抽象化による初等代数問題の解決法

藤田米春　　西田富士夫
（大阪府立大学工学部）

1. はじめに　問題解決において，解を得るために有効な定理や公式を，効率よく見付け出すためには，抽象化あるいは特徴抽出が不可欠と考えられる．抽象化や特徴抽出によって，解法の *global* な方針を立てることができ，定理や公式等の探索範囲を狭くすることができる．問題を抽象化して，これにもとづき，解の経路を見付ける手法は，Sacerdoti [1] 等の研究が見られるが，筆者らもその一方法について報告している [2],[3]．本報告では，[2],[3] で述べた方法において，

(1) 式の形の抽象化法に，簡単な規則をもった変換法をとり入れた．

(2) 式の部分的特徴を抽出する関数を取り入れた．

(3) (1) で得られる式の形の特徴と，(2) で得られる式の部分的特徴にもとづき，定理や公式を関係表化し，問題の解決に必要な定理や公式を関係表の探索手続きを用いて選び出す．

(4) さらに，関係表の特徴項目の部分集合を取ることによる抽象化により，定理や公式の，抽象化された関係表を作成し，*global* な解方針の決定に役立てる．

の四点の改良を加え，より一般的な問題に対処できる問題解決システムを構成する手法について述べる．

以下において扱かう問題の表現法は，文献 [2],[3] で用いた方法による．すなわち，二つの述語論理式で表される状態 $(Qx)P(x)$ と $(Qx)G(x)$（ただし，(Qx) は量記号を表す）があるとき，$(Qx)P(x)$ から $(Qx)G(x)$ への変換の問題を，

$$((Qx)P(x) \mid (Qx)G(x)) \qquad (1)$$

と表す．この表現法によれば，証明問題 $(Qx)P(x) \rightarrow (Qx)G(x)$ は，(1) 式のように表され，方程式のように，ある変数の値を求める問題は，

$$((\exists ?x)\,P(x) \,\|\, (\exists ?x)\,L(x=\phi)) \qquad (2)$$

と表される．ただし，$(\exists ?x)$ は x が未知変数であることを表し，$L(x=\phi)$ は，$x=\langle$定数$\rangle$ の形の式の論理結合を表すものとする．又，$\|$ は，右から左への変換も可能なことを表す．

2. 抽象化と特徴抽出　問題を解くための定理や公式あるいは問題の表現などを抽象化する方法は，取り扱かう問題分野によって異なるが，問題分野を初等代数に限った場合，問題に現われる式の大まかな形の特徴を得ることと，解法にかかわる式の部分的な特徴を抽出することの両方が必要である．たとえば，問題，

$$\left((\exists ?x)\ x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \,\|\, (\exists ?x)\,V(x=\phi)\right)$$

において，これが x に関する分数も含む方程式であることを知ることと，x の次数と係数が 0 次の項に関して対称的であることを知ることは共に重要なことである．本節では，このための二つの方法について述べる．

2.1　式の抽象化変換　　初等代数問題に現われる関数は，整関数，分数関数，有理関数，無理関数，三角関数，指数対数関数である。また，これらをつなぐ関係は，等号 " = "，不等号 " $>, <, \geqq, \leqq, \neq$ " がある．さらに，いくつかの関係は，" $\wedge$, $\rightarrow$, $\vee$, $\sim$ " などの論理記号で結合される．この中で，証明問題や求値問題（方程式の根を求める問題や関数式の値を求める問題）において，最も重要と考えられるものは，関数の形である．特に，方程式の根を求める問題においては，未知変数にかかる関数の形によって，解法の手順が決まる．そこで，次のような，関数形を段階的に抽象化する変換規則により，式を抽象化することにより，式の形の特徴を取り出す．以下，式表現は原則として *prefix* 形による。

[変換1] レベル1の変換

① ＜定数＞ $\Rightarrow \phi$　　ただし，項が0又はべき数のときは適用しない．

② $+(\phi, \phi) \Rightarrow \phi$，$+$(＜変数＞,＜変数＞) $\Rightarrow$ $*(\phi$,＜変数＞)，$*(\phi, \phi) \Rightarrow \phi$，
$/(\phi, \phi) \Rightarrow \phi$

