知識工学と人工知能 42-3
（１９８５.９.２４）

多層論理のモデル理論と証明論

山内　平行、大須賀　節雄
（東京大学工学部　境界領域研究施設）

１．はじめに

本論文は、これまで提案された多層論理[5,6,7] を再検討し、一つの形式的体系としてまとめたものである。多層論理は、一階述語論理と公理的集合論に基づいた対象世界の構造化を特徴としている。筆者らが開発中の知識ベースシステムKAUS[8,10]は多層論理を理論的基礎としており、今後の発展のためにその形式的体系を明確にしておくことが本論文の目的である。

人工知能の研究分野において、一階述語論理の形式的体系は各種問題解決の一手段として大きな役割を果してきた。一階述語論理は記号論理の中でも命題論理とともに最も基本的なもので、知識情報処理における知識の表現とその利用の研究の一つの重要な基礎理論となっている。一階述語論理の対象世界は何ら構造化されていないが、多層論理では「対象世界の構造化」が行われる。対象の構造化の問題は知識表現の手法として重要な要素となっており、事実、多くの人工知能の応用システムでは、対象の構造化が行われている。意味ネットやフレームによる知識の表現、プログラミングの分野での対象指向プログラミングや構造化プログラミングなどの考え方は、すべてそれらの「対象」とするものが何であれ、「構造化」の技法が使われている。構造化の技法は、対象世界またはシステムが複雑大規模なものになればなるほどその効果は大きい。

対象の構造化には、意味論的にいってisa 階層、part-of 階層およびmember-of 階層による構造化がある。これらの２項関係は一階述語で表現可能であり、したがって一階述語論理のみで用が足りるということもできる。しかし、別のデータ構造による表現形式を用いれば、対象の管理や記述の形式的見通しが良くなるという利点が得られる。本論文はこのような対象の構造化を伴なった多層論理の言語を一階述語論理と公理的集合論に基づいて定義し、そのモデル（構造化された世界）と形式的証明の間の関係を定式化する。

２．予備的準備

多層論理では、対象の形式的な構造化を集合の概念を用いて行い、その上で定義された言語（論理式）を考えて推論規則を導入する。すなわち、集合論の中でも公理的集合論を基礎にして議論が展開される。そこで、ここでは以下の議論に必要な集合に関する公理と記号の定義および有用な定理を与える。

□　ZF集合論の公理系 [4]

A1．外延公理　$(\forall x)(\forall y)[x = y \leftrightarrow (\forall z)[z \in x \leftrightarrow z \in y]]$

A2．対公理　$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)[t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y]$

A3．べき集合公理　$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow z \subset x]$

A4．空集合公理　$(\forall y)[y \notin \emptyset]$

A5．置換公理図式　$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[[P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow y=z] \rightarrow (\forall u)(\exists v)(\forall y)[y \in v \leftrightarrow (\exists x)[x \in u \wedge P(x,y)]]$

（分出公理図式）　$(\forall u)(\exists v)(\forall x)[x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge P(x)]$

A6．正則性公理　$(\forall x)[x \fallingdotseq \emptyset \rightarrow (\exists u)[u \in x \wedge u \cap x = \emptyset]]$

A7．和集合公理　$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow (\exists u)[u \in x \wedge z \in u]]$

A8．無限公理　$(\exists x)[\emptyset \in x \wedge (\forall y)[y \in x \leftrightarrow y \cup \{y\} \in x]]$

A9．選択公理　$(\forall z)[(\forall x)[x \in z \rightarrow x \fallingdotseq \emptyset] \wedge (\forall x)(\forall y)[x,y \in z \wedge x \fallingdotseq y \rightarrow x \cap y = \emptyset] \rightarrow (\exists u)(\forall x)[x \in z \rightarrow (\exists t)[u \cap x = \{t\}]]]$

ZF集合論は以上の９つの公理から構成され、その対象は集合であり集合は上の公理系を満足するもの、すなわち、公理論的に定義される。すべての集合は正則性公理により有基底的に構成され、そこでの基本述語は∈述語のみである。我々は∈述語のほかに、以下で定義される述語および記号を導入する。

