人　工　知　能 100－7
（1995．5．25）

平面幾何定理の発見システム

村田 剛志　　志村 正道
{murata, shimura}@cs.titech.ac.jp

東京工業大学 大学院情報理工学研究科 計算工学専攻

概要

平面幾何の領域において図形から抽出した式を基に平面幾何の定理や三角関数の公式を発見するシステムとして著者らはDST を発表した。このDST は補助線によって生じる副生成物の消去を発見の基準としているが、多くの定理を発見するための式の有用性の基準としては不十分であった。本論文では観察によって得られる図形中の辺の関係を発見の基準とする手法を提案し、それを実現した平面幾何定理発見システム PLANET について述べる。PLANET は幾何についてのごくわずかの知識から、メネラウスの定理や三角関数の加法定理など、多くの有用な平面幾何の定理や三角関数の公式を再発見している。

A Discovery System for Plane Geometry Theorems

Tsuyoshi MURATA and Masamichi SHIMURA

Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 O-okayama, Meguro, Tokyo 152, Japan

Abstruct

We presented a discovery system for trigonometric functions (DST), which discovers plane geometry theorems and formulas of trigonometric functions from the expressions extracted from a figure. It regards the acquired expressions as useful that include no subproduct, a geometric element which is generated by drawing an auxiliary line on a figure. The criteria for usefulness is, however, insufficient for discovering many useful geometry theorems. This paper proposes a new method for getting a criteria for usefulness by observing relations among sides in a figure, and describes a discovery system for plane geometry theorems (PLANET) we developed. PLANET has rediscovered many useful geometry theorems and trigonometric formulas, such as Menelaus' theorem and addition theorems of trigonometric functions, with little geometric knowledge.

1 はじめに

対象世界を観察して得られたデータを基に有用な規則性や法則を発見することは、人間の活動の中でも最も創造的で困難なものの一つである。発見を行なうシステムを計算機上に実現することは、人間の高度な知的活動を明らかにする上で非常に興味深い。BACON[3]、FAHRENHEIT[7]、ABACUS [1]、KEKADA[2]、IDS[6] など数多くの発見システムが構築されてきたが、その多くは物理学や化学の分野においてあらかじめ与えられた多くの仮説やデータを基に発見を行なうものである。人類が初期の文明において多くの発見を行なってきた領域の一つとして幾何学が挙げられるが、この領域を対象とした発見システムの研究は数少ない。平面幾何の領域における発見手法の研究は発見システムの研究に対してだけでなく、図形を扱う他の研究に対しても有用であると考えられる。AM[4] は幾何の領域における実験を行なっているが、多くの初期知識をヒューリスティクスとして持っており、しかも発見された知識は定理や公式ではなく、図形の回転や相似などの概念の発見に留まっている。

平面幾何の定理を対象とした発見システムとしては DST[5] が挙げられる。図形に補助線を付加することで生じた辺や角などの副生成物を図形に関する式から消去したものを定理とみなすという単純な発見の基準を採用することで、DST はわずかな初期知識しかもたないにも関わらず有用な平面幾何の定理や三角関数の公式を発見している。副生成物の消去という発見の基準は式の組合せの爆発を回避する上で有効だが、導出の過程で副生成物の数が増加するような複雑な式変形を伴う定理の発見は困難であり、また定理の中には副生成物を含んでいるものもあるが、DST はそのような定理を導出しても有用とみなさない。副生成物の消去という DST の発見の基準は、図形に関する式の有用性の基準としては不十分である。

本研究では DST が発見出来ない平面幾何の定理や三角関数の公式を発見するための手法を提案し、平面幾何定理発見システム PLANET (A Discovery System for Plane Geometry Theorems) を構築した。PLANET は図形中の辺の関係を表す木を基にして式変形を行なうことで、メネラウスの定理や三角関数の加法定理などの平面幾何の定理や三角関数の公式の再発見に成功している。

2 三角関数における発見システムＤＳＴ

2.1 DST の発見の手法

三角関数の発見システム DST は平面図形処理システムと数式処理システムの二つのサブシステムから構成されている。前者は三角形に対して補助線を付加し、辺や角などの図形要素の大きさに制約を与え、図形から関係式を抽出する。後者はその関係式から、補助線によって生じた図形要素である副生成物を消去することで有用な定理を導出し、得られた定理を平面図形処理システムに渡すことで別の定理の発見の際に利用できるようにする。このような機構により、DST は $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ などの基本的な三角関数の公式や、三平方の定理や余弦定理などの有用な平面幾何の定理を再発見している。

