

解説

初等幾何 CAI システム—GEOMEX—†



岡本 敏雄††

1. はじめに

教授・学習過程においていわゆる理想解というものが一意に定まらないような学習世界における知的 CAI を構成することがねらいとされる。そこで初等幾何の合同証明の学習世界が選定されたわけである。この世界がもつ教授・学習形態を計算機のなかでいかに実現していくかが重要なテーマとなる。

この世界の特徴は与えられた幾何図形の構造の認識と仮定から結論を導く証明の筋道が学習者によって多様であるため、誘導的な (guided) 学習支援形態は適さない。学習者の自由な発想を認め、そのプランニングをシステムが認識し、それを前提にした診断・支援の方法がモデル化できなければならない。

幾何証明を扱った研究としては、J.R. Anderson ら (1981, 1984, 1985) がすでに GEOMETRY TUTOR というシステムを開発している^{1)~3)}。そこでは幾何証明に対する問題空間の表現形式やその知識を利用した解決のためのメタ知識の抽出という認知科学的研究を行っている。学習者モデルは、基本的にバギーモデルを想定し、そのルールに照合するような誤りを犯した場合、それを理想規則に基づいて矯正するという方法がとられている。また、混乱状態にある学習者の質問に対処する機能として、IBR (Ideal and Buggy Rules) の競合集合のなかで最も価値の高い規則を提示するという戦略を用いている。本システムでは、証明計画の認識において前提集合と目標 (結論) との間のつながりを推論し、つながりを発見できない場合は類似の部分木を同定し、混乱状態に対して補完的知識を与えて、それを解消させていくという戦略をとっている。

2. 研究の目的

幾何学習の世界において、学習者の自由な証明方法を許容し、それに応じた助言を提供できるシステムを構築することが目的とされている。その際、学習者の非論理的な証明過程を診断し、適切な時点で確認・矯正 (教授) ができる機能を実現することが主要なねらいとされている。

3. システムの構成

本システムの基本的な構成を図-1 に示す⁴⁾。幾何証明のような学習世界を CAI のなかに表現するためには、おおよそ次の5つの知識ベースが必要とされる。

(1) 教材構造知識ベース

基本的には、AND/OR 木の構造をもつ。それは、当該の幾何図形に依存した、証明可能なすべての論理を表現した知識ベースである。これは、学習者モデルを構成するテンプレートとなる。

(2) 課題の構造表現に関する知識ベース

幾何学定理の証明を行うときに、図形の中にある情報を活用することがある。したがって、システム内部に課題の構造を表現することが要求されるが、ここではそれらは、幾何学図形を表現するための図形要素知識と呼ばれている。

(3) 解法エキスパート知識ベース

システムが、与えられた仮定から結論を導くためのメタ知識 (図形要素知識の適用の仕方に関する知識) である。混乱状態にあると診断された学習者に対して、この知識ベースによって、正しい証明過程へと導くような機能をもつ。本システムではこれは、解法エキスパート知識と呼ばれている。解法エキスパート知識は、IF-THEN 形式のプロダクション規則として表現されている。

(4) 対話手続き知識ベース

学習者とコンピュータが行う会話を展開し、教授戦略を決定するための規則が記述されている。対話規則

† The Intelligent CAI System of Basic Geometry Proving —GEOMEX— by Toshio OKAMOTO (Dept. of Information Science of Education, Faculty of Education, Tokyo Gakuai University).