□ <u>定義</u>

S1. 多層論理の対象は基底要素（個体）および集合／クラスである。

S2. 対象ｘが基底要素またはその要素が有限的に列挙された集合であることを＃ｘで表わす。

S3. 集合Ｘのｎ階のべき集合を＊ｎＸと書く。＊０Ｘ＝Ｘである。

S4. 集合ｙが対象ｘを構成していることをｙ◁ｘで表わす。

S5. 対象ｘを構成する集合の集まりを＜ｘ＞で表わす。

S6. 対象ｘと対象ｘを構成する集合の要素ｙの関係をｙ◀ｘで表わす。

D1. $(\forall x)(\forall y)[\ x \blacktriangleleft y \ \leftrightarrow\ (\exists z)[\ x \in z \ \wedge\ z \lhd y\ ]$

D2. $(\forall x)(\forall y)[\ x \subset y \ \leftrightarrow\ (\forall z)[\ z \in x \ \rightarrow\ z \in y\ ]]$

D3. $(\forall x)(\forall y)[\ x \cap y \fallingdotseq \varnothing \ \leftrightarrow\ (\exists z)[\ z \in x \ \wedge\ z \in y\ ]]$

D4. $(\forall x)(\forall y)[\ x \cap y = \varnothing \ \leftrightarrow\ (\forall z)[\ z \in x \ \rightarrow\ \sim(z \in y)\ ]]$

D5. $(\forall x)(\forall y)[\langle x\rangle \subset \langle y\rangle \ \leftrightarrow\ (\forall z)[\ z \lhd x \ \rightarrow\ z \lhd y\ ]]$

D6. $(\forall x)(\forall y)[\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \fallingdotseq \varnothing \ \leftrightarrow\ (\exists z)[\ z \lhd x \ \wedge\ z \lhd y\ ]]$

D7. $(\forall x)(\forall y)[\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \varnothing \ \leftrightarrow\ (\forall z)[\ z \lhd x \ \rightarrow\ \sim(z \lhd y)\ ]]$

その他、対象に関する有用な次のLevel 述語を定義しておく。この定義は１種の集合の階層のレベルを規定するものである。

D8. $(\forall x)\mathrm{Level}(x) \ \geqq\ 0$　ただし、等号はx が基底要素のときのみ成立つ。

D9. $(\forall x)(\forall y)[\ x \in y \ \rightarrow\ \mathrm{Level}(y) = \mathrm{Level}(x) + 1\ ]$

D10. $(\forall x)(\forall y)[\ x \subset y \ \rightarrow\ \mathrm{Level}(x) = \mathrm{Level}(y)\ ]$

D11. $(\forall x)(\forall y)[\ x \lhd y \ \rightarrow\ \mathrm{Level}(x) = \mathrm{Level}(y)\ ]$

この定義によれば、a,b,c を基底要素とし$x=\{a,b,c\}$ とすれば$\mathrm{Level}(x)=1$で，$x=\{\{a\},\{b,c\}\}$ ならば、$\mathrm{Level}(x) = 2$である。また、$\{a,\{b,c\}\}$ は、和集合公理により集合論的には集合として許されるが、このような集合は本論文では取扱わないことにする。

□ <u>基本定理</u>

ここで、有用な定理のいくつかを次に列挙しておく。これらの定理は、上記の公理系や諸定義と共に多層論理の形式的体系を構築するための基本的な道具だてとなっている。

T1. $(\forall x)(\forall y)[\ x \in \{y\} \ \leftrightarrow\ x = y\ ]$

T2. $(\forall x)(\forall y)[\ x \lhd y \ \leftrightarrow\ x \in \langle y\rangle\ ]$

T3. $(\forall x)(\forall y)[\ x \subset y \ \leftrightarrow\ [\ (\forall u)[\ u \in y \ \rightarrow P(u)\ ] \rightarrow (\forall v)[\ v \in x \ \rightarrow P(v)\ ]\ ]]$

T4. $(\forall x)(\forall y)[\ x \cap y \fallingdotseq \varnothing \ \leftrightarrow\ [\ (\forall u)[u \in x \rightarrow P(u)\ ] \rightarrow (\exists v)[v \in y \wedge P(v)\ ]\ ]]$

