

カメラキャリブレーション

植芝 俊夫

岡谷 貴之

佐藤 智和

産業技術総合研究所

東北大学大学院

奈良先端科学技術大学院大学

カメラキャリブレーションについて、特にその幾何学的側面に絞って最近の主要な研究のサーベイを行う。準備として、本稿で必要とされる射影幾何の基礎事項の解説の後、透視投影カメラモデルを導入してその射影空間における振る舞いについて述べる。そして、このモデルに基づくキャリブレーション方法として、参照物体を利用する方法とそれを利用しないセルフキャリブレーションに分類して様々なアルゴリズムを紹介する。さらにバンドル調整による推定パラメータの高精度化に言及し、最後に透視投影に従わないレンズ歪みのモデル化とその校正について述べる。

A Survey of Camera Calibration Techniques

Toshio Ueshiba

Takayuki Okatani

Tomokazu Sato

National Institute of
Advanced Industrial Science
and Technology(AIST)

Tohoku University

Nara Institute of
Science and Technology

This article gives a survey of recent studies of geometric camera calibration techniques. After some explanations of fundamentals of projective geometry, a perspective camera model will be introduced followed by a discussion about its behavior in the three-dimensional projective space. Next various camera calibration algorithms based on this model are presented which are classified into two categories: methods using reference objects and self-calibration techniques without them. Then the refinement of estimation parameters through bundle adjustment will be explained and finally modeling and calibrating the effect of lens distortions not obeying perspective projections will be discussed.

1 はじめに

コンピュータビジョンが解析の対象とする画像は、我々の住む3次元世界をカメラによって2次元世界に投影したものである。よって、「どのようなカメラを使いどのような条件のもとでどのような世界を撮影すれば、如何なる画像が得られるか」を定量的に把握する

ことは、コンピュータビジョンの根幹となる最も基礎的な事項である。適切なカメラのモデルを設定し、そのモデルを記述するパラメータを推定することによってこの目的を達しようとするのが、**カメラキャリブレーション**である。

1枚の画像は多数の画素の集まりとして構成される

が、個々の画素にはその2次元位置 (u, v) と輝度(あるいは色) I という2つの属性がある。したがって、カメラキャリブレーションを考える場合にも、3次元空間中のある点が画像の“どの位置に”投影されるかという**幾何学的**な側面と、それが“どのような輝度(あるいは色で)”投影されるかという**光学的**な側面の両方を考慮しなければならない。

カメラキャリブレーションはコンピュータビジョンの基礎となる技術であり、その重要性から、CVIM(またはその前身であるCV)でも、93年の出口によるサーベイ [75] のほか、95-6年のサーベイシリーズでも独立した解説 [69] が設けられ、これを発展させたものが他のトピックと共に冊子 [76] に収められた。本サーベイは幾何学的カメラキャリブレーションに話題を絞り、主としてこれら以降のこの分野の展開について述べる。

カメラキャリブレーションを含むビジョンの幾何は、コンピュータビジョンの中でも最も数理的な色彩の濃い領域である。そのため、サーベイ対象となる研究のエッセンスを示すためには、ある程度の数学的な扱いが避けられない。そこで、本稿では射影幾何学に関する最小限の事項とカメラモデルを導入した上で、各々の研究の理論的な事項について統一した記法に則って解説する。また、複数の手法間の連関を明らかにするため、必ずしも原論文の道筋に従っていない場合もあることをお断りしておく。

本稿の構成は次のとおりである。まず、2節で本稿で必要とされる射影幾何学の基礎事項についてまとめ、次に3節で透視投影カメラモデルを導入する。4節と5節では、この透視投影モデルに基づいたキャリブレーション手法について論じる。4節では何らかの意味でその形状が既知の参照物体を用いてカメラを校正する手法を扱い、5節ではそのような知識を要しないセルフキャリブレーションと呼ばれる技術を紹介する。6節では、アルゴリズムの最終段階でパラメータ推定精度を高めるためのバンドル調整について述べる。最後に、7節で透視投影でモデル化できないレンズ歪みの影響を校正する方法を扱う。

2 射影幾何学の基礎事項

コンピュータビジョンに射影幾何学を応用する試みはビジョン研究の初期から存在したが、無限遠点や無限遠直線を表現するための同次座標の利用など部分的なものに留まっていた。しかし、1990年代になって、ユークリッド空間のみならず、アフィン空間 [33] や射影空間 [9, 20, 16] 等のより一般的な空間の中でも画像からの3次元情報再構成問題を考えられることが明らかになり、それに伴って、ビジョンの幾何学の記述も

同次座標や変換群およびそれに付随する不変量によって特徴づけられる射影幾何学をベースにした表現に変貌を遂げた [74, 21]。

本節では、本稿で用いる記法を導入し、以降の解説で必要となる射影幾何学に関する最小限の事項を述べる。

2.1 記法

列ベクトルと行列を bold 体で表記する。特に、単位行列と零ベクトルを、それぞれ $\mathbf{I}, \mathbf{0}$ と書く。

空間中の点をその座標ベクトルで表すとき、それが同次座標であるなら \underline{x} のように下線付きの bold 体で表記する。

記号 \top は列ベクトルまたは行列の転置を表す。したがって、列ベクトル \mathbf{x} に対して \mathbf{x}^\top は行ベクトルであり、 $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ は2つの列ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} の内積である。ベクトル \mathbf{x} のノルムを $\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$ と定義する。

正則行列 \mathbf{A} を転置して逆行列をとったものを $\mathbf{A}^{-\top}$ と略記する。すなわち、 $\mathbf{A}^{-\top} = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$ である。 $\mathbf{A}^{-\top} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$ であることも容易に確かめられる。

対角要素が a_1, a_2, \dots, a_n の $n \times n$ 対角行列を $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と書く。

2つのベクトルまたは行列が非零の定数倍を除いて等しいことを記号 \simeq で表す。すなわち、 $\mathbf{x} \simeq \mathbf{y}$ は、ある非零のスカラー λ が存在して $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{y}$ であることを意味する。

虚数単位を I で表す。すなわち、 $I^2 = -1$ である。

2.2 n 次元射影空間 P^n

3次元空間中のある点 P が座標 (x, y, z) を持つとき、敢えてそれに第4の成分を付け加えて $[x \ y \ z \ 1]$ のように P を4次元ベクトルで表現することは、コンピュータグラフィックスの分野では古くから行われてきた。その理由は、回転と並進およびスケールを全て行列とベクトルの積として統一的に実現できることに加えて、計算機中の仮想的な3次元世界を2次元スクリーン上に投影する“射影”を自然に表現できることにある。

このように空間の次元数よりも1だけ多い次元のベクトルで点 P を表すとき、それを P の**同次座標**(または**斉次座標**)と呼ぶ。同次座標では定数倍の違いを区別しない。すなわち $[x \ y \ z \ 1] \simeq [X \ Y \ Z \ W]$ ならば両者は同じ点を表す。ある点 P の同次座標 $[X \ Y \ Z \ W]$ が与えられれば、従来の意味での P の(非同次)座標 (x, y, z) は $x = X/W, y = Y/W, z = Z/W$ で与えられる。

射影幾何学が対象とする世界は、点を同次座標で表した**射影空間**である。ただ、上の例では同次座標の最後の成分 W で他の成分を割ると従来の座標が得られ

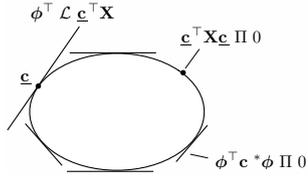


図 1: 2次元曲面 (線) と双対 2次元曲面 (線)

るという意味で W には特別な役割が与えられていたが、射影空間ではこのような区別はしない。すなわち、射影空間では同次座標の成分はすべて対等である。実は、これから述べるように、最後の成分が特殊な意味を持つのはアフィン空間やユークリッド空間においてであって、これらは射影空間の特別な場合なのである。

n 次元射影空間を P^n で表す。 P^n では以下のような要素 (entity) が定義される。

点: P^n では、点を 0 でない $n+1$ 次元列ベクトル \underline{x} で表し、これをこの点の**同次座標**と呼ぶ。同次座標は零でない定数を乗じても意味は変わらない。すなわち $\lambda \neq 0$ に対して \underline{x} と $\lambda \underline{x}$ は同一の点を表す。

平面 (直線): $n+1$ 次元行ベクトル π^\top に対して、 $\pi^\top \underline{x} = 0$ を満たす点 \underline{x} の集合を P^n の**平面** ($n=2$ の場合は**直線**) と称し、 π^\top をその同次座標と呼ぶ。 π^\top に定数倍の任意性があることは、点の場合と同様である。

2次元曲面 (線): $(n+1) \times (n+1)$ 対称行列 Φ に対して、 $\underline{x}^\top \Phi \underline{x} = 0$ を満たす点 \underline{x} の集合を P^n の**2次元曲面** ($n=2$ の場合は**2次元曲線**または**円錐曲線**) と称し、 Φ をその同次座標と呼ぶ (図1参照)。 Φ にも定数倍の任意性がある。

双対 2次元曲面 (線): 2次元曲面 ($n=2$ の場合は2次元曲線) を表す $(n+1) \times (n+1)$ 対称行列 Φ の余因子行列 Φ^* に対して¹、 $\pi^\top \Phi^* \pi = 0$ を満たす平面 (直線) π^\top の集合を Φ の**双対 2次元曲面 (線)** と称し、 Φ^* をその同次座標と呼ぶ。 Φ^* は、2次元曲面 (線) Φ に接する平面 (直線) の集合である (図1参照)。 Φ^* にも定数倍の任意性がある。

n 次元射影空間 P^n の中で、 $(n+1) \times (n+1)$ 正則行列 T によって点 \underline{x} を点 \underline{x}' に写す**射影変換**

$$\underline{x}' \simeq T \underline{x} \quad (1)$$

を考える。射影変換 T の逆変換 T^{-1} および2つの射影変換 S と T の積 ST も、それぞれ射影変換になる。

¹ Φ が正則なら $\Phi^* \simeq \Phi^{-1}$ である。

平面 (直線) π^\top とその上の任意の点 \underline{x} を考えると、 $0 = \pi^\top \underline{x} = (\pi^\top T^{-1})(T \underline{x}) \simeq (\pi^\top T^{-1}) \underline{x}'$ であるから、式 (1) の射影変換により平面 (直線) π^\top は

$$\pi'^\top \simeq \pi^\top T^{-1} \quad (2)$$

に写される。同様にして、2次元曲面 (線) Φ およびその双対 Φ^* の変換則

$$\Phi' \simeq T^{-\top} \Phi T^{-1} \quad (3)$$

$$\Phi'^* \simeq T \Phi^* T^\top \quad (4)$$

が導かれる。

2.3 n 次元アフィン空間 A^n

n 次元射影空間 P^n における射影変換は任意の $(n+1) \times (n+1)$ 正則行列 T により定義されるが、特に T が $n \times n$ 正則行列 A と n 次元ベクトル \mathbf{b} および非零のスカラ c を用いて

$$T_A = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^\top & c \end{bmatrix}, \quad \det A \neq 0, c \neq 0 \quad (5)$$

と表されるとき、これを**アフィン変換**と呼ぶ。また、変換としてアフィン変換のみを考えた n 次元射影空間を n 次元**アフィン空間**と呼び、 A^n で表す。すなわち、アフィン空間は変換のクラスを制限することにより射影空間を特殊化したものである。

アフィン変換 T_A の逆変換 T_A^{-1} および2つのアフィン変換 S_A と T_A の積 $S_A T_A$ も、それぞれアフィン変換になる。

アフィン空間 A^n において、同次座標の最後の要素が 0 となる点 $[\underline{x}_A^\top 0]^\top$ を**無限遠点**と呼ぶ。また、全ての無限遠点の集合を**無限遠平面** ($n=2$ の場合は**無限遠直線**) と呼ぶ。無限遠平面 (直線) の同次座標は $[0^\top 1]$ である。無限遠点 $[\underline{x}_A^\top 0]^\top$ はアフィン変換 (5) によって $T_A [\underline{x}_A^\top 0]^\top = [(A \underline{x}_A)^\top 0]^\top$ に写されるが、これも (別の) 無限遠点である。すなわち、無限遠平面 (直線) はアフィン変換によって不変である。このことは、 $[0^\top 1] T_A^{-1} \simeq [0^\top 1]$ であることから確かめられる。

2.4 n 次元ユークリッド空間 E^n

アフィン変換 (5) のうち、左上 $n \times n$ 部分行列 A が直交行列となるもの

$$T_E = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^\top & c \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = A^\top, c \neq 0 \quad (6)$$

を、**ユークリッド変換 (相似変換)** と呼ぶ。また、変換としてユークリッド変換のみを考えた n 次元アフィン空間を n 次元**ユークリッド空間**と呼び、 E^n で表す。す

