人 工 知 能 78－8
(1991. 9. 12)

述語サーカムスクリプションの有限近似とその上の計算システム

太田和彦　　岩沼宏治
山梨大学工学部電子情報工学科

本研究の目的は、述語サーカムスクリプションの有限近似を考察し、その演繹システムを構成することにある。最初に、点別サーカムスクリプションの概念を拡張し、その形式的な性質と限界を調べる。次に、拡張された点別サーカムスクリプションに対する演繹手法について考察する。一般に、意味のある結論を得る為にはサーカムスクリプションと共にClarkの等号理論、即ち単一名仮説を仮定する必要のあることが知られている。ゆえに、本論文の後半では、拡張された点別サーカムスクリプションに単一名仮説を仮定した場合の演繹手法を与え、その完全性を示す。

A finite approximation of predicate circumscription and its deductive system

Oota kazuhiko †　　Kouji Iwanuma

Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, Faculity of Eng.,Yamanashi Univ.
4-3-11 Takeda, Koufu, Yamanashi 400, Japan
† e-mail　kazuhiko@kiritsubo.ci.yamanashi.ac.jp

In this paper, we investigate a finite approximation of predicate circumscription and give its deductive system. At first, we generalize notion of pointwise circumscription, and research its formal properties. Next, we investigate a deductive method of the generalized pointwise circumscription. To assume Clark's equality theory, i.e. *unique name assumption,* together with circumscription is indispensable in order to obtain desirable consequences. Therefore, rest of this paper, we give a deductive method for pointwise circumscription assumed together with Clark's equality theory, and show its *completeness.*

1 はじめに

述語サーカムスクリプションは二階論理式として定義されるが、二階式の直接的な計算は極めて難しい。この為サーカムスクリプションの計算手法として、一階式への等価変換手法や質問変換手法などが考えられきた。しかし、これらの手法では制約式に種々の制限がある。点別サーカムスクリプションは述語サーカムスクリプションの一階論理上での近似式であり、制約式の形によらず適用でき、極めて有用である。但し、点別サーカムスクリプションは1次の近似式と考えられ、近似度が極めて荒い。そこで本研究では、まず、点別サーカムスクリプションの自然な拡張としてのn次点別サーカムスクリプションを導入し、その理論的性質を考察する。

サーカムスクリプションと共に、Clarkの等号理論、即ち、単一名仮説を仮定することは有用であることが知られている。そこで、本論文の後半では、n次点別サーカムスクリプションに、Clarkの等号理論を仮定した場合の計算法を与え、その完全性を示す。

2 準備

この節では、述語サーカムスクリプションと、その定義に必要な記法を導入する。以下では、定数は0引数関数とし、議論を簡単にする為、述語、関数は全て高々1引数の場合だけ扱う。

定義 1 [5] $\alpha[x]$ を x が自由に出現する論理式とするとき、λ 項 $\lambda x\alpha[x]$ を述語表現と呼ぶ。また、述語 p と述語表現 $\lambda xp(x)$ を同一視する。 ∎

定義 2 [5] $p_i\,(1 \le i \le n)$ を述語記号とする。このとき、$A[p_1,\ldots,p_n]$ で、p_i が出現するかもしれない論理式を表わすものとする。

$q_i\,(1 \le i \le n)$ を p_i と同数の引数を持つ述語表現とするとき、$A[p_1/q_1,\ldots,p_n/q_n]$ で、A 中に出現する全ての p_i を q_i で置き換えたものを表わす。 ∎

定義 3 [1] 述語表現 p、q に対して、$\forall x[p(x) \supset q(x)]$ を $p \le q$ と表わす。 ∎

定義 4 (述語サーカムスクリプション) [1] A を一階の閉論理式とする。このとき、制約 A に対する、述語の集合 $\Gamma = \{p_1,\ldots,p_n\}$ の述語サーカムスクリプションを次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&Cir[A;\Gamma]\\
=\;& A\\
&\wedge\ \forall Q_1,\ldots,Q_n\\
&\qquad\left[\begin{array}{r}\left(A[p_1/Q_1,\ldots,p_n/q_n]\wedge\bigwedge_{j=1}^{n}(Q_j\le p_j)\right)\\ \supset\bigwedge_{j=1}^{n}(p_j\le Q_j)\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