③ $*(\phi$,＜変数＞) $\Rightarrow$ ＜変数＞，/(＜変数＞, ϕ) $\Rightarrow$ ＜変数＞

④ $+(log(f($＜変数＞$)), \phi) \Rightarrow log(f($＜変数＞$))$
⑤ $*(exp(f($＜変数＞$)), \phi) \Rightarrow exp(f($＜変数＞$))$
　} f は任意の関数．

変換1の①，②，③ は，有理式の抽象化に主に用いられる．

[例2.1]　$x^2-3x+2=0$ すなわち *prefix* 形で
　　$=(+(\uparrow(x,2), *(-3,x), 2), 0)$
は，変換①，②，③ により，
　　$=(+(\uparrow(x,2), x, \phi), 0)$
となる．

[例2.2]　$+(log(+(\uparrow(x,2),1)),5)$ は，変換①，④により
　　$log(+(\uparrow(x,2),\phi))$　に変換され，
　　$*(exp(*(3,x)),5)$　は，変換①，⑤ により
　　$exp(*(\phi,x))$　に変換される．

[変換2] レベル2の変換

① $+(\phi$,＜変数＞) $\Rightarrow$ ＜変数＞，

[変換3] レベル3の変換

① $\uparrow(f(x)$,＜定数＞) $\Rightarrow f(x)$
② $*(\phi, log(f(x))) \Rightarrow log(f(x))$
③ $+(\phi, exp(f(x))) \Rightarrow exp(f(x))$

[例2.3]　例2.1の式は，レベル2及びレベル3までの変換によりそれぞれ
　　$=(+(\uparrow(x,2),x),0)$
及び，
　　$=(+(x,x),0)$
となる．

上記のレベル1の変換は，整式の形を保存し，レベル2の変換は，次数を保存し，レベル3の変換は，変数と，4則及びべき乗を除く関数の入れ子構造を保存する．したがって，高レベルの変換まで適用するほど，抽象度の高い表現に変換され，得られる結果によって立てる解方針は，より *global* になる．

<u>2.2 特徴抽出関数</u>　特徴抽出関数は，具体的な数式表現から，指定された部分を見つけ，その部分の特徴値を計算する機能をもつ関数である．初等代数問題を対象とする場合には，次のような特徴抽出関数を用いる．ただし，次の各関数の説明において，$E(\mathbf{x})$ は，変数ベクトル $\mathbf{x}$ を含む論理式，関係あるいは関数表現を表すものとする．

① $q(E(\mathbf{x}))$　：$E(\mathbf{x})$ から $\mathbf{x}$ に関する量記号を取り出す．
② $lop(E(\mathbf{x}))$　：〃　から論理演算子を取り出す．
③ $rel(E(\mathbf{x}))$　：〃　から関係記号を取り出す．
④ $f1(E(\mathbf{x}))$　：〃　から最も外側の関数を取り出す．
⑤ $f2(E(\mathbf{x}))$　：〃　から第2番目に外側の関数を取り出す．
⑥ $f3(E(\mathbf{x}))$　：〃　から第3番目に外側の関数を取り出す．
⑦ $tnum(E(\mathbf{x}))$　：〃　から項の数を取り出す．
⑧ $term(E(\mathbf{x}))$　：〃　から項を取り出す．
⑨ $var(E(\mathbf{x}))$　：〃　から変数を取り出す．
⑩ $deg(E(\mathbf{x}))$　：〃　から次数を取り出す．

ただし，抽出対象が複数個存在する場合，その出現順に"|"で区切ってならべ，"{ }"でくくる．又，出現に入れ子構造がある場合，"{ }"の入れ子構造によって表す．

［例2.4］ $(\exists x)(\exists y)\wedge(=(+(*(3,x),*(2,y)),7),=(+(*(2,x),y),4))$
において，上式を $E(x,y)$ と呼ぶと，