†† 東京学芸大学教育学部教育情報科学教室

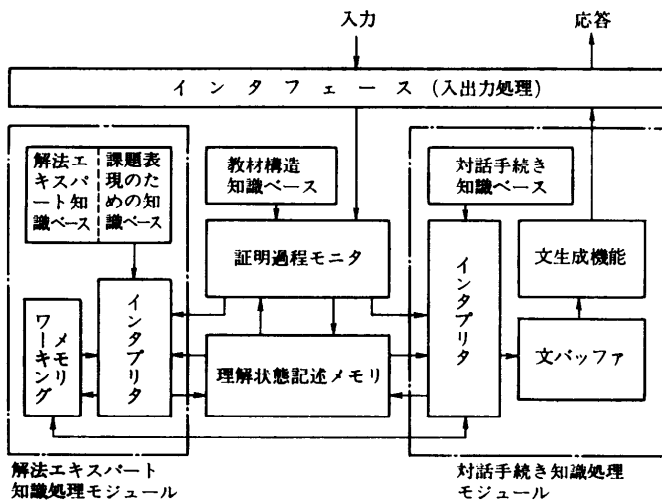


図-1 システムの構成図

は大きく、マクロ、ミクロに分けて管理されている。これらの規則は、学習者の理解状態と教材構造知識ベースの差異をもとに解釈実行される。また対話手続き知識ベースのなかには、学習者が混乱状態にあると推論された場合に起動する証明計画支援規則が組み込まれている。

(5) 診断文生成のための知識ベース

より自然で、柔軟性のある対話文を生成するための知識である。対話手続き規則によって診断内容が推論され、それをキーにした（主語や、目的語として）適切な文を生成するための知識である。

次にこれらの知識を処理するエンジンの概要を示す。

(1) 証明過程監視機能

学習者の自由な記述が目標から逸脱していないかを監視し必要に応じて学習者に適宜助言を与えるために、教材構造知識ベースを参照することにより、逐次学習者の証明を監視し、学習者の理解状態に関する情報を生成する。

(2) 対話手続き知識処理機能

対話手続き知識をルールベースとし、学習者の理解状態をワーキングメモリとしたプロダクション・システムである。この機能により、診断文生成のためのキーがバッファに蓄えられ、それらを文章として出力するというメカニズムをもつ。

(3) 解法エキスパート機能

学習者が、証明をすることができない場合には、すでに証明されているステートメントをキーにし、その

計画過程を重視しながら正しい証明を提示することにより、そこで用いられている戦略的知識を習得させることを試みる。GEOMEXでは、対象世界を三角形の合同に関する幾何学定理に限定し、それらを証明するために必要な問題解決知識がプロダクション規則として表現されている。

(4) 入出力インターフェース

ファンクション・キーを利用した自然言語ふうのインターフェースが工夫されている。その特徴は①証明を記述する際に必要な記号（ $\equiv$, $\angle$, $\triangle$ etc），および基本的なキーワード（より，したがって etc）がファンクションキーに登録されている。②学習者のタイプ・

ミスは、入力インターフェースがチェックし、即座に誤りの箇所を指摘する。入力インターフェースに、そのようなスペル・チェックの機能をもたせることにより、本質的でない誤りによるシステムの誤動作を防ぐことが可能になる。システムは、キーワードを基に学習者の入力を文節単位に分割し、内部表現に変換する。出力インターフェースに関しては、学習者の記述した証明、システムからの応答、問題文の出力に対して、画面の分割、重ね合わせを行い、必要に応じて重なりの下にある画面を前面に引き出すマルチウィンドを利用している。

4. 幾何図形の知識表現形式

4.1 幾何図形を表現するための図形要素知識

幾何学定理を証明する過程において、与えられた問題の幾何学的な構造における情報を活用することが重要となる。たとえば、仮定には明言されていないが、二つの角、 $\angle\alpha$ と $\angle\beta$ が対頂角であり、ゆえに $\angle\alpha = \angle\beta$ であるという情報が、図形から得られるという場合である。そのために、システム内部に図形を要素知識の構造体として表現する方法が必要となるが、それをJ. G. Greeno (1978) の用いた手法⁵⁾を応用し、意味ネットワークとして表現した。図-2 にその一部を示す。

ネットワークの中で、各ノードは、点、線分、半直線などの幾何学的対象（図形要素知識）を表し、リンクは、それらの間の関係を表している。使用する意味ネットワークのリンク名とその意味が表-1に示さ