このとき Γ を極小化述語集合と呼ぶ。 ∎

定義 5 Γ を述語の集合、D を領域、I_1、I_2 を解釈、$M_1 = (D,I_1)$、$M_2 = (D,I_2)$ を構造とする。$p \in \Gamma$ に対して、$I_1(p) \supseteq I_2(p)$、それ以外の q に対して、$I_1(q) = I_2(q)$ のとき、$M_1 \ge_\Gamma M_2$ と表わす。

更に、A を制約としたとき、A のモデル M に対して、$M \ge_\Gamma N$ となる A のモデル N が存在しないとき、M を A の Γ 極小モデルと呼ぶ。 ∎

3 点別サーカムスクリプションと有限近似

制約 A における述語 p の点別サーカムスクリプションは述語サーカムスクリプションの一階論理式での近似概念として、Lifschitz[2] により次のように定義されている。

$$A[p]\wedge\forall x\,[\,p(x)\supset\neg A[p/\lambda u(p(u)\wedge u\ne x)]\,]$$

この式は、p の外延を1個だけ小さくできる制約 A のモデルを除外する条件になっている。上式の自然な拡張として次の定義が得られる。

定義 6 制約 A における述語集合 $\Gamma = \{p_1,\ldots,p_m\}$ に関する n 次点別サーカムスクリプションを次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&PW_n[A;\Gamma]\\
=\;& A\\
&\wedge\ \forall x_{1,1},\ldots,x_{1,n},\ \ldots\ ,x_{m,1},\ldots,x_{m,n}\\
&\qquad\left[\begin{array}{l}\bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{n}p_i(x_{i,j})\supset\\ \neg A\left[\begin{array}{c}p_1/\lambda u\,(p_1(u)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}u\ne x_{1,i})\\ \vdots\\ p_m/\lambda u\,(p_m(u)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}u\ne x_{m,i})\end{array}\right]\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

このとき Γ を極小化述語集合と呼ぶ。また、$\Gamma = \{p\}$ のとき、$PW_n[A;\Gamma]$ を $PW_n[A;p]$ と表わす。 ∎

n 次点別サーカムスクリプションは述語サーカムスクリプションに対して健全である。

定理 1 (点別サーカムスクリプションの健全性)

$$Cir[A;\Gamma] \models PW_n[A;\Gamma] \qquad \blacksquare$$

この定理より、述語サーカムスクリプションの計算に、点別サーカムスクリプションを利用できることがわかる。さらに、次の定理が成り立つ。

定理 2 $\models PW_n[A;\Gamma] \supset PW_{n-1}[A;\Gamma] \quad (n \geq 1)$ ∎

この定理より、n 次の点別サーカムスクリプションは、n-1 次以下の点別サーカムスクリプションを含むことがわかる。

例 1 制約 $A : p(a) \equiv p(b)$ に於いて、$PW_1[A;p]$、$PW_2[A;p]$ を比較する。明らかに、A の p 極小モデルにおける p の外延は $\emptyset$ である。ところで、

$$\begin{aligned} & PW_1[A;p] \\ = \ & A \wedge \forall x \left[p(x) \supset \begin{array}{c} p(a) \wedge x \neq a \wedge x = b \\ \vee \\ p(b) \wedge x \neq b \wedge x = a \end{array} \right] \end{aligned}$$

であるから、$PW_1[A;p]$ のモデルは、p の外延が $\{p(a), p(b)\}$ であることを許す。すなわち、モデルを極小モデルに制限していない。しかし、

$$\begin{aligned} & PW_2[A;p] \\ = \ & A \wedge \forall xy \left[\begin{array}{c} p(x) \\ \vee \\ p(y) \end{array} \supset \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} p(a) \wedge x \neq a \wedge y \neq a \\ \wedge (x = b \vee y = b) \end{array} \right] \\ \vee \\ \left[\begin{array}{c} p(b) \wedge x \neq b \wedge y \neq b \\ \wedge (x = a \vee y = a) \end{array} \right] \end{array} \right] \right] \end{aligned}$$

となり、$PW_2[A;p]$ のモデルにおける p の外延は $\emptyset$ のみである。 ∎

このように極小化述語の外延から 2 個以上の元を同時に減らさなければならない場合には、高次の点別サーカムスクリプションを仮定する必要がある。しかし、点別サーカムスクリプションは必ずしもモデルを極小モデルのみに制限していない。以下はその例である。

例 2 制約 $A : \forall x[p(x) \supset p(s(x))]$ のもとで p を極小化する。明らかに、A の p 極小モデルでは、p の外延は $\emptyset$ である。