$tnum(E(x,y)) = \{\{2|1\}|\{2|1\}\}$,
$rel(E(x,y)) = \{=|=\}$

<u>3．定理，公式及び問題の特徴表による表現</u>　与えられた問題に現われる式や定理，公式等は，2節で述べた方法により，いくつかの特徴の集合により表される．しかし，一般に，ひとつの一般的な定理や公式は，例化によって，いくつかの派生的な定理や公式を生み，それらの派生的な定理や公式が実際の問題に，パタンマッチだけで適用可能なことが多い．そこで，定理や公式を特徴表によって表す場合に，その代表的な例化も同じ表に入れておくことにより，同一化の手数の減少をはかる．

［例3.1］ 展開公式（分配則）

$$=(*(+(x,y),+(u,v)),+(*(x,u),*(y,u),*(x,v),*(y,v))) \qquad (3)$$

は，代入 $\{u\leftarrow x, y\leftarrow a, v\leftarrow b\}$ により，

$$=(*(+(x,a),+(x,b)),+(\uparrow(x,2),*(a,x),*(b,x),*(a,b)), \\ +(\uparrow(x,2),*(+(a,b),x),*(a,b))) \qquad (4)$$

となる．式(3)では，変数は $\{x,y,u,v\}$ であるが，式(4)では $\{x\}$ である．し

たがって，問題に二次式

$$+(\uparrow(u,2),*(-3,u),2)$$

が現われた場合，この式のレベル1の抽象化

$$+(\uparrow(u,2),u,\phi)$$

は，式(4)のレベル1の抽象化

$$=(*(+(x,\phi),+(x,\phi)),+(\uparrow(x,2),x,\phi))$$

の右辺と一致する。

さて，定理や公式には，量的関係（等号及び大小関係）を一つ含むものと，複数の量的関係の含意形になっているものがある。前者は，関係が等号ならばパラモジュレーションにより，問題に適用され，後者はレゾリューションにより問題に適用される．そこで，定理や公式の表の構造として，量的関係記号を，特徴の第一項目とするものと，含意記号（→又は⇄）を，特徴の第一項目とし，複数の量的関係記号を含むものとの二種類を基本的なものとし，これに，1節の(4)で述べた抽象化された表を加えて，合計三種類の表を考える。以下に，各表の構造と例を示す．

3.1 一個の量的関係をもつ定理・公式の表

この表を，「関係の表」と呼ぶことにする．関係の表の構造は，表1に示すように，プライマリキーとしての通し番号を左端の項目とし，次に「関係」項目，その次に関係の左辺に関する項目，その右に関係の右辺に関する項目，そして右端に，対応する定理又は公式へのポインタを入れる。項目「形1」はレベル1の抽象化によって得られる式の形を表す．また，「項数」は，レベル1の変換の後の項数を表す．

関係の表

番号	関係	変数	次数	項数	f1	形1	変数	次数	項数	f1	形1	式
①	=	$\{x,y,z\}$	2	1	*	ⓐ	$\{x,y,z\}$	2	2	+	ⓑ	1
②	=	$\{x\}$	2	1	*	ⓒ	$\{x\}$	2	3	+	ⓓ	2
③	=	$\{x\}$	2	3	+	ⓔ	$\{x\}$	2	2	+	ⓕ	3
④	=	$\{x,y,u,v\}$		2	+	ⓖ	$\{x,y,u,v\}$		1	/	ⓗ	4
⑤	≧	$\{x_i \mid i=1..n\}$	2	n	+	ⓘ	ϕ	0	1	0	ⓙ	5
⑥	=	$\{x\}$	n	$n+1$	+	ⓚ	$\{x\}$	n	$n-m$	+	ⓛ	6

1、$=(*(x,+(y,z)),+(*(x,y),*(x,z)))$

2、$=(*(a,+(x,b),+(x,c)),+(*(a,\uparrow(x,2)),*(a,+(b,c),x),*(a,b,c)))$

3、$\rightarrow(\fallingdotseq(a,0),=(+(*(a,\uparrow(x,2),*(b,x),c),+(*(a,\uparrow(+(x,/(b,2)),2)),c,-/(\uparrow(b,2),$
$*(4,a))))$

4、$=(+(/(u,x),/(v,y)),/(+(*(u,y),*(v,x)),*(x,y)))$

5、$\rightarrow(\wedge(\in(x_i,R)\mid i=1..n),\ \geqq(\Sigma(\uparrow(x_i,2)\mid i=1..n),0)$