T5. $(\forall x)(\forall y)[\ x \supset y \ \leftrightarrow\ [\ (\exists u)[\ u \in y \ \wedge P(u)\ ] \rightarrow (\exists v)[\ v \in x \wedge P(v)\ ]\ ]]$

T6. $(\forall x)\ P(x,x) \ \leftrightarrow\ (\forall y)(\forall z)[\ y = z \ \rightarrow\ P(y,z)\ ]$

T7. $(\exists x)\ P(x,x) \ \leftrightarrow\ (\exists y)(\exists z)[\ y = z \ \wedge\ P(y,z)\ ]$

T8. $*m(*nX) \ \leftrightarrow\ *(m+n)X$

T9. $*mX \in *nY \ \leftrightarrow\ *(m+k)X \in *(n+k)Y$

T10. $*mX \in *nY \ \leftrightarrow\ *mX \subset *(n-1)Y$, if $n \geqq 1$.

T11. $*mX \subset *nY \ \leftrightarrow\ X \subset *(n-m)Y$, if $n \geqq m$.

T12. $*mX \subset *nY \ \leftrightarrow\ *(m-n)X \subset Y$, if $m \geqq n$.

これらの定理の若干の説明を次に記す。

T1 : 単一の要素y よりなる集合$\{y\}$ の要素をx とすれば$x = y$ であることを表わす。この定理は対公理より導かれる。

T2 : S4およびS5より明らかである。

T3 : 部分集合の定義論理式と分出公理図式より導かれる。

T4 : x とy が共通部分をもてば、P(.)が共に成立つ部分が存在することを示す。

T5 : T3の待遇である。

T6 : 述語P が同一の変数を２つ以上もつとき、形式的にすべて異なった変数記号で表現可能であることを示す。

T7 : 同上。

T8 : m, nは非負整数で、$(*nX)$ を基底集合としたm 階のべき集合は、X を基底集合とする$(m+n)$階のべき集合に等しいことを示す。これは外延公理とべき集合公理より明らかである。

T9 : m,n,k は非負整数で、べき集合は整列順序的に構成されることを示す。

T10: べき集合公理とT8より言える。

T11: T9とT10 より帰納的に証明できる。

T12: 同上。

３．多層論理の言語

多層論理の言語（多層論理式）を次のように定義する。

□ 項の定義

T1．定数および変数は項である。

T2．f を関数記号、$t_1, t_2, \ldots, t_n$を項としたとき、$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ は項である。

T3．T1およびT2によって生成されるもののみが項である。

□ 多層論理式の定義　（以下、単に論理式と呼ぶ）

F1．P を述語記号、$t_1, \ldots, t_n$ を項としたとき、$P(t_1, \ldots, t_n)$は論理式である。

F2．F,G を論理式としたとき、$\sim(F)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ は論理式である。

F3．F を自由変数x を持つ論理式としたとき、

(1).　$(\forall x/y)F$, $(\exists x/y)F$, ここで、y は集合定数か集合変数、

(2).　$(\forall x/y)F$, $(\exists x/y)F$, ここで、y は集合定数か集合変数、

(3).　$(\forall x//y)F$, $(\exists x//y)F$, ここで、y は集合定数か集合変数、

のそれぞれは論理式である。

F4．F1,F2,F3によって生成されるもののみが論理式である。

ここで、F2において、特にあいまいさが生じない限りカッコを省くことができる。以下では、自由変数を含まない論理式（閉論理式）のみを扱う。次に、一階述語論理における機械的証明を論ずるときに、論理式の標準形を考えると同様に、多層論理における論理式の冠頭標準形を次のように定義する。

□ 冠頭標準形

$$\prod_{i=1}^{n}(Q_i x_i/X_i)\ M[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

ここで、　$\prod_{i=1}^{n}(Q_i x_i/X_i) = (Q_1 x_1/X_1)(Q_2 x_2/X_2) \ldots\ldots (Q_n x_n/X_n)$