一方、n 次点別サーカムスクリプションは、次のようになる。

$$\begin{aligned} & PW_n[A;p] \\ = \ & A \\ & \wedge \ \forall y_1, \ldots, y_n \left[\bigvee_{i=1}^{n} p(y_i) \supset \exists x \left[\begin{array}{c} p(x) \\ \wedge \\ \bigwedge_{i=1}^{n} x \neq y_i \\ \wedge \\ \bigvee_{i=1}^{n} y_i = s(x) \end{array} \right] \right] \end{aligned}$$

点別サーカムスクリプションでは、任意の ω を含む s による無限の連鎖を p の外延から除くことができない。すなわち、p の外延が、

$$p = \{\ldots, p(\omega), p(s(\omega)), p(s(s(\omega))), \ldots\}$$

となるモデルを許す。

ところで、この場合の p 極小モデルは全て有限である。よって、Perlis & Minker[4] より、$Cir[A;p]$ は、スキーマ型のサーカムスクリプションと等価である。ゆえに、点別サーカムスクリプションは、Perlis & Minker[4] でのスキーマ型のサーカムスクリプションより能力が弱いことがわかる。 ∎

4 サーカムスクリプションと UNA

次に、サーカムスクリプションの演繹計算について考える。

サーカムスクリプションとは、述語 p の外延を極小化する為の公理であった。p に関して制約 A に陽に記述してあるものに対してだけ、p が成り立つと結論したい。

例 3 制約 $A : p(a)$、p を極小化述語とする。

このとき、常識的に、$\neg p(b)$ と考えることができる。しかし、$Cir[A;p] \models \neg p(b)$ は成立しない。 ∎

上の例の場合、更に、$a \neq b$ を仮定すると、$\neg p(b)$ を得る。$a \neq b$ は、いわゆる単一名仮説 (UNA) である。サーカムスクリプションを用いる場合、そこから有用な結論を得る為に、UNA を仮定する必要があることが知られている。以下では、n 次点別サーカムスクリプションに UNA を仮定して、述語サーカムスクリプションの演繹計算を行なうことを考える。

本研究では、UNA として、Clark の等号理論を用いる。Clark の等号理論は、次の公理集合により定義される。

定義 7 (Clark の等号理論) [6]

(1) 全ての異なる関数 f, g に対して、
$$\forall x, y(f(x) \neq g(y))$$

(2) 全ての関数 f に対して、
$$\forall x, y(f(x) = f(y) \supset x = y)$$

(3) x と異なる全ての項 t に対して、 $\forall x(x \neq t)$

(4) $\forall x(x = x)$

(5) 全ての関数 f に対して、
$$\forall x, y(x = y \supset f(x) = f(y))$$

(6) 全ての述語 p に対して、
$$\forall x, y(x = y \supset (p(x) \supset p(y)))$$
∎

元の制約 A と UNA が矛盾しないようにする為、予め、A は等号を含まないことを仮定しておく。

n 次点別サーカムスクリプションは、等号を含む一階の論理式で表わされる。よって、UNA を仮定した n 次点別サーカムスクリプションの演繹計算は、UNA を仮定した一階式の演繹計算になっている。そこで、以下では、一階式に UNA を仮定した場合一般の演繹計算について議論を進める。

一般に、等号を含む一階理論に UNA を仮定すると、その理論は矛盾して意味を成さなくなることが多い。その為、この種の計算法は今まであまり研究されていない。しかし、矛盾しない理論も多く存在する。その代表例が、ここで扱う n 次点別サーカムスクリプションと UNA との組合せである。

また、単なる UNA の計算は、ユニフィケーションの計算で十分であることが知られている。しかし、UNA を一階式を同時に仮定した場合の計算は、導出法を基にした演繹手法を用いる場合、ユニフィケーションに置き換えることはできない。以下、その理由を述べる。

定義 8 A を一階の閉論理式とする。このとき、A に対してスコーレム標準形を $Sk(A)$ で表わす。また、$Sk(A)$ の母式が B で、B の連言標準形が $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ のとき、集合 $\{C_1, \ldots, C_n\}$ を A の節集合と呼び、$Sk(A)$ と同一視する。 ∎

導出法に基づく演繹手法に於いては、扱う論理式 A を $Sk(A)$ に変換する必要がある。このとき、スコーレム関数を導入することにより、A に対する UNA は、$Sk(A)$ に対して、構文的等価性を等号成立と見なせなくなる。そこで、新たに UNA の計算手法が必要となる。