なわち、ユークリッド空間は変換のクラスを制限することによりアフィン空間を特殊化したものである。

ユークリッド変換 $\mathbf{T}_\mathcal{E}$ の逆変換 $\mathbf{T}_\mathcal{E}^{-1}$ および 2 つのユークリッド変換 $\mathbf{S}_\mathcal{E}$ と $\mathbf{T}_\mathcal{E}$ の積 $\mathbf{S}_\mathcal{E}\mathbf{T}_\mathcal{E}$ も、それぞれユークリッド変換になる。

$\mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \mathbf{x}_\mathcal{E} = 0$ を満たす n 次元ユークリッド空間 \mathcal{E}^n の無限遠点 $[\mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \ 0]^\top$ の集合 Ω を考える²。 Ω の点 $[\mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \ 0]^\top$ はユークリッド変換 (6) によって無限遠点 $\mathbf{T}_\mathcal{E}[\mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \ 0]^\top = [(\mathbf{A}\mathbf{x}_\mathcal{E})^\top \ 0]^\top$ に写されるが、 $(\mathbf{A}\mathbf{x}_\mathcal{E})^\top (\mathbf{A}\mathbf{x}_\mathcal{E}) = \mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_\mathcal{E} = \mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \mathbf{x}_\mathcal{E} = 0$ であるので、これも Ω の点である。すなわち、 Ω はユークリッド変換によって不変である。

$n = 3$ の場合、 Ω は無限遠平面上の 2 次曲線となり、これを**絶対円錐曲線** (*absolute conic*) と呼ぶ。 $n = 2$ の場合、 Ω は無限遠直線上の互いに複素共役な 2 点 $[1 \ \pm i \ 0]^\top$ となり、これらを**虚円点** (*circular points*) と呼ぶ。 3(2)次元ユークリッド変換とは、絶対円錐曲線(虚円点)を不変に保つ射影変換のことである。

3(2)次元ユークリッド空間 $\mathcal{E}^3(\mathcal{E}^2)$ において、点 \mathbf{c} を中心とする半径 r の球(円)は、

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{x}_\mathcal{E} - \mathbf{c})^\top (\mathbf{x}_\mathcal{E} - \mathbf{c}) - r^2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathcal{E}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{c} \\ -\mathbf{c}^\top & \mathbf{c}^\top \mathbf{c} - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathcal{E} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表される。絶対円錐曲線上の点 ($n = 2$ の場合は虚円点) $[\mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \ 0]^\top$ は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathcal{E}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{c} \\ -\mathbf{c}^\top & \mathbf{c}^\top \mathbf{c} - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathcal{E} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_\mathcal{E}^\top \mathbf{x}_\mathcal{E} = 0$$

を満たすから、すべての球(円)は、その中心位置 \mathbf{c} や半径 r にかかわらず、絶対円錐曲線(虚円点)を含むことがわかる。

さらに、3次元ユークリッド空間 \mathcal{E}^3 において、ランク 3 の 4×4 行列

$$\Omega_\mathcal{E}^* \simeq \text{diag}(1, 1, 1, 0) \quad (7)$$

によって定義される双対 2 次曲面を**絶対双対 2 次曲面** (*absolute dual quadric*) と呼ぶ。 $\Omega_\mathcal{E}^*$ は無限遠平面上に縮退した厚み 0 の 2 次曲面であり、その“縁”は絶対円錐曲線となる [55, 21]。また、式 (4) より、 $\Omega_\mathcal{E}^*$ は 3 次元ユークリッド変換 (6) によって

$$\mathbf{T}_\mathcal{E} \Omega_\mathcal{E}^* \mathbf{T}_\mathcal{E}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} = \Omega_\mathcal{E}^*$$

と変換されるので、絶対双対 2 次曲面はユークリッド変換に対して不変である。

²実数の範囲ではこのような点は存在しないが、複素数まで広げて考えれば存在する。

3 透視投影カメラモデル

コンピュータビジョンの幾何学的側面を論じる際にカメラの投影モデルとして最も頻繁に用いられるのが、**透視投影カメラモデル**である。多くのカメラとレンズの組み合わせはこのモデルによってよく近似でき、レンズ歪みを考慮する場合にも、透視投影による理想的な投影位置にレンズ歪みによる偏位が重畳したものとしてモデル化することが多い(7節で詳述)。さらに、このモデルは2節で導入した射影幾何学ともよく整合する。

3次元ユークリッド空間 \mathcal{E}^3 におけるカメラの投影中心位置と姿勢を、それぞれ 3次元ベクトル \mathbf{t} と 3×3 回転行列³ \mathbf{R} で表す。さらに、 \mathcal{E}^3 の点の非同次座標を 3次元ベクトル $\mathbf{X}_\mathcal{E}$ で表す。このとき、投影中心から 1 だけ離れた仮想的な画像平面への $\mathbf{X}_\mathcal{E}$ の投影 (m, n) は

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{r}_3^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t})} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t}) \\ \mathbf{r}_2^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

と表される。ただし、 \mathbf{r}_i は \mathbf{R} の第 i 列である。投影位置 (m, n) を同次座標で表現すれば

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m \\ n \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\mathbf{r}_3^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t})} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t}) \\ \mathbf{r}_2^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t}) \\ \mathbf{r}_3^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t}) \end{bmatrix} \\ &\simeq \mathbf{R}^\top (\mathbf{X}_\mathcal{E} - \mathbf{t}) \\ &= \mathbf{R}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\mathcal{E} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

実際の画像上で観測される $\mathbf{X}_\mathcal{E}$ の投影位置は、式 (9) の座標値に

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} af & sf & u_0 \\ & f & v_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} m \\ n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

なる 2 次元アフィン変換を適用したものになる。ここで、 f は画素単位で表した**焦点距離**、 a は画素の縦横比を表す**アスペクト比**、 s は画像の縦軸と横軸の間の**非直交歪み**である。さらに、 (u_0, v_0) はカメラ光軸と画像平面との交点を表し、**画像中心**と呼ばれる。以上の 5 つのパラメータは、**内部パラメータ**と呼ばれるカメラの位置・姿勢によらないカメラ固有の定数であり、上半三角行列 \mathbf{K} に集約される。これに対し、カメラの位置 \mathbf{t} と姿勢 \mathbf{R} を**外部パラメータ**と呼ぶ。なお、最近の固体撮像素子カメラでは画素は非常に高い精度で正方形と考えられるので、アスペクト比と歪み係数はそれぞれ $a \approx 1, s \approx 0$ と見なせることが多い。

³行列式が 1 の直交行列

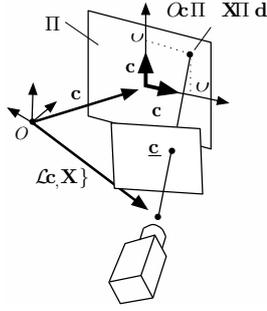


図 2: 2次元平面上の点の投影

式 (9), (10) を併せ, 同次座標 $\underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}} \equiv [\mathbf{X}_{\mathcal{E}}^T \ 1]^T$, $\underline{\mathbf{u}} \equiv [u \ v \ 1]^T$ を導入すれば

$$\underline{\mathbf{u}} \simeq \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{R}^T}_{\mathbf{P}_{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{t} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}} \quad (11)$$

を得る. $\mathbf{P}_{\mathcal{E}}$ は**カメラ行列**と呼ばれる 11 自由度の 3×4 行列であり⁴, \mathcal{E}^3 の点 $\underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}}$ とその投影 $\underline{\mathbf{u}}$ を関係付けるための全ての情報を含む. これは, カメラが 3(位置)+3(姿勢)+5(内部パラメータ)= 11 個のパラメータを持つことに符合する. 透視投影モデルに基づく場合, カメラキャリブレーションとはこのカメラ行列 $\mathbf{P}_{\mathcal{E}}$ を求めることにほかならない.

3.1 3次元射影空間 \mathcal{P}^3 における透視投影カメラ

式(11)は, カメラによる投影は3次元ユークリッド空間 \mathcal{E}^3 から2次元射影空間 \mathcal{P}^2 への写像と見なせることを示している. しかし, 4×4 行列 \mathbf{T} を用いてシーンを記述する座標系を $\underline{\mathbf{X}} \simeq \mathbf{T}\underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}}$ と射影変換すれば $\underline{\mathbf{u}} \simeq (\mathbf{P}_{\mathcal{E}}\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}}) \simeq (\mathbf{P}_{\mathcal{E}}\mathbf{T}^{-1})\underline{\mathbf{X}}$ となるので, シーンを3次元射影空間 \mathcal{P}^3 と見なし, 投影を $\mathbf{P} \simeq \mathbf{P}_{\mathcal{E}}\mathbf{T}^{-1}$ なるカメラ行列を持つカメラによる \mathcal{P}^3 から \mathcal{P}^2 への写像と考えることもできる. このカメラによってシーンと画像中の様々な要素がどのように関係付けられるのか, 以下に主要なものを挙げよう.

3次元空間中の点の投影: シーンを3次元射影空間 \mathcal{P}^3 , 画像を2次元射影空間 \mathcal{P}^2 と考えれば, 透視投影カメラ \mathbf{P} は \mathcal{P}^3 の点 $\underline{\mathbf{X}}$ を \mathcal{P}^2 の点 $\underline{\mathbf{u}}$ に

$$\underline{\mathbf{u}} \simeq \mathbf{P}\underline{\mathbf{X}} \quad (12)$$

によって投影するデバイスと見なせる.

2次元平面上の点の投影: 3次元シーン中の平面 Π を考え, これに固定した2次元ユークリッド座標系の x 軸と y 軸の方向および原点の位置を, 互いに

⁴ $\mathbf{P}_{\mathcal{E}}$ を定数倍しても式 (11) は変わらないので, $\mathbf{P}_{\mathcal{E}}$ には定数倍の不定性がある.

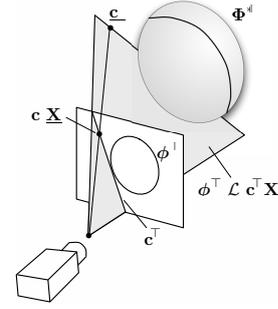


図 3: 直線の逆投影と2次元曲面の輪郭線の投影

直交する3次元単位ベクトル \mathbf{i}, \mathbf{j} および3次元ベクトル \mathbf{d} で表す(図2参照). \mathbf{i} と \mathbf{j} は

$$\begin{cases} \mathbf{i}^T \mathbf{i} = \mathbf{j}^T \mathbf{j} = 1 \\ \mathbf{i}^T \mathbf{j} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

を満たす. すると, Π 上の点 (x, y) は, シーン中で $\underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{d}$ に位置し, 同次座標

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}_{\mathcal{E}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

を持つ. これを式 (11) に代入して

$$\underline{\mathbf{u}} \simeq \underbrace{\mathbf{P}_{\mathcal{E}}\mathbf{M}_{\mathcal{E}}}_{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{x}}_{\mathcal{E}} \quad (15)$$

を得る. 式 (15) は, Π 上の点 $\underline{\mathbf{x}}_{\mathcal{E}}$ が2次元射影変換 \mathbf{H} によって画像平面に投影されることを示している.

画像上の直線の逆投影: 画像平面 \mathcal{P}^2 上の直線 \mathbf{l}^T に対して

$$\pi^T \simeq \mathbf{l}^T \mathbf{P} \quad (16)$$

と定義されるシーン \mathcal{P}^3 の平面 π^T を考える. π^T 上の任意の点を $\underline{\mathbf{X}}$ とすると, $\pi^T \underline{\mathbf{X}} = \mathbf{l}^T (\mathbf{P}\underline{\mathbf{X}}) = 0$ であるから, $\underline{\mathbf{X}}$ の像 $\mathbf{P}\underline{\mathbf{X}}$ は \mathbf{l}^T 上に投影されることがわかる(図3参照). すなわち, π^T は, 直線 \mathbf{l}^T を3次元射影空間 \mathcal{P}^3 に逆投影したものである.