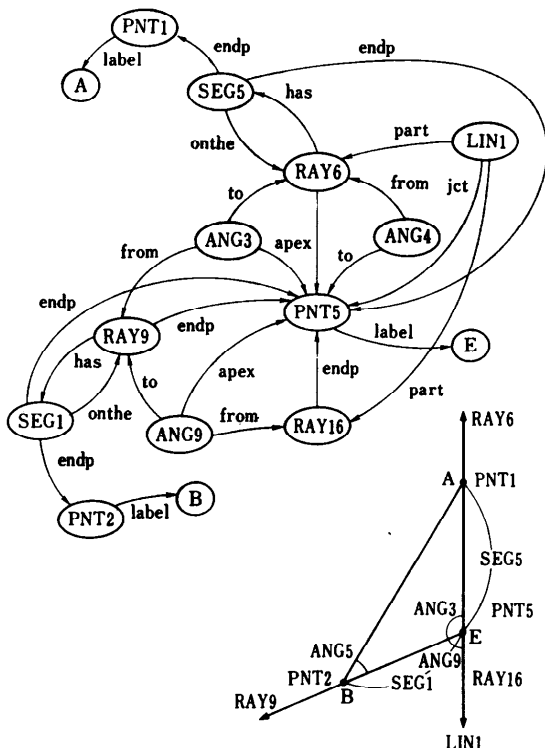


図-2 幾何学図形を表す意味ネットワーク

れる。

個々の図形要素知識は、図-3 の左側に示されるように、いくつかの決まった数のリンクにより、他の幾何学的対象（図形要素知識）に関連づけられる。この図形要素知識で用いられている各リンクの幾何学的意味を図-3 の右側に示す。たとえば図-3(a) から、対象 ANG_{xx} は半直線 RAY_{zz} から半直線 RAY_{yy} に向かう角であり、その頂点が PNT_{pp} であることを意味している。

この図形要素知識を用いることにより、さまざまな幾何学図形を表現することが可能であり、それは汎用性の高い知識表現形式であるといえる。

4.2 幾何学定理の表現

次に、システム内部に幾何学定理を表現する方法について説明する。

本システムでは、定理も意味ネットワークを利用して表現される。たとえば、『対頂角であれば、大きさが等しい』という定理は、図-4 のように表現される。ここで、「二つの概念 CON 2 と CON 3 が、対頂角 (VERT) という関係にある (state) ならば、それらの

表-1 意味ネットワーク中のリンク名の意味

リンク名	リンク名の表す意味
isa	対象の特定化
label	幾何図形の頂点に対するラベル（記号）
endp	線分・半直線の端点
apex	角の頂点
from	角の始めの辺
to	角の終りの辺
onthe	線分上の半直線
has	半直線上の線分
jct	直線上の点
part	直線を構成する半直線
obj	定理の対象となっている幾何図形
state	定理の対象となっている幾何図形の状態
code	定理の対象となっている幾何図形のコード

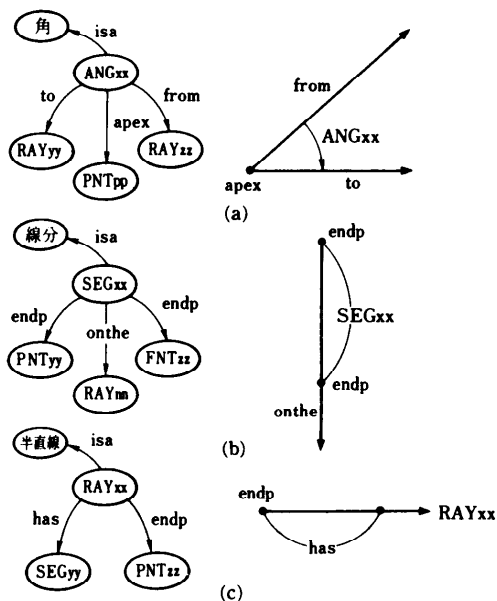


図-3 幾何学図形を表現するための図形要素知識

概念は、等しい (EQUAL) という関係でもある」ということを表している。さらに、概念 CON 2 の対象物 (obj) が $ANG 1$ であり、課題図の中では、 $\angle AOB$ と表現されている (code) ことが分かる。

システムがこのような知識を利用して、実際に証明を行うときには、たとえば二つの図形要素知識 $ANG 0 1$ と、 $ANG 0 2$ が等しいことが立証された場合、システムは、それらに obj リンクを結合させ、EQUAL という値をもつノードに state リンクで結合させた概念をワーキングメモリ（後述する *CONCEPT-WM*）内に生成するという動作を示す。このように問題図を