5 F-UNA 反駁

まず UNA を再定義し、UNA を仮定する関数記号と、仮定しない関数記号に分けることができるようにする。次に、UNA を計算する計算規則を与える。

定義 9 関数記号の集合 F と、述語記号の集合 P によって定まる一階の言語を $\mathcal{L}\langle F; P\rangle$ と表わす。特に、P を考慮する必要がない場合、$\mathcal{L}\langle F; P\rangle$ を $\mathcal{L}\langle F\rangle$ と表わす。

また、つぎの *(1)*、*(2)*、*(3)* を $\mathcal{L}\langle F; P\rangle$ に於ける等号公理と呼び、を $EQ[F; P]$ と表わす。

(1) $\forall x(x = x)$

(2) 全ての関数 $f \in F$ に対して、
$$\forall x, y(x = y \supset f(x) = f(y))$$

(3) 全ての述語 $p \in P$ に対して、
$$\forall x, y(x = y \supset (p(x) \supset p(y)))$$

さらに、*(4)* を $\mathcal{L}\langle F; P\rangle$ に於ける関数反射律公理と呼び、$FE[F]$ と表わす。

(4) 全ての関数 $f \in F$ に対して、
$$\forall x(f(x) = f(x))$$
∎

定義 10 $\mathcal{L}\langle E\rangle$ を言語とする。F を $F \subseteq E$ なる関数記号の集合、f を $f \in F$ である任意の関数記号、s を項、t、u を s の部分項とする。このとき、$\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて t が s 中に F 出現することを以下 *(1)* 、*(2)* で定める。

(1) s が $f(t)$ のとき、t は $\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて s 中に F 出現する。

(2) s が $f(u)$ のとき、t が、$\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて u 中に F 出現するならば、t は $\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて s 中に F 出現する。 ∎

項 t が $\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて項 s に F 出現するとは、t が、s の外側から F の元のみで構成された入れ子の中に出現する部分項になっていることである。

例 4 $E = \{f, g, h\}$、$F = \{f, g\}$ のとき、$\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて、t は $f(g(f(t)))$ に F 出現する。s は $f(h(s))$ に F 出現しない。 ∎

次に、F 出現の定義を使用して、節集合中に現れる関数の一部のみに UNA を仮定することを考える。

定義 11 $\mathcal{L}\langle E\rangle$ を言語、F を $F \subseteq E$ なる関数記号の集合とする。このとき以下 *(1)*、*(2)*、*(3)* よりなる公理集合を $\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於ける F に対する UNA と呼び、$UNA[F;E]$ とあらわす。

(1) 全ての $f,g \in F$ に対して、$\forall x,y(f(x) \neq g(y))$

(2) 全ての $f \in F$ に対して、
$$\forall x,y(f(x) = f(y) \supset x = y)$$

(3) $\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて x が F 出現する全ての項 t に対して、
$$\forall x(x \neq t)$$ ∎

上の定義は、*(2)* で F 出現を使用していることが、通常の UNA の定義と異なる。

また、$F = E$ であるとき、$EQ[E;P] \cup UNA[F;E]$ は言語 $\mathcal{L}\langle E;P\rangle$ に対する UNA そのものとなることに注意されたい。

一般に、$UNA[F;E]$ は次の性質を持つ。

定理 3 G を節集合、F を $F \subseteq E$ なる関数記号の集合とする。このとき、$G \cup UNA[F;E]$ と $G \cup UNA[F;F]$ の充足不可能性が等しい。 ∎

以下では、節集合 G、及び、G によって定まる言語 $\mathcal{L}\langle E;P\rangle$、UNA を仮定する関数記号の集合 $F \subseteq E$ を定めたとき、$G \cup UNA[F;E] \cup EQ[E;P]$ が充足不能であるか否かを判定する方法を考える。

まず単純に $G \cup UNA[F;E] \cup EQ[E;P]$ を節集合に変換して導出を行なう方法が考えられる。しかし、$UNA[F;E]$ は可算無限個の節を含む為、極めて効率が極めて悪い。ここでは $UNA[F;E] \cup EQ[E;P]$ を加えるかわりに、等号調節と等号に関する新たな計算規則を導入する方法を取る。