2次元曲面の輪郭線の投影: 画像上の直線 \mathbf{l}^T をシーンに逆投影した平面 $\mathbf{l}^T \mathbf{P}$ を考える. これがシーン中の双対2次元曲面 Φ^* に接する(図3参照)ならば, $\mathbf{l}^T \mathbf{P} \Phi^* \mathbf{P}^T \mathbf{l} = 0$ が成り立つ. これは, カメラ \mathbf{P} によって, 双対2次元曲面 Φ^* の輪郭が画像平面に双対2次元曲線

$$\phi^* \simeq \mathbf{P} \Phi^* \mathbf{P}^T \quad (17)$$

として投影されることを意味する。

3.2 カメラキャリブレーションの幾何学的意味

無限遠平面上の点 $[\mathbf{X}_\varepsilon^\top 0]^\top$ は、透視投影カメラ (11) よって $\mathbf{u} \simeq \mathbf{K}\mathbf{R}^\top[\mathbf{I} - \mathbf{t}][\mathbf{X}_\varepsilon^\top 0]^\top = \mathbf{K}\mathbf{R}^\top\mathbf{X}_\varepsilon$ なる位置に投影される。さらに、 \mathbf{X}_ε が絶対円錐曲線 Ω 上にあるとすれば $\mathbf{X}_\varepsilon^\top\mathbf{X}_\varepsilon = 0$ であるので、その像 \mathbf{u} は $0 = \mathbf{X}_\varepsilon^\top\mathbf{X}_\varepsilon \simeq (\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u})^\top(\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{u}^\top\mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}$ を満たす。これは、絶対円錐曲線 Ω が

$$\omega \simeq \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1} \quad (18)$$

なる 3×3 行列で定義される 2 次曲線に投影されることを意味する。すなわち、 ω は絶対円錐曲線の像である。

さらに、 ω の双対 $\omega^* \simeq \omega^{-1}$ を考える。式 (7), (11) を式 (17) に代入すれば

$$\omega^* \simeq \mathbf{K}\mathbf{K}^\top \simeq \mathbf{P}_\varepsilon\Omega_\varepsilon^*\mathbf{P}_\varepsilon^\top \quad (19)$$

を得るから、 ω^* は絶対双対 2 次曲面 Ω_ε^* の輪郭線の投影像とも解釈できる。

仮に ω または ω^* がわかったとすれば、 ω^* を Cholesky 分解 [40, 13] によって上半三角行列とその転置の積に分解し、さらに (3, 3) 成分が 1 になるよう正規化することによって、カメラの内部パラメータ \mathbf{K} を復元できる。内部パラメータが得られれば、ほとんどの場合 (以降の 4 節と 5 節のすべてのシナリオで) 外部パラメータ (位置と姿勢) を求めることは容易である。したがって、カメラキャリブレーションとは、校正対象のカメラによって観測される絶対円錐曲線 Ω の像 ω (またはその双対 ω^*) を推定することであると言える。

4 参照物体を用いたキャリブレーション

カメラキャリブレーションの目的は 3 次元空間中の物体とその投影像との幾何学的関係を明らかにすることであるから、予め何らかの形状情報がわかっている物体 (参照物体) を校正対象のカメラで撮像し、それがどのような投影像を生成するかを調べてキャリブレーションを行うのは自然な戦略である。本節では、参照物体を利用する種々のキャリブレーション手法を概観する。

4.1 3 次元参照物体によるキャリブレーション

3 次元シーンと 2 次元画像との関係を推定する最も直接的な方法は、3 次元ユークリッド座標系における位置が既知の参照点とその像の対応 $\mathbf{X}_\varepsilon \leftrightarrow \mathbf{u}$ を複数与えて、両者を関係づけるカメラ行列 \mathbf{P}_ε を推定するものである。ただ、このようなアプローチではカメラが純粋な透視投影にしたがうと単純に仮定することは稀で、 \mathbf{P}_ε の他にレンズ歪みのパラメータも求めること

がほとんどである [58, 63, 23]。アルゴリズムとしてのウェイトもレンズ歪みのモデル化とその推定法に置かれていることが多い。この話題については 7 節で論じることとし、ここでは \mathbf{P}_ε を求める最も簡便な線形解法を紹介する。これは Weng らの手法 [63] で使われ、Hartley らの著書 [21] の第 6 章でも紹介されている。

参照点とその像の対応 $\mathbf{X}_\varepsilon \leftrightarrow \mathbf{u}$ に対して、式 (11) の両辺と \mathbf{u} のベクトル積をとり、 \mathbf{P}_ε の要素に関して同次線形な関係

$$\mathbf{P}_\varepsilon\mathbf{X}_\varepsilon \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

を得る。上式に含まれる 3 つの成分のうち 2 つが独立であるから、6 組以上の対応があれば、固有値問題に帰着させて \mathbf{P}_ε の 12 個の要素の最小自乗解を求めることができる。いったん \mathbf{P}_ε が得られれば、式 (19) より絶対円錐曲線の像 ω を求めて内部パラメータ \mathbf{K} を取り出すのは容易である。

4.2 2 次元参照平面によるキャリブレーション

4.1 節で述べたアプローチは、シーン中に 3 次元位置が既知の参照点を多数配置することを前提としているが、これは精密に工作された 3 次元参照物体や高精度な移動台等の特別な設備を要する手間のかかる作業であり、特にカメラの視野が広い場合は極めて困難である。一方、2 次元平面上において参照点の位置を指定することは、3 次元空間よりはるかに容易である。そこで、校正作業に伴うユーザの負担を軽減するため、2 次元位置が既知の点を描いた参照平面を用いてキャリブレーションを行う手法が開発された。

4.2.1 単一カメラのキャリブレーション

Sturm ら [50] と Zhang [65, 66] は、参照平面と画像平面の間の射影変換からカメラ内部パラメータを求める手法を独立に提案した。

一般性を失うことなく式 (11) で $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ とし、シーンを記述する 3 次元ユークリッド座標系を校正対象のカメラに固定すると、カメラ行列は $\mathbf{P}_\varepsilon = [\mathbf{K} \ \mathbf{0}]$ となる。このカメラで 2 次元位置が既知の参照点を多数描いた参照平面 Π を観測すると、式 (14), (15) より、 Π から画像平面への 2 次元射影変換

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (20)$$

が定義される。 Π 上の参照点 \mathbf{x}_ε とその投影像 \mathbf{u} の対応 $\mathbf{x}_\varepsilon \leftrightarrow \mathbf{u}$ が 4 組以上得られれば、式 (15) を満たす \mathbf{H} を計算できる [21]。 \mathbf{H} の最初の 2 列を $\mathbf{v} \equiv \mathbf{K}\mathbf{i}$, $\mathbf{w} \equiv \mathbf{K}\mathbf{j}$ と書くと、 \mathbf{i} と \mathbf{j} の正規直交性 (13) より、絶対円錐曲

線の像 $\omega \simeq \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$ に関する同次線形な2つの拘束

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{v}}^{\top} \omega \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{w}}^{\top} \omega \underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{v}}^{\top} \omega \underline{\mathbf{w}} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

を得る。よって、参照平面 Π を3箇所以上から観測して射影変換 \mathbf{H}_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) を計算すれば6個以上の拘束が得られ、これらから ω を求めて内部パラメータ \mathbf{K} を決定できる⁵。

式(20)からわかるように、 $\underline{\mathbf{v}}$ と $\underline{\mathbf{w}}$ は、参照平面 Π 上に設定した2次元ユークリッド座標系の x, y 軸方向の無限遠点 $[\mathbf{i}^{\top} \ 0]^{\top}$, $[\mathbf{j}^{\top} \ 0]^{\top}$ の像すなわち消失点である。式(21)は、互いに直交する2方向の消失点が内部パラメータに対して2つの拘束を与えることを示している。

4.2.2 複数カメラの同時キャリブレーション

ステレオビジョン等の複数のカメラから成るシステムでは、参照平面を介してカメラ間に成り立つ拘束をうまく利用するとキャリブレーションの精度や計算の安定性を高めることができる。植芝ら [59, 70] は、参照平面からカメラの画像平面への射影変換が、式(15)で表されるようにカメラ行列 $\mathbf{P}_{\mathcal{E}}$ と参照平面行列 $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}$ の積になることを利用して、因子分解法により任意台数のカメラのすべての内部および外部パラメータを同時に推定する手法を開発した。

その他に、2台のカメラに特化し、無限遠平面を介してカメラ間に定義される射影変換が内部パラメータに課す拘束を考慮することによってより高精度な結果を得ようとする Malm らの方法 [34] がある。

4.3 1次元参照物体(直線)によるキャリブレーション

4.2節で述べた2次元参照平面によるキャリブレーション法は校正作業の手間を大幅に軽減するが、参照平面の一方の側からしかその上の参照点を観測できないため、複数のカメラを校正しようとする場合にそれらの配置が制限される。しかし、一本の直線上に参照点となる小球をつければどの方向からもそれを観測できるので、この制約は緩和される。Zhang は、既知の間隔で並んだ3つの参照点を持つ直線状の参照物体を用いたキャリブレーション法 [67, 68] を提案した。

図4に示すように、シーン中の参照直線 \mathcal{L} 上の3点を3次元非同次座標 \mathbf{A}, \mathbf{B} および \mathbf{C} で表し、それらの像をそれぞれ2次元同次座標 $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ で表す。 \mathcal{L} 上での3点の位置関係を既知と仮定すれば、既知定数 a, b を用いて $\mathbf{C} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ と書ける。また、 $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ は画像中に直接観測され同一直線上にあるので、 $\underline{\mathbf{c}}$ も既知定数 α, β を用いて $\underline{\mathbf{c}} = \alpha\underline{\mathbf{a}} + \beta\underline{\mathbf{b}}$ と表せる。4.2.1節と同

⁵ ω は定数倍の不定性を持つ 3×3 対称行列なので5自由度であり、その決定には5つ以上の拘束が必要である。

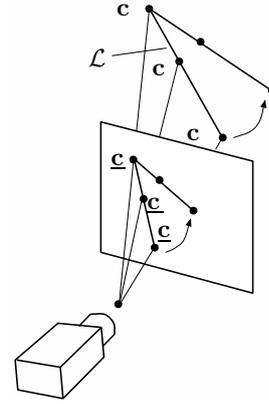


図4: 同一直線上の3点によるキャリブレーション

様、シーンを記述する3次元ユークリッド座標系を校正対象のカメラに固定してカメラ行列を $\mathbf{P}_{\mathcal{E}} = [\mathbf{K} \ \mathbf{0}]$ とすれば、投影式(11)より、未知定数 λ, μ を用いて $\lambda\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{K}\mathbf{A}$, $\mu\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{K}\mathbf{B}$ と書ける。これと $\underline{\mathbf{c}}$ が \mathbf{C} の像であることより

$$\alpha\underline{\mathbf{a}} + \beta\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{c}} \simeq \mathbf{K}\mathbf{C} = \mathbf{K}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\lambda\underline{\mathbf{a}} + b\mu\underline{\mathbf{b}}$$

が成り立つので、 $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b\mu}{a\lambda}$ すなわち $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{a\beta}{b\alpha}$ を得る。よって

$$\mathbf{K}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \lambda\underline{\mathbf{a}} - \mu\underline{\mathbf{b}} = \lambda \left(\underline{\mathbf{a}} - \frac{\mu}{\lambda} \underline{\mathbf{b}} \right) = \lambda \left(\underline{\mathbf{a}} - \frac{a\beta}{b\alpha} \underline{\mathbf{b}} \right)$$

となり、 $\underline{\mathbf{v}} \equiv \underline{\mathbf{a}} - \frac{a\beta}{b\alpha} \underline{\mathbf{b}}$ および $\omega \equiv \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$ とおけば

$$\lambda^2 \underline{\mathbf{v}}^{\top} \omega \underline{\mathbf{v}} = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 \quad (22)$$

が得られる。点 \mathbf{A}, \mathbf{B} 間の距離 $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ は既知であり、 $\underline{\mathbf{v}}$ も既知定数のみから計算できるから、式(22)中の未知数は 3×3 対称行列 $\lambda^2 \omega$ のみである。点 \mathbf{A} を固定したまま参照直線 \mathcal{L} の方向を変えれば、 λ は変わらず $\underline{\mathbf{v}}$ のみが変わる。よって、 \mathcal{L} の方向を6とおり以上に代えて撮影すれば、6つ以上の拘束が得られて $\lambda^2 \omega$ を決定でき、Cholesky 分解によって内部パラメータ \mathbf{K} を取り出すことができる。

4.4 円によるキャリブレーション

4.1~4.3節に述べた手法は、いずれも参照物体上での参照点の位置に関する情報を必要とする。これに対し、位置や半径が未知の円を透視投影カメラで観測し、その楕円像の形状からキャリブレーションを行う手法が提案されている。一般に、屋内や市街地等の人工的なシーンでは円が頻繁に存在し、さらに画像からの楕円の検出は点の検出よりも容易と考えられるので、このアプローチは人工的環境での自動的なキャリブレーションの実現に有用と期待される。

4.2.1 節に述べた手法のポイントは、参照平面–画像間の射影変換から直交する 2 方向に対する消失点を得ることにある。これに対し、Wu ら [64] は、同一平面上に描かれた 2 つの円の投影像から消失点を求めてキャリブレーションを行った。

