3 × 3 個のベジェ曲面領域に分割した。



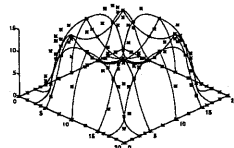
ポリゴンメッシュデータ



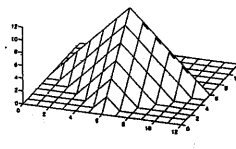
領域分割実行後



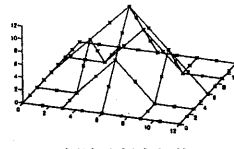
ポリゴンメッシュデータ



領域分割実行後



ポリゴンメッシュデータ



領域分割実行後

7 むすび

上の実験結果を見る限りでは、近似は良好な結果が得られており、曲率に変化している部分でベジェ曲面により領域が分割されていることが見てとれる。今後は正方形のような形状に対しても良好な結果が得られるかどうか、また、より一般的に用いられる

双 3 次ベジェ曲面による近似についても検討したい。本研究は異なるパラメトリック曲面モデリングソフト間でのデータの受渡しがポリゴンモデルでしかできないような場合、ポリゴンデータからパラメトリック曲面への変換が楽にできるなどの利点もある。さらに応用として、データ量が削減できるため、VRML モデルやラティスマデルのようなネットワークでの 3 次元形状データの配信などにも利用できる。

参考文献

- [1] Jules Bloomenthal, Chandrajit Bajaj, Jim Blinn, Marie-Paule Cani-Gascuel, Alyn Rockwood, Brian Wyvill, and Geoff Wyvill, editors. *Introduction of Implicit Techniecs*. Morgan Kaufmann Publishers, 1997.
- [2] Matthias Eck and Huges Hoppe. Automatic reconstruction of b-spline surfaces of arbitrary topological type. *Computer Graphics(SIGGRAPH '96 Proceedings)*, pp. 325-334, 1996.
- [3] David F.Rogers and J.Alan Adams. *Mathematical Elements for Computer Graphics Second Editon*. McGraw-Hill, 1990.
- [4] Donald Hearn and M.Pauline Baker. *Computer Graphics C Version Second Editon*. Prentice Hall, 1997.
- [5] Jai Menon, Brian Wyvill, Chandrajit Bajaj, Jules Bloomenthal, Baining Guo, John Hart, and Geoff Wyvill. *Implicit surfaces for geometric modeling and computer graphics*. 1996.
- [6] 上坂吉則, 太原育夫. パソコンで学ぶパターン認識と図形処理. 文一総合出版, 東京, 1996.
- [7] 上坂吉則, 尾関和彦. パターン認識と学習のアルゴリズム. 文一総合出版, 東京, 1996.
- [8] 加藤俊明. 私家版, bezier 講座. <http://www.bekkoame.ne.jp/~t.katoh>, 1998.