まず、計算規則を定義する。

定義 12 (UNA 規則) 関数記号の集合 F に対して、次の推論規則 *(1)*、*(2)*、*(3)* を F の UNA 規則という。

(1) $s = t \vee C$、$f,g \in F$ に対して、$s = t$ と $f(x) = g(y)$ の mgu が θ のとき、節 $C\theta$ を推論する。

(2) $s = t \vee C$、$f \in F$ に対して、$s = t$ と $f(x) = f(y)$ の mgu が θ のとき、節 $x\theta = y\theta \vee C\theta$ を推論する。

(3) $s = t \vee C$ に対して、t に F 出現する項 u と s との mgu が θ のとき、節 $C\theta$ を推論する。 ∎

定義 13 G を節集合、Σ を導出規則の集合とする。

このとき、次の *(1)*、*(2)* を満たす節の列、$C_1,\ldots,C_n$ を G からの Σ による反駁列と定義する。

(1) $C_n = \Box$

(2) 全ての $C_i (1 \leq i \leq n)$ に対して、$C_i \in G$、または、C_i が $\{C_1,\ldots,C_{n-1}\}$ から $\varphi \in \Sigma$ により得られる。 ∎

定義 14 Σ が、UNA 規則、超導出、超等号調整である反駁列を、F-UNA 反駁列という。 ∎

次の定理が証明が得られる。

定理 4 F を関数記号の有限集合とする。$L = \mathcal{L}\langle F;P\rangle$ を一階の言語、A、B を L の任意の閉論理式とする。このとき、以下の *(1)*、*(2)* が同値である。

(1) $A, UNA[F;F], EQ[F;P] \models B$

(2) $Sk(A \wedge \neg B) \cup \{x = x\} \cup FE[F+F]$ からの、F-UNA 反駁が存在する。 ∎

上の定理での $UNA[F;F] \cup EQ[F;P]$ は通常の UNA と同じものであったことに注意されたい。定理 4 により、UNA を仮定した場合の演繹計算を行なうことができる。

6 結論

UNA と点別サーカムスクリプションを組み合わせることにより、一階論理の上で述語サーカムスクリプションの演繹計算のかなりの部分が行なえる。点別サーカムスクリプションは、制約の形に関わらず適用でき、得られた定理は述語サーカムスクリプションに対し健全である為、述語サーカムスクリプションの計算手法として有用である。

本研究では、UNA の計算手法として、F-UNA 導出を導入し、その完全性を示した。この計算手法により、UNA を仮定したときの点別サーカムスクリプションの演繹計算を行なう。また、UNA と点別サーカムスクリプション上での F-UNA 演繹は、Lifschitz[1] の分離式と、岩沼 [5] の述語サーカムスクリプションの計算法を、原理的に全て模倣でき、強力である。

謝辞

本研究は一部、大川情報通信基金 (1990 年度研究助成)、文部省科学研究費 (1990 年度奨励 A02858005) 及び電気通信普及財団 (1991 年研究助成) の援助を受けている。

補遺

以下では、補題、定理の証明を行なう。

定理 1 (点別サーカムスクリプションの健全性)

$$Cir[A;\Gamma] \models PW_n[A;\Gamma]$$

証明 $\Gamma = \{p_1, p_2\}$ のとき、

$$Cir[A;\Gamma] \vdash PW_2[A;\Gamma]$$

についてのみ証明する。述語サーカムスクリプションの定義式に於いて、

$$Q_j = \lambda u\,(p_j(u) \wedge u \neq x_j \wedge u \neq y_j)\ (1 \leq j \leq 2)$$

とすれば、$Cir[A;\Gamma]$ より、次式が得られる。

$$A \wedge \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} A\left[\begin{array}{l} p_1/\lambda u\,(p_1(u) \wedge u \neq x_1 \wedge u \neq y_1) \\ p_2/\lambda u\,(p_2(u) \wedge u \neq x_2 \wedge u \neq y_2) \end{array}\right] \\ \wedge \\ \underline{\bigwedge_{j=1}^{2} (\lambda u\,(p_j(u) \wedge u \neq x_j \wedge u \neq y_j) \leq p_j)} \end{array}\right] \\ \supset \bigwedge_{j=1}^{2} (p_j \leq \lambda u\,(p_j(u) \wedge u \neq x_j \wedge u \neq y_j)) \end{array}\right]$$