$Q_i = \forall$ or $\exists$

$M[x_1, x_2, \ldots, x_n]$はリテラルのAND-OR式である。

$\prod_{i=1}^{n}(Q_i x_i/X_i)$を多層論理式の冠頭部と呼ぶ。

このようにして定義される多層論理の言語（多層論理式）と集合に関する述語を含んだ一階述語論理の言語との間には次の変換公理が存在する。多層論理式はこの公理を繰返し適用して一階述語の論理式に変換できる。

□　<u>多層論理式と一階述語論理式との変換公理</u>

L1.　$(\forall x/X)\ P(x) \leftrightarrow (\forall x)\ [\ x \in X \rightarrow P(x)\ ]$

L2.　$(\exists x/X)\ P(x) \leftrightarrow (\exists x)\ [\ x \in X \wedge P(x)\ ]$

L3.　$(\forall x\boldsymbol{/}X)\ P(x) \leftrightarrow (\forall x)\ [\ x \lhd X \rightarrow P(x)\ ]$

L4.　$(\exists x\boldsymbol{/}X)\ P(x) \leftrightarrow (\exists x)\ [\ x \lhd X \wedge P(x)\ ]$

L5.　$(\forall x//X)\ P(x) \leftrightarrow (\forall x)\ [\ x \blacktriangleleft X \rightarrow P(x)\ ]$

L6.　$(\exists x//X)\ P(x) \leftrightarrow (\exists x)\ [\ x \blacktriangleleft X \wedge P(x)\ ]$

この変換公理によって、多層論理の形式的体系は一階述語論理の形式的体系から導出できることが分かる。

<u>4．多層論理の推論規則</u>

多層論理の推論規則は、第２章で掲げた集合論における公理と定理に、前記の多層論理式と一階述語論理式の間の変換規則を適用して得られる。ここで、多層論理の推論規則を導入する前にいくつかの同値な表現を以下に記す。

E1.　$(\forall x/\{a\})\ P(x) \leftrightarrow P(a)$

E2.　$(\exists x/\{a\})\ P(x) \leftrightarrow P(a)$

E3.　$(\forall x\boldsymbol{/}X)\ P(x) \leftrightarrow (\forall x/\langle X\rangle)P(x)$

E4.　$(\exists x\boldsymbol{/}X)\ P(x) \leftrightarrow (\exists x/\langle X\rangle)P(x)$

E5.　$(\forall x//X)\ P(x) \leftrightarrow (\forall y\boldsymbol{/}X)\ (\forall x/y)\ P(x)$

E6.　$(\exists x//X)\ P(x) \leftrightarrow (\exists y\boldsymbol{/}X)\ (\exists x/y)\ P(x)$

E7.　$(\forall x/{*}X)(\forall y/x)\ P(y) \leftrightarrow (\forall x/{*}X)(\exists y/x)\ P(y) \leftrightarrow (\forall y/X)\ P(y)$

E8.　$(\exists x/{*}X)(\forall y/x)\ P(y) \leftrightarrow (\exists x/{*}X)(\exists y/x)\ P(y) \leftrightarrow (\exists y/X)\ P(y)$

E9.　$(\forall x/X)\ P(x) \wedge X = \{\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n\} \leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots\dots \wedge P(x_n)$

E10.　$(\exists x/X)\ P(x) \wedge X = \{\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n\} \leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots\dots \vee P(x_n)$

E11.　$(\forall x/X)\ P(x,x) \leftrightarrow (\forall y/X)\ (\forall z/X)\ [\ y = z \rightarrow P(y,z)\ ]$

E12.　$(\exists x/X)\ P(x,x) \leftrightarrow (\exists y/X)\ (\exists z/X)\ [\ y = z \wedge P(y,z)\ ]$

ただし、(1).　E5およびE6のP は変数y を含まない論理式とする。
　　　　(2).　E7およびE8のP は変数x を含まない論理式とする。
　　　　(3).　E11 および E12のP は変数y およびz を含まない論理式とする。