いま、3次元シーン中の平面 Π 上に 2 つの円 Φ_1, Φ_2 が描かれ、それらの像が 2 次曲線 ϕ_1, ϕ_2 として観測されているとしよう。2.4 節で述べたように、すべての円は虚円点を通るので、 Φ_1 と Φ_2 は Π 上の虚円点 I, J で交わる。よって、 I, J の像を 2 つの円の像 ϕ_1, ϕ_2 の交点として求められる⁶。2次元ユークリッド座標系における虚円点の同次座標は $[1 \pm I \ 0]^T$ であるから、式 (14) より、 I, J は 3次元シーン中で $\mathbf{M}_\varepsilon [1 \pm I \ 0]^T = [\mathbf{i}^T \ 0]^T \pm I [\mathbf{j}^T \ 0]^T$ なる同次座標を持つ。よって、 I, J の像を $\underline{\mathbf{v}} \pm I \underline{\mathbf{w}}$ とすると $\underline{\mathbf{v}}$ と $\underline{\mathbf{w}}$ はそれぞれ無限遠点 $[\mathbf{i}^T \ 0]^T, [\mathbf{j}^T \ 0]^T$ の像となり、互いに直交する 2 方向に対する消失点が得られたことになる。あとは、平面射影変換によるキャリブレーションと同様、3つ以上の視点から Π を観測して絶対円錐曲線の像 ω に関する拘束を 6 つ以上求めればよい。以上の過程において、平面 Π 上での円の位置や半径は不要である。

問題は、 ϕ_1 と ϕ_2 の 4 つの交点のうちどれが虚円点 I, J の像であるかを判定することである。2 交点のみが複素数座標の場合はそれを選べば良いが、4 点ともそうである場合はどちらの複素共役点対が I, J の像なのか自明ではない。Wu らは、2 つの円の一方が他方を包含しない位置関係にある場合は、対を成す 2 点を通る直線が 2 つの円の間を通過しない方を選べば良いことを示した。

なお、Chen らも、同一平面上の 2 つの円を撮影した 1 枚の画像から焦点距離のみを求めるより直接的な方法 [7] を示している。

円の投影像である楕円は 5 自由度なので、円が 1 つしか観測されない場合は高々 5 つのパラメータしか得られない。ところが、円の中心位置 (3 自由度) とそれが乗っている平面の法線方向 (2 自由度) を記述するだけで 5 自由度を要するので、この場合は内部パラメータの推定に充てる自由度が全くない。しかし、事前知識としてカメラの画像横軸が平面に平行との制約を課せられれば 1 自由度の余裕が生じる。これを利用して内部パラメータのうち焦点距離のみを求める方法 [73] が提案されている。

⁶複素数の範囲で考えれば、2 つの実係数 2 次曲線は重複を含めて常に 4 点で交わり、複素数を座標値とする交点を持つばそれに複素共役な座標値を持つ点もやはり交点となる。

4.5 球によるキャリブレーション

球を透視投影カメラで観測すると、その輪郭が画像上に楕円として現れる。この形状からカメラの内部パラメータを求める手法 [53, 3] が提案されている。ここでは Agrawal らのアルゴリズム [3] に沿ってそのエッセンスを述べる。

ワールド座標系を校正対象のカメラに固定すると、カメラ行列は $\mathbf{P}_\varepsilon = [\mathbf{K} \ \mathbf{0}]$ となる。一方、半径 r 、中心位置 \mathbf{c} の球は、

$$\Phi_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{c} \\ -\mathbf{c}^T & \mathbf{c}^T \mathbf{c} - r^2 \end{bmatrix}$$

なる 4×4 行列で表される。 Φ_ε は正則であるから、式 (17) より、球 Φ_ε の輪郭は

$$\begin{aligned} \phi^* &\simeq \mathbf{P}_\varepsilon \Phi_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - r^{-2} \mathbf{c} \mathbf{c}^T & -r^{-2} \mathbf{c} \\ -r^{-2} \mathbf{c}^T & -r^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K} \mathbf{K}^T - \mathbf{v} \mathbf{v}^T \end{aligned}$$

なる双対 2 次曲線として画像上に現れる。ここで、 $\mathbf{v} \equiv r^{-1} \mathbf{K} \mathbf{c}$ は球の中心 \mathbf{c} の像である。 N 個の球を観測すれば、未知定数 λ_i ($i = 1, \dots, N$) を導入して、絶対双対 2 次曲面の輪郭像 $\omega^* \equiv \mathbf{K} \mathbf{K}^T$ に関する

$$\lambda_i \phi_i^* = \omega^* - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (23)$$

なる $6N$ 個の拘束を得る。 ϕ_i^* は、 i 番目の球の輪郭線像に楕円を当てはめることによって直接的に得られる。一方、未知数として、 ω^* の 5 自由度のほか、1 つの球につき λ_i と \mathbf{v}_i の 4 自由度がある。よって、 $6N \geq 5 + 4N$ すなわち $N \geq 3$ ならば、式 (23) を ω^* について解き、内部パラメータ \mathbf{K} を決定できる。

4.4 節の円によるキャリブレーションと同様、本手法も参照物体が球であるという事前知識のみを利用し、その位置や半径を必要としない。

5 セルフキャリブレーション

4 節では、シーンに関する何らかの知識を用いるキャリブレーション手法を紹介した。しかし、たとえば過去に撮影されたビデオ映像だけが残されている場合のように、そのような事前知識が利用できないケースでは、画像情報のみからそれを撮影したカメラのキャリブレーションを行いたいという要求が生じる。このような要請に応えるのがセルフキャリブレーション (self-calibration, auto-calibration) と呼ばれる技術である。本節では、シーン中の特徴点を複数の視点から観測して得た投影像のみを用いてカメラを校正する種々の手法を概観する。

5.1 一般運動下でのセルフキャリブレーション

セルフキャリブレーションの先駆的な研究は、内部パラメータが一定との仮定のもとで3箇所以上の視点から同一のシーンを撮影して得た点对応よりキャリブレーションが可能であることを示した Maybank, Faugeras らによるもの [35, 10] である。これは、2枚の画像間のエピソード幾何を記述する**基礎行列** (*fundamental matrix*) \mathbf{F} と内部パラメータ \mathbf{K} とを関係付ける **Kruppa 方程式** を利用している。1つの Kruppa 方程式は \mathbf{K} に2つの拘束を課すため、3枚の画像があれば3組の画像ペアから6つの拘束が得られ、 \mathbf{K} の5自由度を決定できる。しかしながら、拘束式が高度に非線形で扱いにくく、さらに5.2節に述べるセルフキャリブレーションに内在する本質的な特異性の他にも Kruppa 方程式に特有の特異性が存在する [47] ことから、最近はこのアプローチが採られることは少ない。

近年では、ほとんどのセルフキャリブレーション手法が、まず structure from motion アルゴリズムによって3次元射影空間 \mathcal{P}^3 におけるカメラ行列を求め、次にこれを3次元ユークリッド空間 \mathcal{E}^3 における表現に**昇格** (*upgrade*) させるという2段階の戦略を採っている。その具体的な手順は、次のとおりである。

まず、運動するカメラによって3次元空間中の N 個の特徴点 $j = 1, \dots, N$ を M 個の視点 $i = 1, \dots, M$ から観測し、その像 \mathbf{u}_{ij} ($i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$) を得る。次に、 \mathbf{u}_{ij} を生成する投影式 $\mathbf{u}_{ij} \simeq \mathbf{P}_i \mathbf{X}_j$ ($i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$) を満たすように、各視点におけるカメラ行列 \mathbf{P}_i と各特徴点の同次座標 \mathbf{X}_j を決定する。これは**射影復元** (*projective reconstruction*) と呼ばれ、多くのアルゴリズム [46, 54, 27, 5] が提案されている。しかし、こうして得られる \mathbf{P}_i と \mathbf{X}_j は3次元射影空間 \mathcal{P}^3 における表現であり、求めるべき3次元ユークリッド空間 \mathcal{E}^3 におけるカメラ行列 $\mathbf{P}_{\mathcal{E}^3}$ や特徴点の同次座標 $\mathbf{X}_{\mathcal{E}^3}$ とは未知の3次元射影変換行列 \mathbf{T} だけの差異

$$\mathbf{P}_{\mathcal{E}^3} \simeq \mathbf{P}_i \mathbf{T}, \quad i = 1, \dots, M \quad (24)$$

$$\mathbf{X}_{\mathcal{E}^3} \simeq \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X}_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (25)$$

がある(3次元復元の射影的不定性 [9, 20, 16])。そこで、式 (24) によってカメラ行列を \mathcal{E}^3 における表現に昇格させるために、 \mathbf{T} を推定することが必要になる。

射影変換行列 \mathbf{T} は、絶対双対2次曲面の \mathcal{P}^3 における表現と密接に関係する。すなわち、式 (4), (7) によれば、 \mathcal{E}^3 における絶対双対2次曲面 $\Omega_{\mathcal{E}^3}^*$ を \mathbf{T} によって \mathcal{P}^3 における表現に変換すると

$$\Omega^* \simeq \mathbf{T} \Omega_{\mathcal{E}^3}^* \mathbf{T}^T = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{T}}^T \quad (26)$$

となる。ただし $\tilde{\mathbf{T}}$ は \mathbf{T} の左 4×3 部分行列である。上式より Ω^* はランク3の 4×4 半正定値対称行列であることがわかる。ここで何らかの手段により Ω^* が得られたとすれば、 $\Omega^* = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathbf{U}^T$ (\mathbf{U} は $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ なる 4×3 行列) と固有値分解して $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{U} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ と定め、さらに $[\tilde{\mathbf{T}} \ \mathbf{t}_4]$ が正則になるように第4列 \mathbf{t}_4 を勝手に選ぶ⁷ことにより、射影変換行列 \mathbf{T} を決定できる。

以上に見たように、セルフキャリブレーションは3次元射影空間 \mathcal{P}^3 における絶対双対2次曲面 Ω^* を決定することに帰着する [55]。その際に基盤となるのが、式 (24) を式 (19) に代入し式 (26) を適用して得られる

$$\omega_i^* \simeq \mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^T, \quad i = 1, \dots, M \quad (27)$$

なる関係である。これは、“絶対双対2次曲面の輪郭像が絶対円錐曲線の像の双対となる”ことを示す式 (19) を3次元射影空間 \mathcal{P}^3 において表現したものにほかならない。以下、式 (27) を利用して Ω^* を決定する方法を述べる。

5.1.1 内部パラメータが固定されている場合

まず、カメラの内部パラメータが固定されている場合を考える。すなわち、 ω_i^* は視点 i によらず一定値 ω^* をとるものとする。すると、式 (27) より

$$\lambda_i \omega^* = \mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^T, \quad i = 1, \dots, M \quad (28)$$

を満たす Ω^* , ω^* およびスカラ λ_i を求めれば良いことになる。

Heyden ら [24] は、次のような解法を提案した; structure from motion で得られるカメラ行列 \mathbf{P}_i ($i = 1, \dots, M$) について、一般性を失うことなく第1カメラが $\mathbf{P}_1 \simeq [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$ であるとして良い⁸。すると Ω^* の左上 3×3 部分行列が $\omega^* (\simeq \mathbf{K} \mathbf{K}^T)$ となることが式 (28) よりわかるので、未知の3次元ベクトル \mathbf{a} を用いて式 (26) で $\tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{K}^T \ \mathbf{a}]^T$ とおくことができ、式 (28) を

$$\lambda_i \mathbf{K} \mathbf{K}^T - \mathbf{P}_i \begin{bmatrix} \mathbf{K} \mathbf{K}^T & \mathbf{K} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{K}^T & \mathbf{a}^T \mathbf{a} \end{bmatrix} \mathbf{P}_i^T = 0 \quad (29)$$

と書ける。未知数は全カメラに共通の内部パラメータ \mathbf{K} と3次元ベクトル \mathbf{a} およびスカラ λ_i ($i = 1, \dots, M$) である。Heyden らは、式 (29) の左辺を $f(\lambda_i, \mathbf{K}, \mathbf{a})$ と書き、コスト関数 $\sum_{i=1}^M f(\lambda_i, \mathbf{K}, \mathbf{a})^2$ を最小とするパラメータを非線形最適化で求めた。 \mathbf{K} を固定すれば式

⁷射影変換行列 \mathbf{T} の第4列は \mathcal{E}^3 における平行移動とスケーリングに対応しているの、これを自由に設定しても3次元シーンの復元形状に影響しない。

⁸これが満たされていないならば、 \mathbf{P}_1 とその零点 \mathbf{t}_1 から構成した 4×4 行列 $\mathbf{S} = [\mathbf{P}_1^T (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1^T)^{-1} \ \mathbf{t}_1]$ を用いて $\mathbf{P}_i \leftarrow \mathbf{P}_i \mathbf{S}$ と変換すれば良い。

(29) は (4, 4) 成分を除いて \mathbf{a}, λ_i について線形になるので、 \mathbf{K} の初期値のみを与えれば \mathbf{a}, λ_i の初期値は容易に決定できる。