6、$=(\Sigma(*(a_i,\uparrow(x,i))\mid i=n..0),+(*(\Sigma(*(b_i,\uparrow(x,i))\mid i=m..0),\Sigma(*(c_i,\uparrow(x,i))\mid$
$i=n-m..0)),\Sigma(*(d_i,\uparrow(x,i))\mid i=m-1..0)))$ $\quad(\wedge(\fallingdotseq(a_n,0),\fallingdotseq(b_m,0),\fallingdotseq(c_{n-m},0)))$

表1．関係の表

ⓐ $*(x,+(y,z))$, ⓑ $+(*(x,y),*(x,z))$, ⓒ $*(+(x,\phi),+(x,\phi))$
ⓓ $+(\uparrow(x,2),x,\phi)$, ⓔ $+(\uparrow(x,2),x,\phi)$, ⓕ $+(\uparrow(+(x,\phi),2),\phi)$
ⓖ $+(/(u,x),/(v,y))$, ⓗ $/(+(*(u,y),*(v,x)),*(x,y))$, ⓘ $\Sigma(\uparrow(x_i,2)|i=1..n)$
ⓚ $\Sigma(\uparrow(x,i)|i=n..0)$, ⓛ $+(*(\Sigma(\uparrow(x,i)|i=m..0),\Sigma(\uparrow(x,i)|i=n-m..0)),$
$\Sigma(\uparrow(x,i)|i=m-1..0))$

表 1. 関係の表（続き）

3.2 複数の量的関係を含む含意形の定理・公式の表　この表を，「含意の表」と呼ぶことにする．含意の表の構造は，表2に示すように，プライマリキーとしての通し番号を左端の項目とし，次に「含意」項目，次に含意の左辺に関する項目，その次に含意の右辺に関する項目を列挙し，右端に，対応する定理又は公式へのポインタを入れる．項目「形2」は，レベル2の変換によって得られる式の形を表し，形1は，表1と同じ意味である．

含意の表

番号	含意	関係	次数	左辺変数	右辺変数	形1	形2	関係	次数	左辺変数	右辺変数	形1	形2	式
⑦	$\rightarrow$	$\{\geq\|\geq\}$	1	$\{x\|y\}$	0	a1	a2	$\geq$	1	$\{x,y\}$	0	b1	b2	7
⑧	$\rightleftarrows$	$=$	2	$\{x,y\}$	0	c1	c2	$\{=\|=\}$	1	$\{x\|y\}$	0	d1	d2	8
⑨	$\rightleftarrows$	$\geqq$	1	$\{x,y\}$	$\{z\}$	e1	e2	$\geqq$	1	$\{x\}$	$\{z,y\}$	f1	f2	9
⑩	$\rightleftarrows$	$=$	2	$\{x\}$	0	g1	g2	$\{=\|=\}$	1	$\{x\|x\}$	$\{\phi\|\phi\}$	h1	h2	10
⑪	$\rightleftarrows$	$=$	1	$\{x\}$	0	i1	i2	$=$	1	$\{x\}$	ϕ	j1	j2	11
⑫	$\rightleftarrows$	$\{=\|P\}$	ϕ	$\{y\|x\}$	$\{x\|y\}$	k1	k2	$\{=\|P\}$	ϕ	$\{y\|x\}$	$\{x\|x\}$	l1	l2	12
⑬	$\rightleftarrows$	$\{=\|=\}$	$\{1\|\phi\}$	$\{x\|y\}$	$\{\phi\|x\}$	m1	m2	$\{=\|=\}$	$\{1\|1\}$	$\{x\|y\}$	$\{\phi\|\phi\}$	n1	n2	13
⑭	$\rightleftarrows$	$=$	2	$\{x,y\}$	$\{z\}$	o1	o2	$=$	ϕ	$\{x\}$	$\{z,y\}$	p1	p2	14
⑮	$\rightleftarrows$	$=$	ϕ	$\{x\}$	$\{x\}$	q1	q2	$=$	0	ϕ	0	r1	r2	15
⑯	$\rightleftarrows$	$=$	ϕ	$\{x\}$	$\{x\}$	s1	s2	$=$	0	ϕ	ϕ	t1	t2	16