ここで、E3～E6は冠頭部での記号$/$,$\boldsymbol{/}$,$//$の相互関係を示す。E7～E8はべき集合の特徴を表わしたもので、この同値関係の証明は先の定理T1を用いてできる。E9～E10 は有限確定した定義域をもつ∀ー限量化された変数に対しては、その定義域の要素をすべて代入して得られる論理式のAND 結合に変換可能であること、同様に、ヨー限量化された変数に対してはその定義域の要素をすべて代入して得られる論理式のOR結合に変換可能であることを示す。P(x)がx 以外に有限確定な定義域上の変数をもつ場合は、この定理を繰返し適用して変換することができる。E7～E10 は対象の自動生成とか関数の繰返し演算や関係論理演算などと関連する有用な定理である。E11 ～E12 は同一の変数記号を２つ以上もつ述語をすべて異なった変数記号をもつ述語に変形する定理である。

□ <u>多層論理の推論規則</u>

- modus ponens　$\{ P \ ,\ P \rightarrow Q \} \vdash Q$
- modus tollens　$\{ P \rightarrow Q \ ,\ \sim Q \} \vdash \sim P$
- barbara 式　$\{ P \rightarrow Q \ ,\ Q \rightarrow R \} \vdash P \rightarrow R$
- OR elimination　$\{ P_1 \ ,\ (P_1 \vee P_2) \wedge Q \rightarrow R \} \vdash Q \rightarrow R$

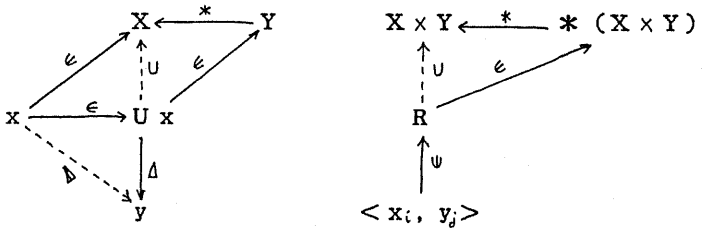
R1. $\{ P(a) \ ,\ a \in X \} \vdash (\exists x/X)\ P(x)$
R2. $\{ (\forall x/X)\ P(x) \ ,\ a \in X \} \vdash P(a)$
R3. $\{ (\forall x/X)\ P(x) \ ,\ X \supset Y \} \vdash (\forall x/Y)\ P(x)$
R4. $\{ (\forall x/X)\ P(x) \ ,\ X \cap Y \fallingdotseq \emptyset \} \vdash (\exists x/Y)\ P(x)$
R5. $\{ (\exists x/X)\ P(x) \ ,\ X \subset Y \} \vdash (\exists x/Y)\ P(x)$
R6. $\{ (\forall x/X)\ P(x) \ ,\ (\forall y/Y)[\ P(y) \rightarrow Q(y)\ ] \ ,\ X \subset Y \} \vdash (\forall x/X)\ Q(x)$
R7. $\{ (\exists x/Z)\ P(x) \ ,\ (\forall y/Y)[\ P(y) \rightarrow Q(y)\ ] \ ,\ X \cap Y = Z(\fallingdotseq \emptyset) \} \vdash (\exists x/X)\ Q(x)$
R8. $\{ (\forall x/Y)\ P(x) \ ,\ (\exists y/Y)[\ P(y) \rightarrow Q(y)\ ] \ ,\ X \supset Y \} \vdash (\exists x/X)\ Q(x)$
R9. 必要ならば、前記E1～E12 を適用する。

ここで、等号に関する公理の適用も推論規則に含まれているものとする。一般の論理式の証明は上記の推論規則を繰返し適用して行われる。

<u>5．多層論理の構造化モデル</u>

多層論理は、公理的集合論を規範にして構成され、対象はその構成から必然的に構造化されている。その具体的な個々のモデルは、集合論で取扱われる対象（集合あるいは基底要素）を具体的なもの（たとえば、「人」、「車」、「数」など）に対応づけ、それらの間の関係表現（集合・要素関係および素論理式など）の具体的な意味解釈を与えたものである。すなわち、一つには次に示す対象の抽象的（集合論的）な構成図式に対する具体的な意味解釈を与えることが必要である。このような対象の構造化記述とその対象世界で定義された素論理式から、一般の論理式（一般則／経験則）が定義されモデル理論的にそれらの充足可能性が調べられる。たとえば、$\langle *X \rangle = \{*c_1, *c_2\}$で、$*c_1 = \{*a_1, *a_2\}$，$*c_2 = \{*b_1, *b_2\}$とし、$P(*a_1,1)$:T , $P(*a_2,1)$:F , $P(*b_1,1)$:T , $P(*b_2,1)$: T とすれば、$(\exists x/*X)(\forall y/x)P(y,1)$:T となり、$(\forall x/*X)(\forall y/x)P(y,1)$:F となる。ここで、すべての対象は、$\{*X, *c_1, ;*c_2, *a_1, *a_2, *b_1, *b_2, 1\}$と仮定する。