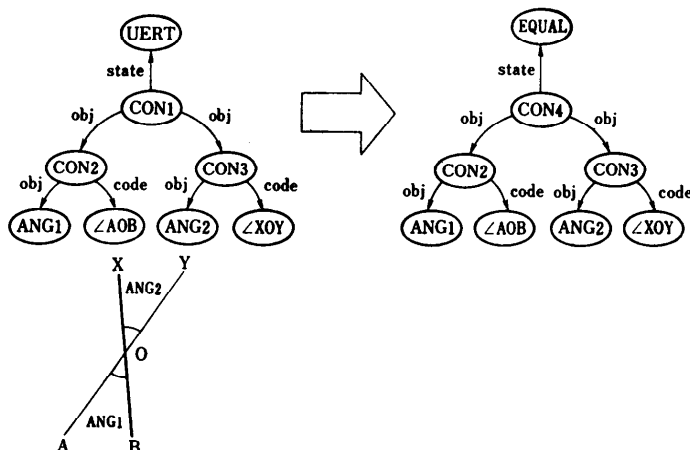


図-4 幾何学定理の表現

[問題 1]

直線 AE 上の点 E から、長さの等しい
2つの線分 EB と EC を
 $\angle AEB = \angle AEC$
になるように引きます。
線分 BC と直線 AE との交点を D とすれば、
 $\angle ABD = \angle ACD$
になることを証明しなさい。

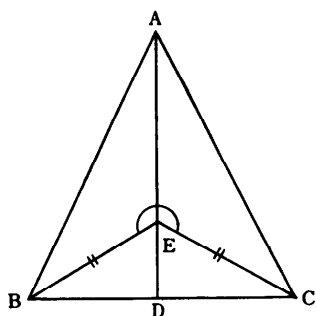


図-5 例題

表現している意味ネットワークに情報を追加しながら証明を進める。

4.3 教材構造知識の表現形式

与えられた幾何図形において、前提から証明目標にいたるすべての経路を AND/OR 木で表現したものである。たとえば図-5 のような幾何図形の例題は、図-6 のような形式ですべての正しい証明の経路を表現することができる。また、それは学習者モデルのテンプレートとなるものであり、本システム内においては、きわめて重要な役割を果たしている。

図中の太線のリンクは上位のノードが下位のノードから導き出されるということを示す。上位のノードを

導き出すためにとられる戦略を表していると考えられることもできる。図において点線で囲まれたノードは仮定を、太線で囲まれたノードは、仮定には明示されていないが、図から得られる情報をおのの表している。

本システムでは、上記知識ベースを LISP による連想リストとして表現している。

各ノードには、次のような属性が付けられている。

IS: そのノードの内容

SUB: 下位目標

AKO: そのノードの属するカテゴリ

EQ: 内容と同値なもの

REASON: そのノードから上位のノードが成立する理由

上記属性のなかで、EQ 属性にはたとえば、

$\angle EDB = \angle EDC$

と

$\angle ADB = \angle ADC$

は同じ角を表すというような、図形から得られる同値関係に関する情報が与えてある。

現在、このような教材構造知識を前述の図形要素知識とメタ知識から解法エキスパートによって自動生成する方法が検討されている⁶⁾。

5. 証明過程の認識と個別指導の方法

5.1 証明過程の認識方法

学習者の証明が正しい道筋を辿っているか否かを理解するためには、その学習者がいかなる戦略をもって問題を解決しようとしているのかを把握する必要がある。それは、本システムでは教材構造知識ベース上において、学習者がどのルートを通して幾何の証明を進めているかを推論することにより知ることができる。

そのために通常、モニタは、学習者の入力したものが、教材構造知識ベース内のどのノードにあたるかを調べ、すでに記述されているものとの位置関係から、学習者が何を証明しようとしているのかを部分木の同定によって推論する。