7. $\rightarrow(\wedge(\geq(x,0),\geq(y,0)),\geq(+(x,y),0))$
8. $\rightleftarrows(=(*(x,y),0),\vee(=(x,0),=(y,0))$
9. $\rightleftarrows(\geqq(+(x,y),z),\geqq(x,+(z,-y)))$
10. $\rightleftarrows(\wedge(=(+(*(a,\uparrow(x,2)),*(b,x),c),0),\neq(a,0)),$
$\vee(=(x,/(+(-b,-\sqrt{+(\uparrow(b,2),-(*(4,a,c)))}),*(2,a))),$
$=(x,/(+(-b,\sqrt{+(\uparrow(b,2),-(*(4,a,c)))}),*(2,a)))))$
11. $\rightleftarrows(\wedge(=(+(*(a,x),b),0),\neq(a,0)),=(x,/(-b,a)))$
12. $\rightleftarrows(\wedge(=(y,f(x)),P(x,y)),\wedge(=(y,f(x)),P(x,f(x))))$
13. $\rightleftarrows(\wedge(=(x,a),=(y,f(x))),\wedge(=(x,a),=(y,f(a))))$
14. $\rightleftarrows(\wedge(\neq(y,0),=(*(x,y),z)),=(x,/(z,y)))$
15. $\rightleftarrows(=(f(x),*(+(x,-a),g(x))),=(f(a),0))$
16. $\rightleftarrows(=(f(x),+(*(+(x,-a),g(x)),r)),=(f(a),r))$

表 2．含意の表

g1 $=(+(\uparrow(x,2),x,\phi),0)$, g2 $=(+(\uparrow(x,2),x),0)$, h1 $\vee(=(x,\phi),=(x,\phi))$
h2 $\vee(=(x,\phi),=(x,\phi))$, i1 $=(+(x,\phi),0)$, i2 $=(x,0)$, j1 $=(x,\phi)$, j2 $=(x,\phi)$
s1 $=(f(x),+(*(+(x,\phi),g(x)),\phi))$, s2 $=(f(x),*(x,g(x)))$, t1 $=(\phi,\phi)$,
t2 $=(\phi,\phi)$

表2、含意の表（続き）

上記含意の表において，形1，形2の実際の式で，変換前の具体形とほとんど変らないものは省略している。

<u>3.3　抽象化表</u>　この表は，特徴集合のある部分集合，あるいは3.1節で述べた抽象化変換形を共通にもつ；式の集合について，ある定理又は公式が存在して，その定理又は公式の適用結果が又特徴集合の一定の部分集合又は一つの抽象化変換形を共通にもつときに作成される．従って，抽象化表は，定理や公式の，特定の目的から見た機能を表すものと考えられる。特に，有効な解方針が知られている形の問題に対して，この表を作成しておくことにより，関係の表や，含意の表を直接探索するより能率よく解経路を得ることができる．以下に代表的な，特徴の部分集合又は抽象的特徴形と，それに付けられる抽象的特徴項目名及び特徴値と，その項目名にもとづく抽象化表の例を示す。特徴の部分集合とそれに付された抽象的特徴項目名と値は，