下線部は恒真式であり、簡約すれば、次式となる。

$$A \wedge \left[\begin{array}{l} \quad A\left[\begin{array}{l} p_1/\lambda u\,(p_1(u) \wedge u \neq x_1 \wedge u \neq y_1) \\ p_2/\lambda u\,(p_2(u) \wedge u \neq x_2 \wedge u \neq y_2) \end{array}\right] \\ \supset \ \bigwedge_{j=1}^{2} (p_j \leq \lambda u\,(p_j(u) \wedge u \neq x_j \wedge u \neq y_j)) \end{array}\right]$$

上式括弧内の対偶を取り、$\leq$ を展開すれば、

$$A \wedge \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \neg\forall z\,(p_1(z) \supset (p_1(z) \wedge z \neq x_1 \wedge z \neq y_1)) \\ \vee \\ \neg\forall z\,(p_2(z) \supset (p_2(z) \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq y_2)) \end{array}\right] \\ \supset \neg A\left[\begin{array}{l} p_1/\lambda u\,(p_1(u) \wedge u \neq x_1 \wedge u \neq y_1) \\ p_2/\lambda u\,(p_2(u) \wedge u \neq x_2 \wedge u \neq y_2) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

更に、含意の前半を変形して、

$$A \wedge \left[\begin{array}{l} \quad \left[\begin{array}{c} \exists z\,(p_1(z) \supset (z = x_1 \vee z = y_1)) \\ \vee \\ \exists z\,(p_2(z) \supset (z = x_2 \vee z = y_2)) \end{array}\right] \\ \supset \ \neg A\left[\begin{array}{l} p_1/\lambda u\,(p_1(u) \wedge u \neq x_1 \wedge u \neq y_1) \\ p_2/\lambda u\,(p_2(u) \wedge u \neq x_2 \wedge u \neq y_2) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

更に、等号により存在記号が消去でき、

$$A \wedge \left[\begin{array}{l} \quad \left[\begin{array}{c} P_1(x_1) \vee p_1(y_1) \\ \vee \\ p_2(x_2) \vee p_2(y_2) \end{array}\right] \\ \supset \ \neg A\left[\begin{array}{l} p_1/\lambda u\,(p_1(u) \wedge u \neq x_1 \wedge u \neq y_1) \\ p_2/\lambda u\,(p_2(u) \wedge u \neq x_2 \wedge u \neq y_2) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

上式の x_1、x_2、y_1、y_2 を全称束縛して、$PW_2[A;\Gamma]$ を得る。

その他の場合にも、全く同様に証明できる。 ∎

定理 2 $\models PW_n[A;\Gamma] \supset PW_{n-1}[A;\Gamma] \quad (n \geq 1)$

n 次点別サーカムスクリプションの定義式を縮約すれば、*n-1* 次式が得られる。 ∎

補題 1 F、E を $F \subseteq E$ なる関数記号の集合とする。このとき、言語 $\mathcal{L}\langle E\rangle$ に於いて変数 x が F 出現する項 u に対し、$u = v\theta$ となる、$\mathcal{L}\langle F\rangle$ に於いて変数 x が F 出現する項 v が存在する。

証明 本補題は多変数関数一般の場合について証明する。

(1) 条件 *(1)* により、F 出現となる場合。$f \in F$、u が $f(t_1, \ldots, t_{i-1}, x, t_{i+1}, \ldots t_n)$ となる。

(但し、$t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ は x と異なる項)

v は $f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots y_n)$ で、$\mathcal{L}\langle F\rangle$ に於いて x が F 出現する項であり、

$$\theta = \{t_1/y_1, \ldots, t_{i-1}/y_{i-1}, t_{i+1}/y_{i+1}, \ldots, t_n/y_n\}$$

とすれば、$v\theta = u$ となる。

(2) 条件 *(2)* を n 回適用して F 出現と定義される場合に補題が成立すると仮定する。$(n \geq 0)$

条件 *(2)* を *n+1* 回適用して F 出現と定義されるとき、$f \in F$、$u = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, u_1, t_{i+1}, \ldots t_n)$ で、u_1 は、n 回で F 出現と定義される。

帰納法の仮定より、u_1 に対して、$v_1 = u_1\theta_1$ となるような、補題を満たす v_1、θ_1 が存在する。よって、v として $\mathcal{L}\langle F\rangle$ の項で、u に含まれない変数 $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ を持つ項、

$$f(y_1, \ldots, y_{i-1}, v_1, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

を取ることができる。このとき、

$$\theta = \theta_1 \cdot \{t_1/y_1, \ldots, t_{i-1}/y_{i-1}, t_{i+1}/yi+1, \ldots, t_n/y_n\}$$