部分木が一つに同定できないときには、疑わしい部分木をリストにして、理解状態記述メモリに格納す

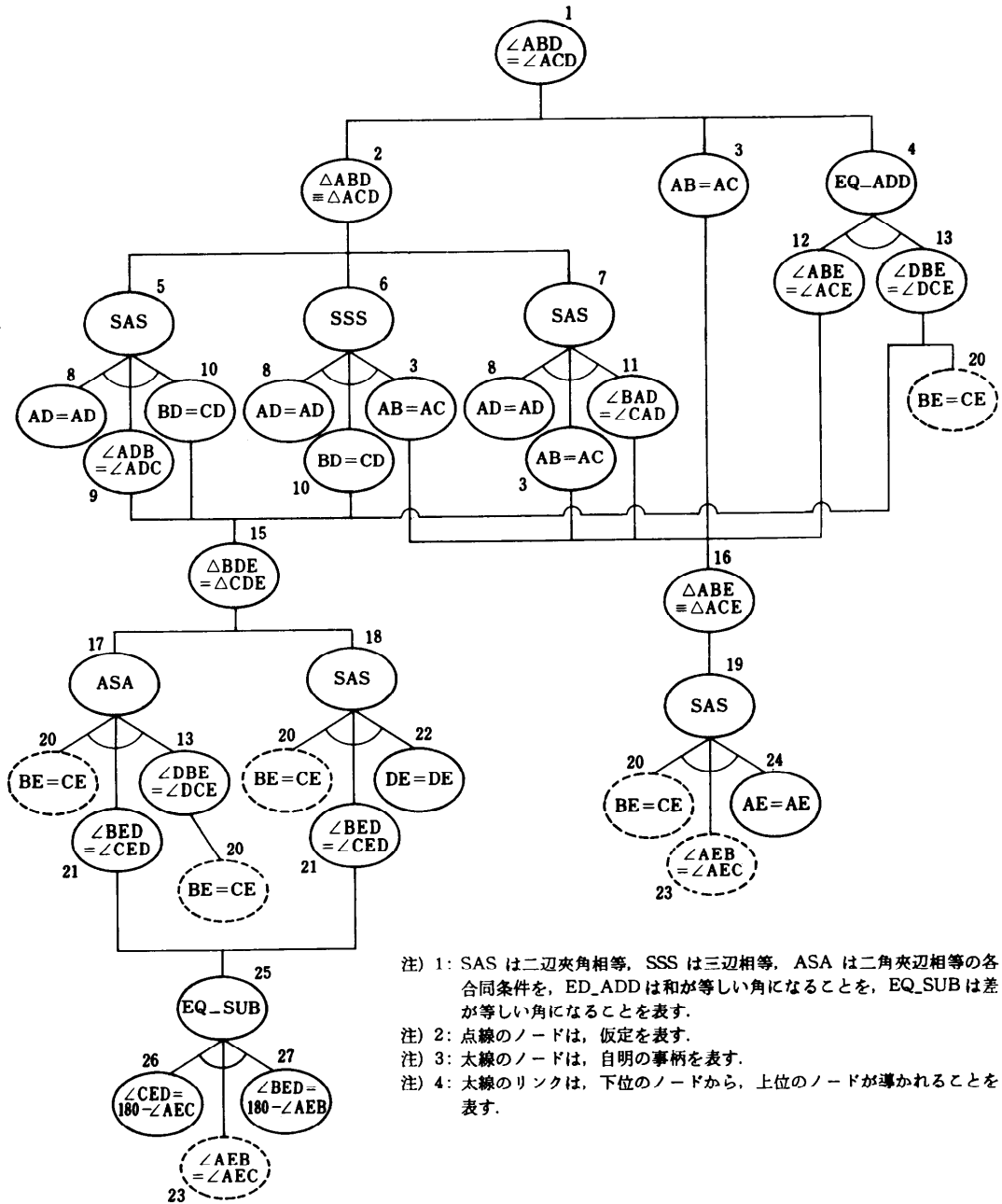


図-6 教材構造知識ベース

る。また二つ以上の異なる部分木にまたがったときには、それらの疑わしい部分木のリストを APPEND して格納する。

対話手続き知識処理機能は、個別指導戦略を決定する際に、学習者の理解状態を記述したワーキング・メ

モリの状態を参照する。

この理解状態記述メモリは、以下に示す変数によって表現される。

ANS: 学習者の入力したものに該当するノード

PROVED: すでに記述済みのノード

SHAM-LIST: 疑わしい部分木のリスト。先に述べたものはここに格納される。

5.2 学習者モデルと個別指導の方法

本システムにおいては、理解状態記述メモリが、学習者モデルに相応する。そして対話手続き規則によって、理解状態記述メモリと教材構造知識ベースとの質的な差異を認識することにより、教授戦略が決定される。また教材構造知識からはみ出た主張に対しては解法エキスパートにより証明の可能性が検証される。それをガイドする知識が証明計画支援知識である。

6. 対話方法と推論のメカニズム

前述の対話手続き知識処理は、基本的にプロダクション・システム（以下 PS という）の形式をしている。通常の PS はワーキング・メモリにアクセスしながら、推論がシステム内部で進められるが、本システムの対話処理は、学習者の理解状態記述メモリを参照変更しながら推論を行うサイクルのなかで、適宜学習者に質問を行い、学習者の解答を基に、さらに推論を進めるという動きをする。

すなわち、システム内部でのみ行われる通常の PS における推論サイクルと、推論サイクルの中に学習者からの応答を含むものとの、二つの推論系が統合されている。

さらに、学習者の記述の妥当性を診断するためのいくつかの手続き関数が存在する。図-7 にそれらの

関 数	機 能
SUBP	B-C が直接連結するか
INDUCEP	B-C が間接的に連結するか
SUB-EXISTP	下位目標が存在するか
PROVEDP	下位目標を証明済みか
SCATTERP	根拠が同一の部分木に属するか

(B-C: 根拠—結論)

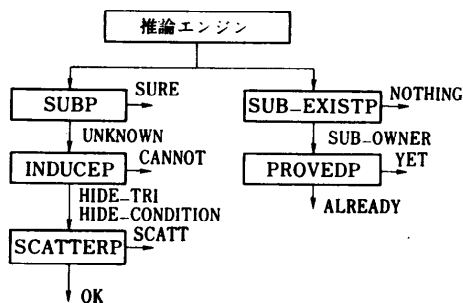