□ <u>図式1.　対象の構成的図式</u>



$\in$: 集合・要素関係
$*$: べき集合関係
$\lhd$: 構造体関係
$\times$: 直積
$\supset$: 部分集合関係
$\blacktriangleleft$: 部分構造体要素関係

次に、上図の対象の構成図式に対する一般的な意味規則の一部を与える。いまＡとＢを個体（基底要素）または概念語（これらをまとめて項と呼ぶことにする）としたとき、ＡとＢの間の集合的な２項関係Ａ・Ｂの意味規則を表１のように与える。表において記号＊はS3で与えた単項演算子で＊ＣなどはＣの「べき集合」を表わす。たとえば、*PERSON はPERSON（人）のすべての部分集合を要素とする集合を表わす。すなわち、*PERSON は日常概念の人々(PERSONS) を表わすと解釈することができる。男の人々(*MALE) はPERSONS の部分集合であり、したがって、*MALE ∈ *(*PERSON)と表現できる。記号◀はS6で与えた構造体の内部構造関係を表わす述語である。

□ 表1. 対象の構成図式に対する意味解釈

A・B　　　A , B : term (Individual, Conceptual word)
　　　　　・ : ∈ | ◁

	A	・	B	interpretation	example
1).	C1	∈	*C2	C1 is-a C2	MALE ∈ *PERSON
2).	C1	∈	**C2	C1 is a group-of C2	FAMILY ∈ **PERSON
3).	K	∈	C	K is-a C	#Taro ∈ MALE
4).	K	∈	*C	K is a group-of C	{1,2} ∈ *INTEGER
5).	K1	∈	*K2	K1 is a group-of K2	{a,c} ∈ *{a,b,c}
6).	K1	∈	K2	K1 is a member-of K2	a ∈ {a,b,c}
7).	K1	◁	K2	K1 is a part-of K2	#wheel1 ◁ #car1

cf). C : Conceptual word
　　K : Individual, Instance set, Object

次に直積集合についていうと、直積集合は順序集合であり、直積集合X×Y の要素<x,y> は集合論的には $\{\{x\},\{x,y\}\}$ で定義され、したがって、*2(X∪Y)の部分クラスである[4] 。その部分集合は、関数の定義域と値域の関係および与えられた述語を真とする引数の組を表わすものである。したがって、情報処理的には、関数グラフや述語P の引数の具体値を関係データ形式で与えることができる。すなわち、

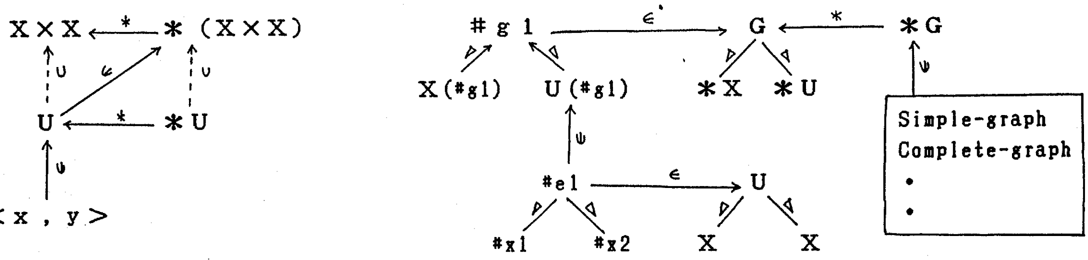
□ $R = \{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y\rangle : y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \} \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times Y$