セルフキャリブレーションが 3 次元射影空間 \mathcal{P}^3 における絶対双対 2 次曲面 Ω^* の推定に等価であることを最初に明確に指摘したのは Triggs[55] である。彼は、式 (28) の独立な 6 つの成分から異なる 2 つを選んで交差積をとることにより、 λ_i が消去された

$$(\omega^*)_{AB}(\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{CD} - (\omega^*)_{CD}(\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{AB} = 0$$

なる関係を得た⁹。そして、すべての (AB) と (CD) の組み合わせについてこれを満たすような Ω^* と ω^* を、 $\det \Omega^* = 0$ なる拘束のもとで非線形最適化により求めた。初期値の与え方は詳しく述べられていないが、最終解は初期値に敏感でないと報告されている。

2.4 節で述べたように、絶対双対 2 次曲面 Ω^* は無限遠平面 π_∞ と絶対 2 次曲線 Ω の両方の情報を含み、 \mathcal{P}^3 において Ω^* を推定することは π_∞ と Ω を推定することに等価である。Pollefeys ら [38] は、 π_∞ を介して 2 画像間に定義される 2 次元射影変換行列の 3 つの固有値の絶対値が等しいという条件 (modulus constraint) から π_∞ を求め、次にこの射影変換に対して Ω の像 ω が不変という条件から ω を決定している。これは、カメラ行列 \mathbf{P}_i の表現をまず射影空間 \mathcal{P}^3 からアフィン空間 \mathcal{A}^3 に昇格し、さらにユークリッド空間 \mathcal{E}^3 へ昇格することに相当する。Ronda ら [41] は、2 枚の画像の同一位置に投影されるシーンの点の軌跡 (horopter curve) を用いて modulus constraint の幾何学的解釈を与えている。

なお、内部パラメータ固定条件下でのセルフキャリブレーションに関するより詳細な解説 [12] があるので、併せて参照されたい。

5.1.2 内部パラメータが変化する場合

セルフキャリブレーションにおける最も一般的なケースは、カメラ運動が任意かつ視点毎に内部パラメータが変化する場合である。しかし、式 (27) からわかるように、内部パラメータすなわち ω_i^* が各視点 i で全く独立かつ自由に変動するなら何の拘束も得られない。よって、キャリブレーションが可能であるためには内部パラメータに何らかの制約を課すことが必要である。

この制約について、まず全ての視点で画素のアスペクト比が 1 かつ非直交性歪みが無ければ (式 (10) で $a = 1$ かつ $s = 0$) キャリブレーションが可能であること [25] が示され、次にこの条件は $s = 0$ のみに緩められた [37, 26]。さらに、5 つの内部パラメータの任意の 1 つが一定であれば十分であること [28] が明らかにされた。

⁹(\cdot)_{AB} は行列の (A, B) 成分を表す。

以上のような条件を ω_i^* に課して式 (27) を解くのは容易ではない。しかし、非直交歪み s が 0 かつ画像中心 (u_0, v_0) が既知であれば、画像座標を $(u, v) \leftarrow (u - u_0, v - v_0)$ とシフトすることによって内部パラメータ行列を対角形 $\mathbf{K}_i = \text{diag}(a_i f_i, f_i, 1)$ に変換し、 $\omega_i^* \simeq \mathbf{K}_i \mathbf{K}_i^\top = \text{diag}(a_i^2 f_i^2, f_i^2, 1)$ とできる。これを利用して Ω^* を線形演算で求める手法を以下に述べよう。

Pollefeys ら [37] は、さらにアスペクト比 a_i が 1 との条件を加え、次のような解法を提案した; 5.1.1 節の Heyden らの方法と同様、 \mathcal{P}^3 における第 1 カメラ行列を $\mathbf{P}_1 \simeq [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$ とすれば、 Ω^* の左上 3×3 部分行列は $\omega_1^* \simeq \text{diag}(f_1^2, f_1^2, 1)$ となる。よって、式 (27) を

$$\lambda_i \begin{bmatrix} f_i^2 & & & \\ & f_i^2 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_i \begin{bmatrix} f_1^2 & & \alpha \\ & f_1^2 & \beta \\ & & 1 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \mathbf{P}_i^\top$$

と書ける。これは $5 + 2(M - 1)$ 個の未知数 $f_1^2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_i f_i^2, \lambda_i$ ($i = 2, \dots, M$) に関する $6(M - 1)$ 個の線形な拘束を与える。したがって、視点数 M が 3 以上ならば、これらを線形演算により求めることができる。

Pollefeys らの解法には第 1 カメラを特別扱いしているという不自然さがある。Seo ら [42] は、全てのカメラを対等に扱う以下の手法を提案した; ω_i^* の非対角成分が 0 であるから、式 (27) より、1 つの視点に対し Ω^* の成分について同次線形な 3 つの拘束

$$(\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{12} = (\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{13} = (\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{23} = 0 \quad (30)$$

が得られる。さらにアスペクト比 a_i も既知なら、式 (30) に加えて

$$a_i^{-2} (\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{11} = (\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top)_{22} \quad (31)$$

も拘束として利用できる。 Ω^* は定数倍の不定性を持つ 4×4 対称行列なので ($\text{rank} \Omega^* = 3$ を考えなければ) 9 自由度であり、式 (30) のみを用いる場合も式 (31) を併用する場合も、視点数が 3 以上ならば線形演算により Ω^* を決定できる。

上述の 2 つの線形解法では画像中心が既知でなければならず、また $\text{rank} \Omega^* = 3$ すなわち $\det \Omega^* = 0$ という条件が必ずしも満たされない。残念ながら、これらの問題を克服した線形解法は現在のところ知られておらず、以下のような非線形最適化に頼らざるを得ない。

Pollefeys ら [37] は、線形解を初期値として式 (27) より導かれる次の非線形最適化を行った;

$$\min_{\omega_i^*, \Omega^*} \sum_{i=1}^M \left\| \frac{\omega_i^*}{\|\omega_i^*\|} - \frac{\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top}{\|\mathbf{P}_i \Omega^* \mathbf{P}_i^\top\|} \right\|^2$$

また, Seo ら [42] は, 次の反復解法を提案した; まず, 線形解法で得られた Ω^* を固有値分解によりランク 3 に射影する. これを式 (27) に代入すると, 0 にならない ω_i^* の非対角成分から画像中心 (u_{0i}, v_{0i}) の誤差推定量 $(\Delta u_{0i}, \Delta v_{0i})$ が得られるので, これを用いて

$$\mathbf{P}_i \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & -\Delta u_{0i} \\ & 1 & -\Delta v_{0i} \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_i, \quad i = 1, \dots, M$$

と更新して画像中心の影響をキャンセルする. そして, 新しい \mathbf{P}_i に再び線形解法を適用して Ω^* を求め直し, ランク 3 に射影する. 以上の過程を収束するまで繰り返す.

5.2 臨界運動

セルフキャリブレーションはどのようなカメラ運動のもとでも可能というわけではない. 例えば, カメラが回転せずに直線上を移動する場合はどれほど視点数を増やしても点対応から得られる情報は全視点に共通なエピポールただ 1 つであり, これから内部パラメータを取り出すことは不可能である. このように, 3次元シーン中の特徴点の分布によらず内部パラメータが一意に決まらないカメラ運動を**臨界運動** (*critical motion*) と呼ぶ. カメラ運動が厳密に臨界運動に一致しなくても, それに近い場合は計算が不安定になるので, どのような運動が臨界なのか把握しておくことは実用上きわめて重要である.

このような解析を初めて体系的に行ったのは Sturm[45] であり, 固定内部パラメータのもとでのセルフキャリブレーションについて, すべての臨界運動を枚挙・分類した. その後, この結果は Kahl ら [29, 30] によって, 内部パラメータ可変の場合に拡張された. 特に, 正方形画素 ($s = 0, a = 1$) かつ画像中心既知 ($u_0 = v_0 = 0$) で焦点距離のみが未知かつ可変というシナリオにおける全ての臨界運動が明らかにされた. Sturm[49] もこのシナリオを扱い, 独立に同様の結果を示している.

固定内部パラメータのシナリオで特に重要なのは, カメラ回転が特定の軸周りでしか生じないと, 並進成分にかかわらずその運動は臨界であるという結果である. キャリブレーションが可能であるためには, 少なくとも 2 つの軸周りの回転成分が必要である. また, 可変焦点距離のシナリオでは, カメラが楕円もしくは双曲線上を移動しかつその光軸が軌道に接しているような運動が臨界であることが示されている.

臨界運動解析の詳細に立ち入ることは本稿の範囲を越えるが, おおまかな方針は次のとおりである; これまで見てきたように, セルフキャリブレーションを行

うことは, 射影空間 \mathcal{P}^3 における絶対双対 2 次曲面 Ω^* (あるいは, 無限遠平面 π_∞ とその上の絶対円錐曲線 Ω) を決定することに帰着する. このとき Ω^* は, その輪郭像 ω^* がカメラの内部パラメータに課される制約 (一定値をとる, 非直交歪みなしなど) を反映するように決めなければならない. このような Ω^* が一意に決まらなければ, カメラ行列をユークリッド空間に昇格させる射影変換行列 \mathbf{T} も決まらずセルフキャリブレーションが不可能になる. したがって, 臨界運動とは内部パラメータに課せられた制約を満たすような ω^* を生成する Ω^* が一意に決まらないような運動ということになる.

以上の事項をユークリッド空間 \mathcal{E}^3 で述べれば, 次のようになる; \mathcal{E}^3 の双対 2 次曲面 Φ_ε^* とその輪郭像 $\phi^* \simeq \mathbf{P}_\varepsilon \Phi_\varepsilon^* \mathbf{P}_\varepsilon^\top$ を考える. さらに, 内部パラメータ \mathbf{K} をキャンセルした $\phi_c^* \equiv \mathbf{K}^{-1} \phi^* \mathbf{K}^{-\top}$ を考え, これをカメラの位置 \mathbf{t} と姿勢 \mathbf{R} を用いて具体的に書けば

$$\phi_c^* \simeq \mathbf{R}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{t} \\ & -\mathbf{t}^\top \end{bmatrix} \Phi_\varepsilon^* \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{t}^\top \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

となる. たとえば内部パラメータ \mathbf{K} が一定という条件が課されるならば, ϕ^* ひいては ϕ_c^* も一定でなければならない. そこで, ある $\Phi_\varepsilon^* \neq \Omega_\varepsilon^* = \text{diag}(1, 1, 1, 0)$ に対して ϕ_c^* を一定に保つ $\{\mathbf{t}, \mathbf{R}\}$ を求めれば, これが臨界運動を表す.

5.3 回転運動によるセルフキャリブレーション

これまでは, カメラが全く未知の一般的な運動を行うという状況下でのセルフキャリブレーションについて論じてきたが, カメラ運動のクラスを制限することによってより簡単なアルゴリズムで安定にセルフキャリブレーションを行うアプローチが生まれた. その代表例が, Hartley によって提案された回転運動を行うカメラのセルフキャリブレーション [18] である.