2.2 DST の限界

DST の数式処理システムは、補助線によって生じた副生成物を一つずつ消去する式変形によって得られる副生成物を含まない式を定理として発見している。しかし、一般に与えられた図形中のどの図形要素を消去すべきものとみなすかは自明ではない。複雑な定理を導出する際には、式変形の過程で一度導入した図形要素を後の式変形で消去するような変形を行なうことがある。また、一つの図から複数の定理が発見されるとき、ある定理を発見する際には消去の対象となる図形要素が、別の定理を発見する際には残すべきものとなることがある。このような場合、図中の図形要素をあらかじめ消去すべきものとそうでないものとに分類しておくことは困難であるため、副生成物を消去することで定理を導出するという DST の発見の手法では導出することが出来ない定理や、導出しても発見とみなされない定理が生じてしまう。

式変形の結果得られる多くの関係式の中で、人間は図の中で互いに関連する図形要素についての式を有用とみなすことが多い。DST は図形から抽出された関係式の集合と消去すべき図形要素のみから式変形を行なうが、図形要素の関連性を図から観察し発見の基準とすることによって DST より強力な発見システムを構築できると思われる。

3 平面幾何定理発見システム PLANET

3.1 PLANET の構成

平面幾何定理発見システム PLANET は図 1 に示すように、図形処理サブシステムと数式処理サブシステムの二つから構成される。図形処理サブシステムは図の中の辺の関係を観察し、辺の関係を表す木を生成し、その木の中で有用なものを数式処理サブシステムに渡す。数式処理サブシステムはその木を基に式変形を行なって有用な定理を発見する。

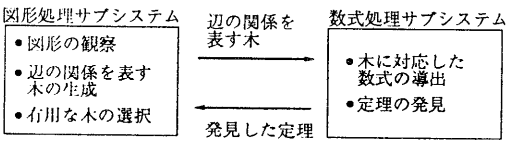

図 1: PLANET の構成

3.2 辺の関係を表す木の生成

PLANET の図形処理サブシステムは図形を観察して以下の 4 種類の図形的関係から辺の長さについての式を抽出する。

- 同一直線上にある三点が構成する三線分の関係
- 直角三角形における二辺の関係
- 二つの相似の三角形における対応する二組の辺の関係
- 二つの合同な三角形における対応する一組の辺の関係

これらの関係から得られる式を一つの辺について解いた式は、その辺の長さを表すために必要な辺の集合を表していると言える。例えば図 2の図形において、辺 CO の長さは三点 C、O、A が同一直線上にあることから辺 CA と OA によって表現でき、また $\triangle ABC$ と $\triangle BOC$ が相似であることから辺 AB、BC、OB によっても表現できる。図形処理サブシステムはこれらの辺の関係を図 2 の木でそれぞれ表す。

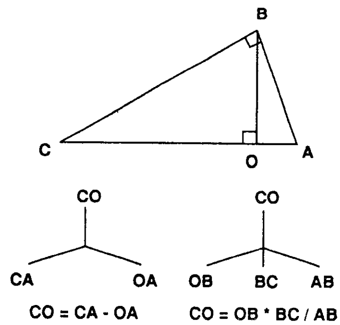

図 2: 辺の関係を表す木

図 2に示す図形において辺 CO を表すための図形的関係としては以下のものがある。

- 点 C、O、A が同一直線上
- 三角形 BCO が直角三角形
- 三角形 ABC と三角形 BCO が相似
- 三角形 BAO と三角形 BCO が相似

図形処理サブシステムはこれらの図形的関係から得られる木それぞれに対し、その源になる図形的関係を付加する。これによって得られる辺 CO と他の辺の関係を表す木を図 3に示す。この木は丸で囲まれた図形中の辺が、四角で囲まれた図形的関係によって他の辺と関係づけられていることを表している。例えばこの木の左端の枝は、三点 C、O、A が同一直線上にあるという図形的関係から辺 CO の長さが辺 CA と AO で表現されることを表している。それ以外の図形的関係からも、辺 CO を根とする木の枝がそれぞれ生成されている。

図 3の木において根の辺の長さを表すための辺集合を求める際、辺の節点はそこから伸びる複数の枝のいずれか一つを選ぶ OR 節点であるのに対し、図形的関係の節点はそこから伸びる複数の枝全てを必要とする AND 節点であることがわかる。このような木において、根から出発して OR 節点から出る一つの枝と AND 節点から出る全ての枝をたどることで得られる木を部分木と呼ぶ