（〈特徴項目〉:=〈特徴値〉，····，〈特徴項目〉:=〈特徴値〉）
　　⇒（〈抽象的特徴項目〉:=〈特徴値〉）

の形で示す．又，レベル1の変換によって得られる抽象形とそれに付された特徴項目名と値は，

（〈抽象形〉）⇒（〈特徴項目〉:=〈特徴値〉）

の形で示す。

(1) （変数:={x}，関係:="="，量記号:=($\exists ? x$)）⇒（問題形:=方程式）
(2) （変数:={$x_i \mid i=1..n$}，論理演算子:="$\wedge$"，問題形:=方程式）
　　⇒（問題形:=連立方程式）
(3) （変数:={x}，関係:="="，量記号:=($\forall x$)）⇒（問題形:=恒等式）
(4) $(=(x,\phi))$ ⇒（式形:=解形）
(5) $(\wedge(=(x_i,\phi) \mid i=1..n))$ ⇒（式形:=連立解形
(6) $(=(f(x),g(y)))$ ⇒式形:=一般形（ただし，f，gは恒等関数でない）
(7) $(\wedge(e_i \mid i=1..n))$ ⇒式形:=一般連立形
(8) $(=(x,f(y)))$ ⇒式形:=準解形
(9) $(\wedge(\wedge(e_i \mid i=1..n),=(x,f(y))))$ ⇒式形:=連立準解形
(10) $(\wedge(\wedge(e_i \mid i=1..n),=(x,\phi)))$ ⇒式形:=連立部分解形
(11) $(\prod(+(*(\phi_i,\uparrow(x,2)),*(\phi_i,x),\phi_i) \mid i=1..m)$ ⇒式形:=基本積形
(12) $(=(f(x),0))$ ⇒式形:=左辺形

これらの抽象的特徴を用いて，抽象化表は表3のように構成される．

抽象化表

番号	問題形	次数	式形	問題形	次数	式形	下位表
⑰	方程式	1	一般形	方程式	1	解形	⑨⑪
⑱	連立方程式	1	一般連立形	連立方程式	1	連立準解形	⑨,⑭
⑲	連立方程式	1	連立準解形	連立方程式	1	連立部分解形	⑫,⑨,⑪
⑳	連立方程式	1	連立部分解形	連立方程式	1	連立解形	⑬
㉑	方程式	n	一般形	方程式	n	基本積形	
㉒	方程式	n	基本積形	方程式	1	解形	
㉓	連立方程式	2	同次形	連立方程式	2	連立準解形	
㉔	恒等式	n	一般形	恒等式	n	左辺形	
㉕	絶対不等式	n	一般形	絶対不等式	n	左辺形	
㉖	絶対不等式	n	左辺形	絶対不等式	n	正和形	

表3、抽象化表.

4. 解径路の探索　　3節で述べた表を用いて，解径路を探索する手順について述べる．解径路の探索の方針は，抽象レベルで目標までの径路を先に求めておき，後にそれを具体的に実行して確かめる方針とする．

［手順4.1］解径路の探索.

(1) 現時点の問題の抽象化と特徴抽出を行なう．

(2) (1)で得られた抽象形及び特徴から，3.3節で述べた変換規則により，抽象的特徴を得，これを用いて抽象化表を引き，global な解径路をみつける．見つかれば(4)へ，そうでなければ(3)へ行く．

(3) (1)で得られた抽象形及び特徴から，関係の表及び含意の表を引き解径路をみつける．なければ解径路発見に失敗し終る．

(4) 解径路の初期状態を始点，目標状態を終点，各中間状態を中間節点とし，状態間の推移関係を矢線とする有向グラフを作る．

(5) (4)で得た有向グラフにおいて，最少ステップ数の解径路を選び，始点から順に，各推移の対応定理，公式を適用する。解径路が global な場合，各推移を抽象化表の指示に従って分解した後，対応定理，公式を適用する．適用できれば(7)へ，そうでなければ(6)へ行く．

(6) 定理，公式が適用できない推移の矢線を消す．もし，この消去により，出線のない中間節点が生じたら，この節点への入線を消去することを繰返し，始点からの出線がなくなれば，解の構成に失敗して終る．そうでなければ，(5)へ行く．

(7) 終点まで，対応定理，公式が適用できれば解を出力する．

上記の手順により，解径路をみつける例と，global な解径路をみつける例を次に示す．

[例 4.1] 不等式 $x^2-2(k+1)x+2k^2-2k+5 \geqq 0$ の証明．問題の表現は，

$$(\to(\land(\in(x,R),\in(k,R)),\geqq(+(\uparrow(x,2),\ast(-2,+(k,1),x),\ast(2,\uparrow(k,2)),\ast(-2,k),5),0)\|\top)$$

である．量的関係は不等式の部分であり，これについて，関係の表に対応する抽象化及び特徴抽出を行なうと，x を変数，k を定数と見た場合，x を定数，k を変数と見た場合，両方共変数と見た場合の三つの場合が存在する．それぞれの結果は