□ $R = \{ \langle x_1, x_2, \ldots x_n\rangle : M \models P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \} \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

また、この直積集合による構造化モデルの一つとしてグラフ理論[1] におけるグラフがある。グラフ理論は構造モデルの表現に実際に広く使われている重要な数学的モデルである[5,6,9] 。たとえば、電子回路の設計、分子化学における分子構造、CAD における幾何モデル、および意思決定モデルなど応用範囲が広い。これらのモデルの実際の基底要素は、電子部品、化学物質、幾何学的対象物、人間、機械などである。グラフの定義とその構成的モデル表現について以下に記す。

S7. グラフGはXとUの組(X，U)によって定義される。ここで、
　(1). Xは頂点集合$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$である。
　(2). Uは直積X×Xの部分族$\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$で$u_i$を弧と呼ぶ。
　(3). Uの要素は2つ以上重複していてもよい。
S8. u＝(x，y)∈X×Xのx，yをそれぞれuの始点、終点と呼ぶ。

□ 図式2. グラフG＝(X，U)の構成図式



6．多層論理の証明の構造と機械的証明法

多層論理の言語L による理論的体系Th(L) は、今まで見てきたように、１階述語論理に基づく公理的集合論の言語L_0の理論的体系Th(L_0)と同等である。従って、多層論理の推論規則は１階述語論理の推論規則に展開でき、その証明の構造は１階述語論理の構造と同等であると言える。

１階述語論理の体系は無矛盾で、その推論規則は完全で健全であることが知られている[3] 。従って、多層論理においても同様なことが言える。すなわち、完全性定理と健全性定理が成り立つ。

□　完全性定理　：　$\models \varphi \implies \vdash \varphi$
□　健全性定理　：　$\vdash \varphi \implies \models \varphi$

また、１階述語論理においてはJ.A.,Robinson による機械的証明法である導出原理(Resolution Principle)[2] が存在するので、多層論理においても、それと同等な機械的証明法を与えることができる。その基礎となるのが第４章で述べた多層論理の推論規則である。

筆者らが開発中の知識ベースシステムKAUSは、本論文で述べた形式的体系を理論的基盤としているので、その機械的証明法は基本的には１階述語論理に関する導出原理と同等なものであると言える。skolem関数の取扱いについては、たとえば、

□　$(\exists x/X)\ (\forall y/Y)\ (\exists z/Z)\ P(x,y,z) \leftrightarrow P(a/X,y/Y,f(x)/Z)$

のように変数の変域を明記してskolem化する [7]。統一化は変数とその変域の両方を行う必要がある。skolem化された項に対する統一化規則などは通常の一階述語における規則と同じ方法が使われる。変域に関しては第４章で与えた推論規則が適用される。すなわち、推論規則R1～R8の集合に関する条件のチェックは、第２章で掲げたD2～D7と定理のT8～T12 を適用して行われる。言いかえれば、対象の多層モデルが知識ベース化、データベース化されてそれらのモデルの仮定のもとで多層論理式の証明・解釈が行われる。この点は通常の１階述語論理に関する機械的証明法と異なることの一つである。その他、第４章で与えた定理E7,E8 に基づくオブジェクトの自動生成機能と、定理E9,E10に基づく関係論理演算を推論体系に付加してある点が異なっている。すなわち、多層論理式によって表現された証明すべき論理式は、推論処理時に式の展開とオブジェクトの生成機能を働かせることができる[8,10]。このとき重要な役割りをするのが論理式の冠頭部表現である。生成・展開の機能が起動される状態のパターン例をKAUSの言語で表わすと次のようになる。

□　生成機能起動状態　　[EX/*domain][QY/X](property Y a)
□　展開機能起動状態　　[Q X#/domain][Q Y//X](property Y a)

一般に生成機能が起動されるのは、冠頭部で変数の階層化が行なわれ、かつあるレベルから上位の階層に属する変数がすべて述語の直接的な引数となっていないときである（上の例ではX）。生成されたオブジェクトは、推論の過程で変数に値が代入されたときの副産物としてのものと、基底集合からべき集合を構成しその要素を一つづつ取り出しては条件テストをし、テストに合格したものとの二つの方法によるものがある。前者はボトム・アップ的で後者はトップ・ダウン的な生成法と言ってよかろう。このようなオブジェクトの生成を要求する質問式は、形式的には次のように読むことができる。

□　[Generate-object/*from-materials](requirements)?
□　[Analize-objects#/of-generated-set](properties)?