全く並進成分運動を持たず, 投影中心まわりの回転のみを行いながら 3次元シーンを撮影する透視投影カメラを考える. シーンを記述する 3次元ユークリッド座標系の原点を投影中心にとれば, i 番目の画像におけるカメラ行列 $\mathbf{P}_{\varepsilon i}$ は, カメラの姿勢 \mathbf{R}_i と内部パラメータ \mathbf{K}_i を用いて $\mathbf{P}_{\varepsilon i} = \mathbf{K}_i \mathbf{R}_i^\top [\mathbf{I} \ 0]$ と表される. 非同次座標 \mathbf{X}_ε を持つシーン中の固定点の像 \mathbf{u}_i は, $\mathbf{u}_i \simeq \mathbf{P}_i [\mathbf{X}_\varepsilon^\top \ 1]^\top = \mathbf{K}_i \mathbf{R}_i^\top \mathbf{X}_\varepsilon$ となるので, i 番目と j 番目の画像における \mathbf{X}_ε の像は $\mathbf{u}_j \simeq \mathbf{K}_j \mathbf{R}_j^\top \mathbf{X}_\varepsilon \simeq \mathbf{K}_j \mathbf{R}_j^\top \mathbf{R}_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{u}_i$ と関係づけられる. すなわち, 画像 i, j 間には 3×3 行列

$$\mathbf{H}_{ji} \simeq \mathbf{K}_j \mathbf{R}_{ji} \mathbf{K}_i^{-1} \quad (32)$$

で定義される射影変換が存在する. ここで $\mathbf{R}_{ji} \equiv \mathbf{R}_j^\top \mathbf{R}_i$

は画像 i, j 間の相対的なカメラ回転を表す。画像間で 4 組以上の対応点が得られれば \mathbf{H}_{ij} を計算できる。

5.3.1 内部パラメータが固定されている場合

Hartley[18] は、内部パラメータが画像 i によらず一定値 \mathbf{K} をとる場合のセルフキャリブレーション法を提案した。この場合、式 (32) の右辺の行列式が $\det(\mathbf{K}\mathbf{R}_{ji}\mathbf{K}^{-1}) = \det \mathbf{K} \det \mathbf{R}_{ji} \det \mathbf{K}^{-1} = 1$ となることに注意すると、 $\det \mathbf{H}_{ji} = 1$ となるように \mathbf{H}_{ji} を正規化して次のように両辺を等号で結ぶことができる。

$$\mathbf{H}_{ji} = \mathbf{K}\mathbf{R}_{ji}\mathbf{K}^{-1} \quad (33)$$

上式より \mathbf{R}_{ji} の直交性を利用してこれを消去すると、 $\omega^* \simeq \mathbf{K}\mathbf{K}^T$ に関する拘束

$$\mathbf{H}_{ji}\omega^*\mathbf{H}_{ji}^T = \omega^* \quad (34)$$

を得る。これは、射影変換 \mathbf{H}_{ji} によって双対 2 次曲線 ω を画像 i から画像 j に写しても不変であることを意味する (式 (4) 参照)。式 (34) は ω^* の成分について同時線形な 6 つの拘束を与えるが、全てが独立ではないのでこれらのみからは ω^* を決定できない。しかし、3 枚以上の画像があれば射影変換が 2 つ以上得られて十分な拘束が導かれ、 ω^* を線形演算で求めることができる。

2 枚の画像からは ω^* を決定できないことは、次のように理解できる; 式 (33) より、 \mathbf{H}_{ji} の固有値は回転行列 \mathbf{R}_{ji} のそれに一致することがわかる。回転行列の固有値は回転角を θ とすれば $1, e^{\pm i\theta}$ であるから、固有値 1 を持つことと残り 2 つの固有値の積が 1 であることの 2 つが制約として \mathbf{H}_{ji} に課される。そのため \mathbf{H}_{ji} の自由度は 7 しかなく、 \mathbf{R}_{ji} の 3 自由度と \mathbf{K} の 5 自由度を全て取り出すことは不可能である。しかし、たとえば非直交歪み無し (式 (10) で $s = 0$) と仮定すれば、 \mathbf{H}_{ji} から \mathbf{R}_{ji} と残り 4 つの内部パラメータを求めることは可能である。

5.3.2 内部パラメータが変化する場合

Hartley の手法は、de Agapito ら [1, 2] と Seo ら [43] によって、内部パラメータが変化する場合に拡張された; 式 (32) より \mathbf{R}_{ji} の直交性を利用してこれを消去し、さらに逆行列をとって

$$\mathbf{H}_{ji}^{-T} \omega_i \mathbf{H}_{ji}^{-1} \simeq \omega_j \quad (35)$$

を得る。ただし、 $\omega_i \simeq \mathbf{K}_i^{-T} \mathbf{K}_i^{-1}$ である。式 (35) は、 ω_i が射影変換 \mathbf{H}_{ji} によって ω_j に写されることを意味する (式 (3) 参照)。

内部パラメータすなわち ω_i が各 i 毎に全く独立かつ自由に変動するなら、式 (35) は何の拘束も与えない。

よって、一般運動の場合 (5.1.2 節) と同様、キャリブレーションが可能であるためには内部パラメータに何らかの制約を課す必要がある。

式 (10) より ω を具体的に計算すると

$$\omega \simeq \begin{bmatrix} 1 & -s \\ -s & a^2 + s^2 \\ -u_0 + sv_0 & su_0 - (a^2 + s^2)v_0 \\ & -u_0 + sv_0 \\ & su_0 - (a^2 + s^2)v_0 \\ u_0^2 - 2su_0v_0 + (a^2 + s^2)v_0^2 + a^2f^2 \end{bmatrix}$$

となるので、下記のように様々な制約を ω の成分 ω_{AB} に関する同時線形な拘束として表現できる:

非直交歪み無し: $s = 0 \implies \omega_{12} = 0$

正方形画素: $s = 0, a = 1 \implies \omega_{12} = 0, \omega_{11} = \omega_{22}$

画像中心既知: $u_0 = v_0 = 0 \implies \omega_{13} = \omega_{23} = 0$

内部パラメータに関する事前知識に応じてこれらの制約のいくつかと式 (35) を組み合わせれば、基準画像 (第 1 画像とする) の内部パラメータ ω_1 のみを未知数とする同時線形な拘束が導かれ、線形演算でこれを解くことができる。たとえば、正方形画素を仮定した場合は

$$\begin{cases} (\mathbf{H}_{j1}^{-T} \omega_1 \mathbf{H}_{j1}^{-1})_{12} = 0 \\ (\mathbf{H}_{j1}^{-T} \omega_1 \mathbf{H}_{j1}^{-1})_{11} = (\mathbf{H}_{j1}^{-T} \omega_1 \mathbf{H}_{j1}^{-1})_{22} \end{cases} \quad j = 2, \dots, M$$

なる $2(M-1)$ 個の線形拘束式を

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} & & \omega_{13} \\ & \omega_{11} & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{bmatrix}$$

について解けば良い。

5.3.3 回転中心と投影中心のずれの影響

実際にはカメラを厳密にその投影中心のまわりに回転させることは困難であり、運動に並進成分が含まれる場合に推定誤差がどう振る舞うかを調べるのが実用上重要である。Wang ら [61, 62] はカメラの内部パラメータ固定の条件下でこの問題を解析し、対象シーンまでの平均的な距離で正規化した並進の大きさと推定精度の劣化の関係を実験的に調べた。また、並進成分が存在してもカメラ回転量や画像数を増やせば劣化を緩和できることを示した。Hayman ら [22] は同様の解析を焦点距離のみが未知かつ可変なカメラに対して行い、並進成分が光軸に平行/垂直な 2 ケースについて推定値の偏位を理論的に見積もった。

5.4 未知2次元シーンからのセルフキャリブレーション

Triggs[56] は、平面上に分布する複数の未知の特徴点を複数の視点から観測することによりセルフキャリブレーションが可能であることを最初に示した。

複数の未知の特徴点が分布した平面 Π を内部パラメータ \mathbf{K} を固定したカメラで M 箇所から観測する。 Π と画像 i ($i = 1, \dots, M$) の間には式 (15) で表される2次元射影変換 $\mathbf{H}_i \simeq \mathbf{K}\mathbf{R}_i^\top[\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{d} - \mathbf{t}_i]$ が存在する。 \mathbf{H}_i の最初の2行を $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ と書けば、 \mathbf{i} と \mathbf{j} の正規直交性 (13) より、参照平面によるキャリブレーションの基本式 (21) と全く同様の拘束

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{v}_i^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{w}_i = 0 \end{cases} \quad (36)$$

を得る。ここで $\boldsymbol{\omega} \simeq \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$ である。

ただし、平面によるキャリブレーションの場合と異なり \mathbf{H}_i は未知なので \mathbf{v}_i と \mathbf{w}_i もわからない。しかし、画像 1, i 間で Π 上の特徴点の像の対応 $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{u}_i$ が4組以上とれば、 Π を介して定義される画像 1 から画像 i への2次元射影変換 $\mathbf{H}_{i1} \simeq \mathbf{H}_i \mathbf{H}_1^{-1}$ が計算できる。これを用いれば $\mathbf{H}_{i1}[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{w}_1] \simeq [\mathbf{v}_i \ \mathbf{w}_i]$ となり、画像 1 における消失点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ のみですべての画像における消失点 $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ を表せる。これを式 (36) に代入して

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{H}_{i1}^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{H}_{i1} \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1^\top \mathbf{H}_{i1}^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{H}_{i1} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_1^\top \mathbf{H}_{i1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{H}_{i1} \mathbf{w}_1 = 0 \end{cases} \quad (37)$$

を得る。これは、未知数 $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ に関する $2M$ 個の非線形な拘束であり、解くためには5枚以上の画像と数値探索を要する。

5.5 2画像からのセルフキャリブレーション

良く知られているように、未校正カメラで撮影した2枚の画像間の幾何学的関係は**基礎行列** (*fundamental matrix*) と呼ばれるランク2の 3×3 行列 \mathbf{F} に集約される。 \mathbf{F} は7自由度なので、カメラ運動すなわち外部パラメータと内部パラメータのうち最大7つしか推定できない。そこで、一部の内部パラメータを既知としたり運動のクラスを限定するなどの制約を課してセルフキャリブレーションを行う試みがいくつか提案されている。 \mathbf{F} からのセルフキャリブレーションは閉形式解が得られるため、理論的な見地から興味深い。

このトピックを最初に取り上げたのは Hartley[15] であり、2つの視点におけるカメラの内部パラメータのうち焦点距離のみを未知とし、これら (2自由度) とカメラ間の相対的な回転 (3自由度) と並進の向き (2自由度) を線形演算により求めた。その後、閉形式解の導出が様々な観点からなされた [36, 6, 77, 72, 32]。しかし、

2視点におけるカメラの光軸が同一平面上に乗るというありふれた配置が臨界運動となることや、画像中心が正確に分かっていないと焦点距離の推定精度が大きく悪化する [19] 等の問題があり、その実用性には疑問が残る。

その他、2視点での焦点距離とアスペクト比が共通かつ未知 [39]、2視点での焦点距離が共通かつ未知 [32, 48]、2視点での焦点距離と画像中心が共通かつ未知でカメラが光軸を同一平面上に保持する注視運動を行う [60] などのケースで閉形式解が導出されている。

6 バンドル調整

4節と5節では線形なアルゴリズムに重点を置いて紹介した。これらは、未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に関して線形な拘束式 $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$ を導き、それができるだけ満たされるよう、評価関数 $F_L(\boldsymbol{\theta}) \equiv \|\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}\|^2$ を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ を推定する。良く知られているように、拘束が非同次すなわち $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ の場合は $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ が解となり、同次すなわち $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合は正定値対称行列 $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルが解を与える。

このような線形解法には見通しの良さや収束性の心配が無い等の利点がある反面、線形な形式に表せない拘束 (たとえば、絶対双対2次曲面 Ω^* に対する $\det \Omega^* = 0$) を考慮できないことや評価関数 $F_L(\boldsymbol{\theta})$ の幾何学的・統計的な意味が不明確で得られたパラメータの最適性が保証されない等のきらいがある。それでは、どのような評価関数を最小化すべきであろうか？

本稿でこれまでに論じてきたキャリブレーション法は、すべて何らかのカメラの投影モデルに基づく。投影モデルによってパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ がある値をとる時の特徴点の投影位置 $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta})$ が予測される。これと実際に観測される投影位置 \mathbf{u} との差 $\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta})$ を**再投影誤差** (*reprojection error*) と呼ぶ。実は、観測値 \mathbf{u} に含まれるノイズが各点毎に独立かつ一様・等方な Gauss 分布に従うならば、全画像中の全特徴点像にわたってとった再投影誤差のノルムの自乗和 $F(\boldsymbol{\theta}) \equiv \sum_n \|\mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{u}}_n(\boldsymbol{\theta})\|^2$ を最小にすることが“パラメータの推定誤差の分散が理論的下限値に到達する”という意味で最適であることが示されている [31]。このような再投影誤差の最小化は写真測量の分野で古くから行われており、**バンドル調整** (*bundle adjustment*) と呼ばれている。structure from motion (SFM)[5]をはじめとするコンピュータビジョンの様々な問題にもバンドル調整が応用されている。

多くの場合、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ は制約条件 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ を伴う。バンドル調整はこの制約のもとで $F(\boldsymbol{\theta})$ を最小化する非線形最適化問題であり、適当な初期値から出発

して Newton 法やその変形である Levenberg-Marquardt 法 [40] 等によって逐次的に θ を求める。Jacobian が疎行列になることを利用した効率的な計算法など、その実装については [57, 21] に詳しい。

カメラキャリブレーションにおいても、線形解法で得られないパラメータを求めたり推定精度を向上させるためにバンドル調整が最終段階で用いられる。5.1 節の一般運動からのセルフキャリブレーションは内部パラメータ推定を伴う SFM と考えられ、多くのアルゴリズムがカメラ内部・外部パラメータと特徴点の 3 次元座標の両方から成る θ の最終値を線形解を初期値とするバンドル調整によって求めている。特に岡谷らは、カメラモデルを正射影、弱透視投影、透視投影と段階的に切り替えつつ、それぞれのステージでバンドル調整を行うセルフキャリブレーション手法 [71] を提案している。これは、射影復元から出発してより自由度の少ないユークリッド空間へカメラ行列を昇格させる方法とは逆に、自由度の少ない単純なカメラモデルから出発して徐々に精密なモデルに移行することによりノイズへの過適合 (overfitting) を防いでロバスト性を実現しようとするものである。また、5.3.1 で述べた Hartley の回転運動のもとのキャリブレーションアルゴリズム [18] でもカメラパラメータと特徴点の方向¹⁰を θ とするバンドル調整を行っている。一見力づくの方法に思われても、推定の最終段階ではこのようにバンドル調整を行って再投影誤差を最小化することが、現在のところ最も汎用的かつ確実な手段である。