とすれば、$v\theta = u$ となる。 ∎

定理 3 Gを節集合、Fを$F \subseteq E$なる関数記号の集合とする。このとき、$G \cup UNA[F;E]$と$G \cup UNA[F;F]$の充足不可能性が等しい。

証明　導出原理の完全性より、節集合が充足不能であることと、反駁が存在することは同値である。よって、次の(1)、(2)が同値であることをいえば良い。

(1)　$G \cup UNA[F;E]$からの 反駁列が存在する。

(2)　$G \cup UNA[F;F]$からの 反駁列が存在する。　∎

更に、*UNA[F;E]*の定義より、定義*(1)*、*(2)*によって得られる公理は、$UNA[F;E]$、$UNA[F;F]$双方等しくなるので、定義*(3)*によって得られる公理のみについて見れば良いことになる。

(1) ⇒ *(2)* 補題*1*より、反駁に使用される$UNA[F;E]$に対応する$UNA[F;F]$の節が存在する。

(2) ⇒ *(1)* $UNA[F;F] \subseteq UNA[F;E]$であることより明らかである。　∎

定義 15 導出規則Σが、超導出、超等号調整からなる反駁列を、等号調整付超反駁列と呼ぶ。　∎

Chang & Lee[7]、定理8.1、8.3より直ちに、次の定理が得られる。

定理 5 (等号調整付超反駁の完全性) [7] $L = \mathcal{L}\langle F;P \rangle$を一階の言語、$G$を$L$上の節の有限集合とする。このとき、*(1)*、*(2)*が同値である。

(1)　節集合$G \cup \{x = x\} \cup FE[F]$からの 等号調整付超反駁列が存在する。

(2)　$G \cup EQ[F;P]$が充足不可能。　∎

補題 2 (F-UNA 反駁の健全性と完全性) Gを節の有限集合、$\mathcal{L}\langle E \rangle$を$G$によって定められる言語、$F$を$F \subseteq E$となる関数記号の集合とする。このとき、*(1)*、*(2)*が同値である。

(1)　節集合Gからの*F*-UNA 反駁列が存在する。

(2)　$G \cup UNA[F;E]$からの等号調整付超反駁列が存在する。

証明　*(1)* ⇒ *(2)* Gからの*F*-UNA 反駁列中の節C_iが、全て$G \cup UNA[F;E]$からの等号調整付超導出列を持つことを列の長さに関する数学的帰納法で示す。

(a)　$C_i \in G$のとき、明らか。

(b)　C_iがC_j、C_k $(j,k < i)$から、超導出または、超等号調整によって得られるとき。帰納法の仮定より、C_iは$G \cup UNA[F;E]$からの等号調整付超導出列を持つ。

(c)　C_iがC_j $(j < i)$から、UNA 規則*(1)*によって得られるとき。C_jは$s = t \vee C_i$の形をしていて、$f, g \in F$に対して、$a = t$と$f(x) = g(y)$のmguがθである。このとき、$f(x) \neq g(y) \in UNA[F;E]$と$C_j$に$\theta$を適用して、$C\theta$を導出することができる。

(d)　C_iがC_j $(j < i)$から、UNA 規則*(2)*によって得られるとき。C_jは、$s = t \vee C$の形をしており、$f \in F$に対して、$s = t$と$f(x) = g(y)$のmguがθである。このとき、$f(x) \neq f(y) \vee x = y \in UNA[F;E]$と$C_j$に$\theta$を適用して、節$x\theta = y\theta \vee C\theta$を導出できる。

(e)　C_iがC_j $(j < i)$から、UNA 規則*(3)*によって得られるとき。C_jは、$s = t[u] \vee C$の形をしており、$\mathcal{L}\langle E \rangle$に於いて$t$に$F$出現する項$u$が存在し、$s$と$u$の単一化が可能である。更に、$s$と$u$との$mgu$を$\theta$とすれば、$C_i$は、$C\theta$である。このとき、$x \neq t[x] \in UNA[F;E]$を用い、代入$\lambda = \{s/x\} \cdot \theta$により、$C\lambda$すなわち、$C\theta$を導出できる。

(2)⇒*(1)* $G \cup UNA[F;E]$からの等号調整付超反駁列中の節C_iが、全てGからの*F*-UNA 導出列を持つことを列の長さに関する数学的帰納法で証明する。