図-7 対話プロセス内で機能する関数

続けてください

→ 1 2 3 より $\angle ABD = \angle ACD$

(TP 01)

(DR 02)

SUBP

根拠 (*G08* *G10* *G09*)

結論 *G01*

つながりを調べています。

UNKNOWN

(DR 04)

INDUCEP

根拠 (*G08* *G10* *G09*)

結論 *G01*

つながりを調べています。

HIDE_TRI

(DR 13)

(CR 04)

(CR 06)

(CR 11)

次のうちのどれが言えますか? ($\triangle ABD \equiv \triangle ACD$)

: * $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

(CR 17)

(CR 01)

(CR 14)

INDUCEP

根拠 (*G08* *G10* *G09*)

結論 *G02*

つながりを調べています。

HIDE_CONDITION

(CR 22)

(CR 25)

(CR 31)

よろしい。ところで、何という合同条件を使いましたか?

: * 二辺夾角

(CR 26)

(CR 39)

(RR 01)

SUB-EXISTP

根拠 (*G08* *G10* *G09*)

下位目標の存在を調べています。

SUB_OWNER

(RR 08)

PROVEDP

対象 == (*G10* *G09*)

PROVEDP == (*G09* *G10* *G08*)

(RR 09)

(SR 01)

($BD=CD$) ($\angle ADB=\angle ADC$) は仮定にないことです。仮定にないことを根拠にするときには、まずそれを証明しなければなりません。($BC=CD$) ($\angle ADB=\angle ADC$) であることを証明してください。

続けましょう。

→

図-8 対話例

一覧および個々の関数の関連を示す。それらの関数はたとえば、学習者の記述した根拠と結論が教材構造知識ベース内においてつながりうるか否かを探索する、あるいは学習者の記述した根拠に下位目標が存在するか否かを探索する。システムはこれらの関数を用いてシステム内部での推論を行い、その結果で判断しきれない箇所を学習者に質問し、その応答を基に推論を続けるわけである。