(i) 形1：$+(\uparrow(x,2),x,\phi)$，関係：$\geqq$，変数：$\{x\}$，次数：2，項数：3，f1：+

(ii) 形1：$+(\ast(\phi,+(k,\phi)),\uparrow(k,2),k,\phi)$，関係：$\geqq$，変数：$\{k\}$，次数：2，項数：4，f1：+

(iii) 形1：$+(\uparrow(x,2),\ast(+(k,\phi),x),\uparrow(k,2),k,\phi)$，関係：$\geqq$，変数：$\{x,k\}$，次数：2，項数：5，f1：+

となる．これらの中で，特徴項目の match の最も多いものは (i) の場合と，関係の表の行③である．従って最初に得られる解径路は関係の表の行③から始まるものとなる．関係の表より，解径路は，③の適用，⑤の適用の順になる．証明問題の場合，状態の形が定理又は公式と同じ形になれば解径路の完成と見るので，⑤の適用で解径路は完成である．

実際に，表に指定された定理を適用すると，③の定理 3 により，

$$\geqq(+(\uparrow(+(x,-k,-1),2),\uparrow(k,2),\ast(-4,k),4),0)$$

となり，定理 5 との比較により，差の部分

$$+(\uparrow(k,2),\ast(-4,k),4)$$

をさらに定理 3 により変形して，

$$\geqq(+(\uparrow(+(x,-k,-1),2),\uparrow(+(k,-2),2),0)$$

を得る．これは，定理 5 と match し，証明完了となる．

[例 4.2] 連立方程式 $2x+y=7 \land 3x-y=3$ の解．問題表現は，

$$((\exists ?x)(\exists ?y)\land(=(+(\ast(2,x),y),7),=(+(\ast(3,x),-y),3))$$
$$\|(\exists ?x)(\exists ?y)\land(=(x,\phi),=(y,\phi)))$$

である．この場合，特徴抽出と抽象化により，

(変数 := $\{x,y\}$，関係 := "="，論理演算子 := "$\land$"，問題形 := 方程式)

が得られ，これと 3.3 節に述べた変換規則 (2) により (問題形 := 連立方程式) を得る．これと「次数 = 1」から抽象化表により，解径路，⑱，⑲，⑳を得る．この径路の指示する，含意の表の対応定理の適用により解径路を展開すると，9, 14, 12, 9, 11, 13 の各定理の適用となる．これから，

$\land(=(\ast(2,x),+(7,-y)),=(+(\ast(3,x),-y),3))$ (9により)

$\land(=(x,/(+(7,-y),2)),=(+(\ast(3,x),-y),3))$ (14により)

$\land(=(x,/(+(7,-y),2)),=(+(\ast(3,/(+(7,-y),2)),-y),3))$ (12により)

$\land(=(x,/(+(7,-y),2)),=(\ast(/(-5,2),y),/(-15,2)))$ (9により)

$\land(=(x,/(+(7,-y),2)),=(y,3))$ (11により)

$\land(=(x,2),=(y,3))$ (13により)

となる．

5. あとがき

問題及び定理の抽象化法を取り入れ，さらにこれに関係データベースに階層を導入した表を用いて定理の探索を行うことにより解径路を求める手法を提案した．本手法により，問題の解径路を比較的容易に求めることができると考えられる．本手法を用いた問題解決システムを現在作成中である．

今後の問題として，一般の問題分野についての特徴の選択と，本文で述べた三種の表以外のタイプの表の利用の検討の問題がある．

6. 文献

[1] Sacerdoti, E.D., "Planning in a Hierarchy of Abstraction Spaces", Artif. Intell. 5-1 (1974) 115-135

[2] Nishida, F. and Fujita, Y., "A Hierarchical and Heuristic Problem-solving in Elementary Algebra", In Proc. UJCC-78. UJCC Commitee, San Fransisco, California, October, 1978, pp. 99-103.

[3] Nishida, F., Fujita, Y. and Kusaka, H., "Probrem Solving of Elementary Algebra by Hierarchical Abstraction", In Proc. IJCAI-79., August, 1979, pp. 659-661