(a)　$C_i \in G$のとき、明らか。

(b)　C_iがC_j、C_k $(j,k < i)$から、超等号調整によって得られるとき。超等号調整の定義から、$C_j, C_k \in G$としてよい。よって帰納法の仮定より、Gからの*F*-UNA 導出列を持つ。

(c)　C_iが超導出で得られる場合。$C \in UNA[F;E]$は全て非肯定型の節である。よって超導出に使用する肯定型の節は、すべてGに属する。ゆえに、次の場合についてのみ証明する。超導出に使用する非肯定型の節をNと置く。

(c-0)　$N \in G$のとき、明らか。

(c-1)　$N \in UNA[F;E]$ (1) のとき、$f, g \in F$ に対して、N は $f(x) \neq g(y)$ の形であり、$s = t \vee C$ の形の $C_j (j < i)$ とから超導出がなされる。$f(x) = g(y)$ と $s = t$ の mgu を θ とすると、C_i は $C\theta$ である。このとき、UNA 規則 (1) により、節 $C\theta$ が得られる。

(c-2)　$N \in UNA[F;E]$ (2) のとき、$f \in F$ に対して、N は $f(x) \neq f(y) \vee x = y$ の形であり、$s = t \vee C$ の形の C_j $(j < i)$ とから超導出がなされる。$f(x) = f(y)$ と $s = t$ の mgu を θ とすると、C_i は $x\theta = y\theta \vee C\theta$ である。このとき、UNA 規則 (2) により、節 $x\theta = y\theta \vee C\theta$ が得られる。

(c-3)　$N \in UNA[F;E]$ (3) のとき、X が F 出現する項 $t[x]$ に対して、N は $x \neq t[x]$ の形であり、$s = t[u] \vee C$ の形の $C_j (j < i)$ とから超導出がなされる。$x = t[x]$ と $s = t[u]$ の mgu を θ とすると、節 $C\theta$ が導出される。このとき、s と u は単一化可能なので、UNA 規則より、同じ節が得られる。 ∎

定理 4 F を関数記号の有限集合とする。$L = \mathcal{L}\langle F;P\rangle$ を一階の言語、A、B を L の任意の閉論理式とする。このとき、以下の (1)、(2) が同値である。

(1)　$A, UNA[F;F], EQ[F;P] \models B$

(2)　$Sk(A \wedge \neg B) \cup \{x = x\} \cup FE[F]$ からの、F-UNA 反駁が存在する。

証明　F_s を、新たに導入されたスコーレム関数の集合とする。

$A, UNA[F;F], EQ[F;P] \models B$

$\Updownarrow$

$A \cup \{\neg B\} \cup UNA[F;F] \cup EQ[F;P]$

充足不能

$\Updownarrow$ スコーレム化の性質

$Sk(A \wedge \neg B) \cup UNA[F;F] \cup EQ[F;P]$

充足不能

$\Updownarrow$ 定理 3

$Sk(A \wedge \neg B) \cup UNA[F;F+F_s] \cup EQ[F;P]$

充足不能

$\Updownarrow$ 定理 5

$Sk(A \wedge \neg B) \cup UNA[F;F+F_s] \cup \{x = x\} \cup FE[F]$

から等号調整付超反駁が存在

$\Updownarrow$ 補題 2

$Sk(A \wedge \neg B) \cup \{x = x\} \cup FE[F]$

から F-UNA 反駁が存在 ∎

参考文献

[1] Lifschitz,V. :Computing Circumscription, Preliminary Report, Proc.of 9th IJCAI 85'pp.121-127(1985)

[2] Lifschitz,V. :Pointwise Circumscription, Preliminary Report, Proc.of AAAI 86'pp.406-411(1986)

[3] McCarthy,J. :Circumscription - A Form of Non-Monotonic Reasoning, Artif.Intell.13 pp.27-39(1980)

[4] Perlis,D. & Minker,J. :Completeness Results for Circumscription, Artif.Intell.28 pp.29-42(1986)

[5] 岩沼宏治: サーカムスクリプションに基づく計算法に関する基礎的研究, 博士論文, 東北大学 (1991)

[6] Lloyd,J.W. :Foundation of Logic Programming, Springer-Verlag(1984) 佐藤, 森下 (訳) 論理プログラミングの基礎, 産業図書 (1987)

[7] Chang,C.L. & Lee,R.C. :Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, AcademicPress(1973) 長尾, 辻井 (訳) コンピュータによる定理の証明, 日本コンピュータ協会 (1983)