このようにして、上位の推論サイクルのなかに学習者が含まれることになる。図-8 に対話例と内部の推論プロセスを示すが、すべての関数の引数は学習者の記述した根拠および結論の、教材構造知識ベース内のノード番号である。たとえば、学習者の記述が『 $AB=AC$ より $\angle ABD=\angle ACD$ 』である場合、根拠は *GO3*, 結論は *GO1* である。

ところで、対話手続き知識は IF-THEN 形式の規則の集合である。証明の全体的な流れを指導するためのマクロレベルでの規則と、合同条件の適応の仕方など、個々の戦略的技能などを教授するためのミクロレベルでの規則、および教材構造知識からはみ出た主張に対応する証明計画支援規則からなることはすでに述べた。これらについて少し説明する。

まずミクロレベルでの規則は、検索の効率をはかるために、クラス化して記述されている。それらは具体的には、『(学習者が) 結論を提示した』、『合同条件を提示した』、『下位目標を証明させる』、『よりくわしく記述させる』といったクラスであり、現時点においては、7つのクラスがある。おのおののクラスには、独立に複数個の規則が与えられている。しかしながら、状況に応じてインタプリタの処理対象を他のクラスに変える分散協調的な規則も存在する。たとえば、学習者が途中の証明を省略して、ある結論を示した場合には、結論提示のクラスにおける規則が先に起動するが、後により詳しく記述させるクラスにおける規則を発火する。このような機能により、より密な指導を効率的に行うことができるとともに、ミクロなレベルにおける教授戦略の変更が容易になる。

複数存在する異なったクラスにおける規則の、どれを最初に適用するかを決定するための規則を、トップレベルの規則と呼んでいる。トップレベルの規則は、学習者の入力がどのクラスに対応するかを判断し、その結果に基づき、後続する規則を選択し、インタプリタを起動させる。

前述したように、対話手続き規則の条件部は、学習

者の理解状態と学習者モデルとの差異を基にして記述されている。システムが助言を与えるタイミングは、すなわち対話手続きインタプリタが起動し、対話規則が解釈実行されるのは、学習者が根拠と結論のつながりに言及した場合である。したがって、学習者の記述が正しいか否かを判断するための規則の条件部は、根拠と結論のつながり方が記述されている。たとえば、学習者が『 $AB=AC$ だから $\angle ABD=\angle ACD$ 』と記述した場合の根拠および結論はそれぞれ $AB=AC$, $\angle ABD=\angle ACD$ である。

規則の実行部は、学習者の理解状態記述メモリを更新するものと、理解状態にあったメッセージを出力するものおよび、推論のための情報を得るために学習者に質問をするものがある。

システムは図-7 に示した関数を用いて、学習者の記述が妥当であるか否かを調べ、その結果を基にインタプリタが理解状態記述メモリを更新する。これらの関数は、単に学習者の記述した根拠と結論がどのようにつながるかを調べるだけであり、理解状態記述メモリを直接変更することはしない。すなわち、理解状態記述メモリの状態を変更するのは、規則の実行部のみである。このことにより、対話規則の独立性が保持される。

マクロレベルでの規則は、個々のステートメントを評価するのではなく、証明の全体的な枠組みを教授するための規則である。それは、学習者の理解状態メモリのなかの履歴に関する情報を評価する。

マクロレベルでの規則による対話が行われるのは、たとえば次のような状況においてである。①証明がすべて終了したとき、②学習者が同じ部分木に2回以上ふれたとき、③三つ以上の異なる部分木にふれたときなど。

システムはまずミクロレベルの規則を起動し、次にマクロレベルの規則を起動する。マクロレベルの規則のいずれも現在の状況にマッチしない場合には、学習者に次のステップの記述を促す。

7. 混乱状態における証明計画支援

前述したように、解法エキスパートは、一般的な幾何学定理を証明することができる。すなわち、証明過程において、学習者が想定した中間仮説を証明できないときや、さらに中間仮説から上位の仮説を組み立てる論理を見いだせない場合において、それまでの学習者の計画（中間仮説、証明しようとしていた事柄）を