なお、バンドル調整に限らず、ビジョンにおける幾何学問題の数値計算で常に注意すべきなのは、同次座標の各成分の間のバランスである。特に画像上の点を同次座標 $[u \ v \ 1]^T$ で表す場合、通常 u と v は 100 から 1000 のオーダーであり、第 3 成分とは 2~3 桁の違いがある。バンドル調整等の最小自乗法の評価関数には u, v の 2 次項や場合によっては 4 次項が出現することがあり、各項の絶対値の間に極端な不均衡が生じるため桁落ちが発生して計算精度が大幅に低下する。これを防ぐためには、Hartley[17] が指摘するように、予め (u, v) が $(0, 0)$ を中心に平均振幅 $\sqrt{2}$ で分布するようにシフトとスケールングによって正規化してからパラメータを推定し、その結果を正規化の影響を打ち消すように修正することが必要である。

7 レンズ歪みのキャリブレーション

4 節と 5 節で紹介したキャリブレーション法は、カメラが透視投影にしたがうとの前提に基づくものであった。しかし、実際のカメラでは、特に焦点距離の短い広

角レンズを装着した場合、レンズの非線形歪みによって生じる透視投影からのずれが無視できなくなる。本節では、このずれを補償するために必要なレンズ歪みパラメータを推定する手法について述べる。

7.1 レンズ歪みのモデル

レンズ歪みがカメラの投影にもたらす影響を考察する場合、内部パラメータ \mathbf{K} の影響を受けない式 (8) の正規化画像座標系で考えるのが便利である。そして、シーン中の点 \mathbf{X}_ε の正規化画像座標系における投影位置を、純粋な透視投影による投影位置 $\mathbf{m} = [m \ n]^T$ にレンズ歪みによる偏位 $\delta(\mathbf{m})$ が重畳した

$$\check{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + \delta(\mathbf{m}) \quad (38)$$

であるとする。実際の画像上では、 $\check{\mathbf{m}} \equiv [\check{m}^T \ 1]^T$ に内部パラメータ行列 \mathbf{K} を適用した

$$\check{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\check{\mathbf{m}} \quad (39)$$

なる位置に \mathbf{X}_ε が投影される。

式 (38) では歪みを含まない投影位置 \mathbf{m} の関数として歪みを含んだ投影位置 $\check{\mathbf{m}}$ を表現しているが、後者から歪みを除去して前者すなわち理想的な透視投影による投影位置を再現するためにはこの逆関数が必要になる。これを求めるため、まず $\delta(\mathbf{m}) = \check{\mathbf{m}} - \mathbf{m}$ が微小であるとして式 (38) を $\check{\mathbf{m}}$ のまわりで Taylor 展開すると

$$\check{\mathbf{m}} \approx \mathbf{m} + \delta(\check{\mathbf{m}}) + [\mathbf{J}(\check{\mathbf{m}})](\mathbf{m} - \check{\mathbf{m}})$$

を得る。ただし $\mathbf{J}(\check{\mathbf{m}}) \equiv \frac{\partial \delta}{\partial \check{\mathbf{m}}}(\check{\mathbf{m}})$ は $\check{\mathbf{m}}$ における δ の Jacobian である。 δ が微小と仮定しているので \mathbf{J} もそうであり、両者の 2 次以上の項を省略すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &\approx \check{\mathbf{m}} - (\mathbf{I} + \mathbf{J}(\check{\mathbf{m}}))^{-1} \delta(\check{\mathbf{m}}) \\ &\approx \check{\mathbf{m}} - (\mathbf{I} - \mathbf{J}(\check{\mathbf{m}})) \delta(\check{\mathbf{m}}) \\ &\approx \check{\mathbf{m}} - \delta(\check{\mathbf{m}}) \end{aligned} \quad (40)$$

となって \mathbf{m} が $\check{\mathbf{m}}$ の関数として表現される。種々の文献中での歪みモデルは、式 (38) よりもむしろこの形で定式化されることが多い [44, 8, 23, 4, 52]。

レンズ歪み $\delta(\mathbf{m})$ には歪み中心と呼ばれる $\delta(\mathbf{m}_0) = \mathbf{0}$ を満たす不動点 \mathbf{m}_0 が存在する。写真測量の分野では、次の式 (41) のように $\delta(\mathbf{m})$ を \mathbf{m}_0 のまわりに放射状に生じるラジアル歪み (radial distortion) と非等方な偏心歪み (decentering distortion) の和として表すのが一般的であり、コンピュータビジョンにおいても多くのキャリブレーション法がこのモデルに基づいている:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{m}) &= (k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots) \check{\mathbf{m}} \\ &+ (1 + p_3 r^2 + p_4 r^4 + \dots) \end{aligned}$$

¹⁰ 投影中心が動かないので特徴点の奥行きは復元できない。

$$\begin{bmatrix} p_1(3\bar{m}^2 + \bar{n}^2) + 2p_2\bar{m}\bar{n} \\ 2p_1\bar{m}\bar{n} + p_2(\bar{m}^2 + 3\bar{n}^2) \end{bmatrix} \quad (41)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{m}} = [\bar{m} \ \bar{n}]^T \equiv \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$, $r \equiv \|\bar{\mathbf{m}}\|$ である。

キャリブレーションの目的は、式(41)のラジアル歪み係数 k_i , 偏心歪み係数 p_i および歪み中心 \mathbf{m}_0 を推定することである。 k_i, p_i の高次項をどこまで求めるかは歪みの大きさに依存するが、通常は高々最初の2項を推定すれば十分である¹¹。さらに、多くの場合ラジアル歪みの第1項 k_1 が支配的であり、このとき歪み中心 \mathbf{m}_0 を動かすことと偏心歪み (p_1, p_2) を変えることがほぼ等価になる[4]。そのため、 \mathbf{m}_0 と (p_1, p_2) の両方を未知数として同時に推定しようとする、評価関数の極小点付近でパラメータ空間が平坦になり数値的不安定を引き起こしやすい[52]。よって、 \mathbf{m}_0 を固定して k_i と p_i の両方を推定する[63, 23, 4]か、 p_i の項を無視して \mathbf{m}_0 と k_i を推定する[44, 8]のいずれかにすべきである。

7.2 再投影誤差最小化によるレンズ歪みの推定

レンズ歪みを推定する最も直接的な方法は、カメラに参照点を提示してその像を観測し、バンドル調整(6節)を行って再投影誤差を最小化することである。すなわち、3次元座標が既知の参照点 $\mathbf{X}_{\mathcal{E}_n}$ の投影予測位置を $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}_{\mathcal{E}_n})$, 実際の投影位置を \mathbf{u}_n とするとき、評価関数 $F(\boldsymbol{\theta}) \equiv \sum_n \|\mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}_{\mathcal{E}_n})\|^2$ を最小にするようなパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を求める。ただし、 $\boldsymbol{\theta}$ はカメラの内部・外部パラメータとレンズ歪みパラメータから成る。4.1節で述べた3次元位置が既知の参照点を用いたキャリブレーション法はいずれもこの戦略をとるが、個々の手法に以下のような特徴がある。

Wengら[63]は、内部・外部パラメータと歪みパラメータの最適値の間には相互依存性があり、歪みが大きい場合には同時に最適化を試みると局所解に陥る危険があることを指摘している。そして、その解決策として、歪みパラメータを固定して内部・外部パラメータを最適化するステップと、内部・外部パラメータを固定して歪みパラメータを最適化するステップを交互に繰り返す手法を提案している。

またHeikkilä[23]は、再投影誤差の計算の際に個々の参照点に含まれる誤差の共分散行列を求めて重み付けを行っている。

4.2節で紹介した参照平面を用いたキャリブレーション法のいくつかにおいても、推定の最終段階でレンズ歪みパラメータを含めたバンドル調整を行っている[66, 70]。これらは、歪み中心と画像中心 (u_0, v_0) の一

¹¹ただし、[8]では、魚眼レンズを対象とする場合は少なくとも第3項まで必要と指摘されている。

致を仮定するとともに、偏心歪みを無視してラジアル歪みの2項のみを推定している。

7.3 直線性に基づくレンズ歪みの推定

透視投影によってシーン中の直線は画像上の直線に投影されるが、レンズ歪みがある場合は直線の投影像は曲線になる。そこで、この曲線を構成する画像点の歪みを除去した時にそれらが同一直線上に乗るように歪みパラメータを求める戦略が考えられる。このアプローチの利点は、カメラの内部・外部パラメータとは独立に歪みパラメータのみを単独で較正できることである。

Devernayら[8]は、歪みを除去した画像点に最小自乗法で直線を当てはめた際の残差を最小化することによってラジアル歪みの第1項、歪み中心およびアスペクト比を求めた。Swaminathanら[52]は、画像点の座標値から歪みを除去する際にノイズが強調される問題を回避するために、画像点を補正せずに直線性を評価する指標を提案し、これをもとにラジアル歪みと偏心歪みのそれぞれ最初の2項を推定した。Ahmedら[4]は、投影像である画像曲線を構成する画像点ばかりでなく、曲線の接線も利用してラジアル歪みの第1項と偏心歪みの最初の2項を推定した。

7.4 エピポーラ幾何に基づくレンズ歪みの推定

未校正カメラで撮影された2枚の画像における対応点 $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}'$ の間には、これらがレンズ歪みを含まなければ、基礎行列 \mathbf{F} を介して**エピポーラ拘束**

$$\mathbf{u}'^T \mathbf{F} \mathbf{u} = 0 \quad (42)$$

が成り立つ。歪みを含んだ対応点 $\check{\mathbf{u}} \leftrightarrow \check{\mathbf{u}}'$ からこれを除去して上式を成立させるようなパラメータを求めれば、未知シーンからの歪みパラメータのセルフキャリブレーションが可能になる。Fitzgibbon[11]は、歪み中心を画像の中央に固定し $\mathbf{u} = \check{\mathbf{u}} / (1 + k_1 \|\check{\mathbf{u}}\|^2)$ なるモデルを仮定すれば、ラジアル歪み係数 k_1 の決定が一般化固有値問題に帰着して線形演算で解けることを示した。

同様の考え方で、Stein[44]は、3枚の画像からTrifocalテンソルと共にラジアル歪みの第1項と歪み中心を推定した。固定した歪みパラメータに基づいて歪みを除去した画像点からTrifocalテンソルを求めるステップと、固定したTrifocalテンソルから再投影誤差を計算しそれを最小化する歪みパラメータを求めるステップを交互に繰り返して逐次的に解を求めた。

8 おわりに

カメラの幾何学的キャリブレーションについて、最近の主要な研究を、その理論的な側面に重点を置いて

紹介した。新しい概念を提示して以後の多くの成果の源泉となった研究はできるだけ採り上げるよう努めた。言及できなかった話題も数多い。特に、投影モデルに基づかずに画像点とそれに結像する空間中の直線(視線)の関係を直接的に求めようとする試み [14, 51] は、投影のメカニズムが複雑でモデル化が困難な撮像系のキャリブレーション法として興味深く、次の機会にフォローしたい。

射影幾何をベースとしたカメラキャリブレーションの理論はここ十数年で長足の進歩を遂げた。しかし、統一されたシナリオと評価基準のもとで個々の手法の性能を比較検討し、どのアルゴリズムがどの場面で有効なのかを明らかにする作業は充分になされているとは言えない。シミュレーションの Protokol と実データの両面において、手法間の性能比較のベースとなるベンチマークが整備されることが望まれる。