一方、展開機能が起動されるのは、変数の定義域が有限確定していることが必要で、KAUSでは処理の便宜上冠頭部で変数のあとに＃記号を付けてこれを示す。展開は展開変数にその定義域のすべての値を代入して、第４章の定理E9とE10 によって論理的に等価な式に置換えることである。たとえば、[EX#/{2,3}][AY#/{2,4,6}](exact-divisor-of Y X)なる式は、

$$\Box \quad \bigvee_{i=1}^{2}\bigwedge_{j=1}^{3}(\text{exact-divisor-of } Y_j \ X_i), \quad Y_j \in \{2,4,6\}, \quad X_i \in \{2,3\}$$

なるAND/OR式に展開される。したがって、この式が真となるのはX=2 のときである。
このように変数の階層化は式の展開と対象の自動生成に重要な役割りを果し、多層論理の言語は構造化モデルの記述と操作に適していることが分かる。

7．おわりに

本論文では一階述語論理と公理的集合論から多層論理の形式的体系を導いた。その結果、多層論理は理論的には一階述語論理と同等でその推論規則は無矛盾な完全なものであることが示された。
そこで使われる言語は、変数のタイプまたは変域が冠頭部で明記されることが特徴であった。この変数のタイプまたは変域定数は、対象世界においては集合論的に階層化されてその対象モデルが与えられた。同様に形式的推論規則は定数（個体定数および変数のタイプまたは変域定数）の集合的な階層の存在のもとで適用されることをみた。
知識ベースシステムKAUSはこのような多層論理を基盤にした論理型システムである。現在実働化されているKAUSは知識獲得機能と知識の管理機能が弱い。本来このような機能の実現のためには一階述語あるいは多層論理の範囲のみでは不十分で、「高階述語」や「非単調性」を含んだ理論が必要である。その他、「あいまい処理」とか「帰納推論」など残された問題は多い。多層論理からみると、このような問題はその内部にかなりの手続き的な面が隠されていると見なされよう。KAUSには定義された様々な手続きを多層論理と共に利用することができるように設計されており、このような問題を処理することは不可能ではない。しかし、首尾一貫した方式を確立するには、現実的な間に合わせ的なもののみでなく、理論的な研究も必要である。本論文はこのための一つの区切りでもある。

謝辞
大学院学生および研究性との議論は一部参考になったところがあった。感謝する。

参考文献

[1]. Berge,C., Graphs and Hypergraphs, (North-Holland, 1973).
[2]. Chang,C.L. and Lee,R.C.T., Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, (Academic Press, 1973).
[3]. Enderton,H.B., A Mathematical Introduction to Logic, (Academic Press, 1972).
[4]. 田中尚夫，現代数学レクチャーズB-10，公理的集合論，培風館，1982.
[5]. Ohsuga,S., A New Method of Model Description --- Use of Knowledge Base and Inference, Proc. IFIP W.G.5.2. Working Conf. on 'CAD system Framework', (North-Holland, 1983).
[6]. Ohsuga,S.,Knowledge Based Man-Machine Systems, Automatica, vol.19, No.6 (1983), pp.685-691.
[7]. Ohsuga,S., Predicate Logic Involving Data Structure as a Knowledge Representation Language, Proc. '83 8th IJCAI., (1983), pp.391-394.
[8]. 山内，大須賀，KAUS-4の処理系について，ソフトウェア科学会，第一回大会論文集，1984.
[9]. 山内，大須賀，KAUSによるグラフの知識表現と基本操作，情報の構造化と意味に関する研究（ 京大，数理科学講究録525，1984. ）
[10]. Yamauchi,H., and Ohsuga,S., KAUS as a Tool for Model Building and Evaluation, Proc. 5th International Workshop on Expert Systems and Their Applications, (Agence de l'Informatique, Avignon, France, 1985), pp.315-330.