参照しながら、学習者の計画に沿った形で証明過程をガイドするというものである。

ワーキングメモリの状態としては、中間仮説の証明において、まったく異なる部分木の証明事項が採択されている状態、また上位の中間仮説とそれを証明するための下位の中間仮説の関連性を推論できない状態、さらに証明事項の無意味な反復が生じている状態である。

システムのガイドは、二つの形態がある。一つは、中間仮説や証明事項をキーにしながら、解法エキスパートはそれら包含する1レベル上の部分木を同定し、その部分木を経由するような正しい証明プロセスを推論しガイドしていく方法である。一方、1レベル上の部分木を同定できない場合やそれらをキーにして、正しい証明プロセスを求めることができないとき、学習者に中間仮説として何を想定しているのかを改めて質問し、その段階でその中間仮説の妥当性を評価する方法である。

8. 幾何学システムの意義

知的 CAI または ITS の研究を遂行していく際、できるだけ汎用的なシステムモデルを設定して、その実現を図っていく方法が情報処理科学として望ましい。しかしながら、ITS のように対象領域に多くが依存するシステムの場合、想定したシステムモデルに対して実現可能な領域を選定することがきわめて重要である。

ところで、ITS における学習形態は一般的チュータ、実験のインストラクタ、コーチ、コンサルタントといった形態があるが、GEOMEX をコーチ的な役割を果たすシステムとして位置づけている。この場合、学習者の証明過程において、どの時点で、割り込みをかけ、どの程度の助言を与えるかを決定することが研究上、重要な課題である。さらに証明計画の意図を認識することも重要な課題とされる。こういった点において幾何証明の場合、証明の論理（主張）においていくつかのキーになる言葉があり、それ事体自然な思考の流れの区切りになっていると考えられるので、そういった言葉が表出された時点で、システムの認識機能を駆動させ、助言のタイミングを図ることができる。また助言の程度（質的）も学習者の証明履歴を評価することによって、どういった概念（基本事項や定理またはそれらの適用の仕方）に誤りがあるかを推論することができるので、それに対応した助言を提供するこ

とができる。

さらに学習者の証明計画の意図の認識も、すでに述べたように幾何証明の場合、証明論理が絞り込まれていくので認識しやすい性質をもつ（ただし扱う学習世界が比較的小さい場合）。こういった特徴をもつ題材において、少なくとも筆者が意図したシステムモデルの実現が図られたといえよう。

9. 考 察

このシステムの有効性を検討するために、今までに15名の学習者に対して学習実験を行い、プロトコル分析を行っている。彼らの多くは問題の認識から仮説の設定、証明プロセスにおける自己の誤りや、それに対するシステム側からのコーチ的コンサルテーションによって、誤った証明プロセスに気づいたり、理解を深めたことが認められている。しかしながら、学生の意図や混乱の状態を正確に認識することに多くの問題点が見いだされている。

また、学習者の自由な表現形式による証明を可能な限り許容することを前提としているが、対象世界を限定しており、そこで使用される文型や単語に限られているなどの理由により、表現の自由度は少ない。今後、ユーザ側の文型や単語数を拡張する必要がある。

参 考 文 献

- 1) Anderson, J.R.: Tuning of Search of The Problem Space for Geometry Proofs, Proceedings of the Seventh International Joint Conference of Artificial Intelligence, Vol. 1, pp. 165-170 (1981).
- 2) Anderson, J.R., Boyle, C.F. and Yost, G.: The Geometry Tutor, Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 1-7 (1985).
- 3) Boyle, C.F. and Anderson, J.R.: Acquisition and Automated Instruction of Geometry Proof Skills, Paper presented at the 1984 AERA meetings (1984).
- 4) 岡本他：幾何論証の学習世界における知的 CAI の構成について、情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 3, pp. 311-324 (1988).
- 5) Greeno, J.G. (山口・東訳)：問題解決の過程、サイエンス社、東京 (1985).
- 6) 岡本他：幾何論証の学習世界における知的 CAI の構成について(6)、電子情報通信学会技術研究報告, AI 88-1~14, pp. 57-64 (1988).

(昭和 63 年 6 月 14 日受付)