参考文献

- [1] L. de Agapito, R. I. Hartley, and E. Hayman. Linear Self-Calibration of a Rotating and Zooming Camera. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1, pp. 15–21, 1999.
- [2] L. de Agapito, E. Hayman, and I. Reid. Self-Calibration of a Rotating Camera with Varying Intrinsic Parameters. *Int'l J. of Computer Vision*, Vol. 45, No. 2, pp. 107–127, 2001.
- [3] Motilal Agrawal. Camera calibration using spheres: A semi-definite programming approach. In *Proc. 9th Int'l Conf. on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 782–789, 2003.
- [4] Moumen T. Ahmed and Aly A. Farag. Differential Methods for Nonmetric Calibration of Camera Lens Distortion. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 2, pp. 477–482, 2000.
- [5] Adrien Bartoli. On the Non-linear Optimization of Projective Motion Using Minimal parameters. In *Proc. 7th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 340–354, 2002.
- [6] S. Bougnoux. From Projective to Euclidean Space under any practical situation, a criticism of self-calibration. In *Proc. 6th Int'l Conf. on Computer Vision*, pp. 790–796, 1998.
- [7] Qian Chen, Haiyuan Wu, and Toshikazu Wada. Camera Calibration with Two Arbitrary Coplanar Circles. In *Proc. 8th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 3, pp. 521–532, 2004.
- [8] Frédéric Devernay and Olivier Faugeras. Straight lines have to be straight – Automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments. *Machine Vision and Applications*, Vol. 13, pp. 14–24, 2001.
- [9] O. D. Faugeras. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig? In *Proc. 2nd European Conf. on Computer Vision*, pp. 563–578, 1992.
- [10] O. D. Faugeras, Q.-T. Luong, and S. J. Maybank. Camera self-calibration: Theory and experiments. In *Proc. 2nd European Conf. on Computer Vision*, pp. 321–334, 1992.
- [11] Andrew W. Fitzgibbon. Simultaneous linear estimation of multiple view geometry and lens distortion. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1, pp. 125–132, 2001.
- [12] A. Fusiello. Uncalibrated Euclidean reconstruction: a review. *Image and Vision Computing*, Vol. 18, pp. 555–563, 2000.
- [13] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computation (3rd Ed.)*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [14] Michael D. Grossberg and Shree K. Nayar. A General Imaging Model and a Method for Finding its Parameters. In *Proc. 8th Int'l Conf. on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 108–115, 2001.
- [15] R. I. Hartley. Estimation of Relative Camera Positions for Uncalibrated Cameras. In *Proc. 2nd European Conf. on Computer Vision*, pp. 579–587, 1992.
- [16] R. I. Hartley. Projective Reconstruction and Invariants from Multiple Images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 16, No. 10, pp. 1036–1041, Oct. 1994.
- [17] R. I. Hartley. In Defense of the 8-point Algorithm. In *Proc. 5th Int'l Conf. on Computer Vision*, pp. 1064–1070, 1995.
- [18] R. I. Hartley. Self-Calibration of Stationary Cameras. *Int'l J. of Computer Vision*, Vol. 22, No. 1, pp. 5–23, 1997.
- [19] R. I. Hartley and R. Kaucic. Sensitivity of Calibration to Principal Point Position. In *Proc. 7th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 433–446, 2002.
- [20] R. Hartley, R. Gupta, and T. Chang. Stereo from Uncalibrated Cameras. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 761–764, 1992.
- [21] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2000.
- [22] Eric Hayman and David W. Murray. The Effects of Translational Misalignment when Self-Calibrating Rotating and Zooming Cameras. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 25, No. 8, pp. 1015–1020, Aug. 2003.
- [23] Janne Heikkilä. Geometric Camera Calibration Using Circular Control Points. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 10, pp. 1066–1077, Oct. 2000.
- [24] A. Heyden and K. Åström. Euclidean Reconstruction from Constant Intrinsic Parameters. In *Proc. Int'l Conf. on Pattern Recognition*, pp. 339–343, 1996.
- [25] A. Heyden and K. Åström. Euclidean Reconstruction from Image Sequences with Varying and Unknown Focal Length and Principal Point. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 438–443, 1997.
- [26] A. Heyden and K. Åström. Minimal Conditions on Intrinsic Parameters for Euclidean Reconstruction. In *Proc. 3rd Asian Conf. on Computer Vision*, 2000.
- [27] A. Heyden, R. Berthilsson, and G. Sparr. An iterative factorization method for projective structure and motion from image sequences. *Image and Vision Computing*, Vol. 17, No. 13, pp. 981–991, 1999.
- [28] Anders Heyden and Åström. Flexible Calibration: Minimal Cases for Auto-calibration. In *Proc. 7th Int'l Conf. on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 350–355, 1999.

- [29] F. Kahl. Critical Motions and Ambiguous Euclidean Reconstructions in Auto-Calibration. In *Proc. 7th Int'l Conf. on Computer Vision*, pp. 469–475, 1999.
- [30] Fredrik Kahl, Bill Triggs, and Kalle Åström. Critical Motions for Auto-Calibration When Some Intrinsic Parameters Can Vary. *J. of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 13, No. 2, pp. 131–146, 2000.
- [31] K. Kanatani. *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*. Elsevier Science, Amsterdam, 1996.
- [32] K. Kanatani and C. Matsunaga. Closed-form Expression for Focal Lengths from the Fundamental Matrix. In *Proc. 4th Asian Conf. on Computer Vision*, pp. 128–133, Jan. 2000.
- [33] Jan J. Koenderink and Andrea J. van Doorn. Affine structure from motion. *J. of Optical Society of America: A*, Vol. 8, No. 2, pp. 377–385, Feb. 1991.
- [34] Henrik Malm and Anders Heyden. Stereo Head Calibration from a Planar Object. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 2, pp. 657–662, 2001.
- [35] S. J. Maybank and O. D. Faugeras. A theory of self-calibration of a moving camera. *Int'l J. of Computer Vision*, Vol. 8, No. 2, pp. 123–151, 1992.
- [36] G. N. Newsam, D. Q. Huynh, M. J. Brooks, and H.-P. Pan. Recovering Unknown Focal Lengths in Self-Calibration: An Essentially Linear Algorithm and Degenerate Configurations. *Int'l Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, Vol. 31, No. B3-III, pp. 575–580, 1996.
- [37] M. Pollefeys, R. Koch, and L. Van Gool. Self-Calibration and Metric Reconstruction Inspite of Varying and Unknown Intrinsic Camera Parameters. *Int'l J. of Computer Vision*, Vol. 32, No. 1, pp. 7–25, 1999.
- [38] M. Pollefeys and L. Van Gool. Stratified Self-Calibration with the Modulus Constraint. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 21, No. 8, pp. 707–724, Aug. 1999.
- [39] J. Ponce, D. H. Marimont, and T. A. Cass. Analytical Methods for Uncalibrated Stereo and Motion Reconstruction. In *Proc. 4th European Conf. on Computer Vision*, pp. 463–470, 1994.
- [40] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988.
- [41] José Ignacio Ronda, Antonio Valdés, and Fernando Jau-reguizar. Camera Autocalibration and Horopter Curves. *Int'l J. of Computer Vision*, Vol. 57, No. 3, pp. 219–232, 2004.
- [42] Yongduek Seo and Anders Heyden. Auto-calibration by linear iteration using the DAC equation. *Image and Vision Computing*, Vol. 22, No. 11, pp. 919–926, 2004.
- [43] Yongduek Seo and Ki Sang Hong. Autocalibration of a Rotating and Zooming Camera. In *Proc. IAPR Workshop on Machine Vision Applications*, pp. 274–277, 1999.
- [44] G. P. Stein. Lens Distortion Calibration Using Point Correspondences. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 602–608, 1997.
- [45] P. Sturm. Critical Motion Sequences for Monocular Self-Calibration and Uncalibrated Euclidean Reconstruction. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 1100–1105, 1997.
- [46] P. Sturm and B. Triggs. A Factorization Based Algorithm for Multi-Image Projective Structure and Motion. In *Proc. 4th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 709–720, 1996.
- [47] Peter Sturm. A Case Against Kruppa's Equations for Camera Self-Calibration. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 10, pp. 1199–1204, Oct. 2000.
- [48] Peter Sturm. On Focal Length Calibration from Two Views. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 2, pp. 145–150, 2001.
- [49] Peter Sturm. Critical Motion Sequences for the Self-Calibration of Cameras and Stereo Systems with Variable Focal Length. *Image and Vision Computing*, Vol. 20, No. 5–6, pp. 415–426, 2002.
- [50] Peter F. Sturm and Stephen J. Maybank. On Plane-Based Camera Calibration: A General Algorithm, Singularities, Applications. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1, pp. 432–437, 1999.
- [51] Peter Sturm and Srikumar Ramalingam. A Generic Concept of Camera Calibration. In *Proc. 8th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 1–13, 2004.
- [52] Rahul Swaminathan and Shree K Nayar. Nonmetric Calibration of Wide-Angle Lenses and Polycameras. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 10, pp. 1172–1178, Oct. 2000.
- [53] H. Teramoto and G. Xu. Camera calibration by a single image of balls: From conics to the absolute conic. In *Proc. 5th Asian Conf. on Computer Vision*, pp. 499–506, 2002.
- [54] B. Triggs. Factorization Methods for Projective Structure and Motion. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 845–851, 1996.
- [55] B. Triggs. Autocalibration and the Absolute Quadric. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 609–614, 1997.
- [56] B. Triggs. Autocalibration from Planar Scenes. In *Proc. 5th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 89–105, 1998.
- [57] B. Triggs et. al. Bundle Adjustment – A Modern Synthesis. In *Vision Algorithms: Theory & Practice, Springer-Verlag LNCS 1883*, 2000.
- [58] R. Y. Tsai. A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses. *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. 3, No. 4, pp. 323–344, Aug. 1987.
- [59] Toshio Ueshiba and Fumiaki Tomita. Plane-based Calibration Algorithm for Multi-camera Systems via Factorization of Homography Matrices. In *Proc. 9th Int'l Conf. on Computer Vision*, Vol. II, pp. 966–973, Nice, France, Oct. 2003.
- [60] Toshio Ueshiba and Fumiaki Tomita. A Closed-form Solution for a Two-view Self-calibration Problem under Fixation. In *Proc. 2nd Int'l Symp. on 3D Data Processing, Visualization and Transmission*, pp. 648–655, Thessaloniki, Greece, Sep. 2004.
- [61] Lei Wang, Sing Bing Kang, Heung-Yeung Shum, and Guangyou Xu. Error Analysis of Pure Rotation-based Self-Calibration. In *Proc. 8th Int'l Conf. on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 464–471, 2001.

- [62] Lei Wang, Sing Bing Kang, Heung-Yeung Shum, and Guangyou Xu. Error Analysis of Pure Rotation-Based Self-Calibration. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 26, No. 2, pp. 275–280, Feb. 2004.
- [63] Juyang Weng, Paul Cohen, and Marc Herniou. Camera Calibration with Distortion Models and Accuracy Evaluation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No. 10, pp. 965–980, 1992.
- [64] Yihong Wu, Haijiang Zhu, Zhanyi Hu, and Fuchao Wu. Camera Calibration from the Quasi-affine Invariance of Two Parallel Circles. In *Proc. 8th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 190–202, 2004.
- [65] Z. Zhang. Flexible Camera Calibration by Viewing a Plane from Unknown Orientations. In *Proc. 7th Int'l Conf. on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 666–673, 1999.
- [66] Z. Zhang. A Flexible New Technique for Camera Calibration. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 11, pp. 1330–1334, Nov. 2000.
- [67] Zhengyou Zhang. Camera Calibration with One-Dimensional Objects. In *Proc. 7th European Conf. on Computer Vision*, Vol. 4, pp. 161–174, 2002.
- [68] Zhengyou Zhang. Camera Calibration with One-Dimensional Objects. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 26, No. 7, pp. 892–899, Jul. 2004.
- [69] 浅田尚紀. CVCV-WG 特別報告: コンピュータビジョンにおける技術 評論と将来展望 (XI) - カメラモデルとキャリブレーション手法 -. 情報処理学会研究報告, No. 96-CVIM-102, pp. 65–74, Nov. 1996.
- [70] 植芝俊夫, 富田文明. 平面パターンを用いた複数カメラシステムのキャリブレーション. 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, Vol. 44, No. SIG 17(CVIM 8), pp. 89–99, Dec. 2003.
- [71] 岡谷貴之, 久保田俊作, 出口光一郎. カメラモデルの段階的切換えによる多視点カメラシステムのセルフキャリブレーション. 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, Vol. 43, No. SIG 11(CVIM 5), pp. 33–42, Dec. 2002.
- [72] 金谷健一, 松永力. 基礎行列の分解: 焦点距離の直接的表現. 情報処理学会研究報告, No. 2000-CVIM-120, pp. 49–56, Jan. 2000.
- [73] 呉海元, 和田俊和, 陳謙. ロボットのボディを利用したカメラキャリブレーション. 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, Vol. 44, No. SIG 17(CVIM 8), pp. 61–69, Dec. 2003.
- [74] 佐藤淳. コンピュータビジョン – 視覚の幾何学 –. コロナ社, 1999.
- [75] 出口光一郎. カメラキャリブレーション手法の最近の動向. 情報処理学会研究報告, No. CV82-1, pp. 1–8, Mar. 1993.
- [76] 松山隆司, 久野義徳, 井宮淳 (編). コンピュータビジョン: 技術評論と将来展望. 新技術コミュニケーションズ, 1998.
- [77] 植芝俊夫, 富田文明. 焦点距離が未知のステレオカメラによる三次元復元. 情報研報, No. 99-CVIM-119, pp. 1–8, Nov. 1999.