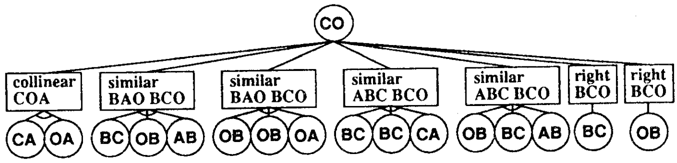

図 3: 辺 CO を根とする AND-OR 木

ことにする。図 3は 7 つの部分木を含む木である。図 2の図形の CO 以外の各辺についても同様の AND-OR 木を生成することで辺の関係を抽出する。

3.3 木の結合

辺についての二つの式から一つの辺を消去して得られる式を、それぞれの式に対応する木の一方の葉を他方の根と結合した木によって表すことにする。辺 CA を根とする木を図 3の木と結合することで得られる木を図 4に示す。例えば図 4において色のついた部分木に対応する式は、結合前の木の図形的関係から得られる式 $CO = CA - OA$ と $CA = AB^2/OA$ から辺 CA を消去して導出される $CO = AB^2/OA - OA$ という式である。

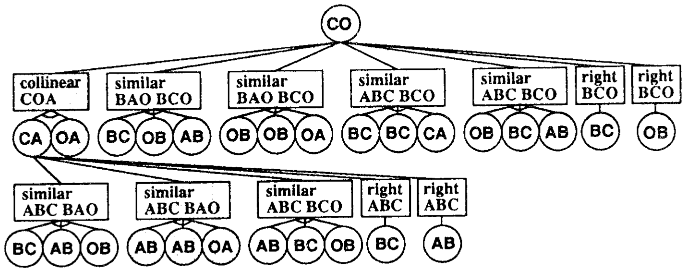

図 4: 辺 CA の節点で結合した AND-OR 木

PLANET の図形処理システムが木を結合するための知識としてもつのは以下の二つだけである。

1. 根につながる図形的関係の節点から葉までの経路中に同一の節点が複数回現れる枝は削除する
2. 根と同じ辺を表す葉には木を結合させない

1により、図 4において CA を根とする木を結合する際には、CA を根とする木の枝の中から C、O、A が同一直線上にあるという図形的関係の節点をもつ枝を削除する。同じ図形的関係から抽出された式を組み合わせて導出される式は、その図形的関係から抽出される式の一つとして既に存在するためである。2に関しては、そもそも木は根の辺を他の辺集合と関係づけるためのものであり、根と同じ辺を表す葉に更に木を結合しても新たな辺集合が得られないためである。

人間が図形から式を抽出して式変形をする際には、同じ図形的関係から得られる式を複数用いないというヒューリスティクスによって無駄な式変形を回避していると思われる。PLANET が木の生成の際に先の知識を用いることは、図形から式を抽出する際に失われてしまう図形的関係を用いて無意味な式変形を回避することであると言える。

3.4 有用な木の選択

辺の関係を表す木に含まれる部分木はそれぞれ根の辺を表す式に対応しているが、木が大きくなるにつれて部分木の個数が増え、対応する式の数も増える。図形処理サブシステムはそれらの部分木の中から有用な式に対応するものを選び、数

式処理サブシステムに渡す。木を評価する基準としては、木の根と葉の辺集合の関係を採用する。一般に、平面幾何における有用な定理は図形中で互いに関係のある図形要素に関する式であるものが多い。木を基にした式変形によって得られる式はその木の根と葉の辺集合に関する式であるため、木の根と葉の辺集合が以下の条件のいずれかを満たすものを有用な式に対応する木とする。

1. 木の根と葉が全て同一の辺である
2. 木の根と葉の辺が閉図形を構成する
3. 木の根と葉の辺が一端点を共有する

1の条件を満たすのは木の根の辺を他の辺集合で表すことを繰り返すうちに最終的に根と同じ辺だけで表される場合である。このような木を基に式変形を行なうとその辺は共通の約数として消去され、三角関数の公式が得られる。2や3の条件を満たすのは、図形的に互いに関連する辺集合が木によって関連づけられた場合である。このような木を基に式変形を行なうとその辺集合に関する定理や、共有する点の周囲の辺や角に関する定理がそれぞれ得られる。

3.5 定理の導出

辺集合の有用な関係を表す木は図形処理サブシステムから数式処理サブシステムに渡される。数式処理サブシステムでは、その木の根と葉以外の節点の辺を代入によって消去し、式の中の角や辺で大きさの等しいものを同一のものに置き換えることで定理を導出する。

4 実験結果と考察

4.1 三平方の定理の再発見

前節で述べた発見の手法に基づき、平面幾何定理発見システム PLANET を構築し実験を行なった。PLANET の図形処理サブシステムは図中の辺を根とする木の葉それぞれに対して、その葉の辺を根とする木を結合することで木の高さを一段増やし、得られた木に含まれる部分木の中から有用なものを選んで数式処理サブシステムに渡すことを繰り返していく。木が大きくなっていくにつれて部分木の数は増大するが、同一の節点を複数個もつ枝の削除などによって組合せの爆発を回避し発見に成功している。

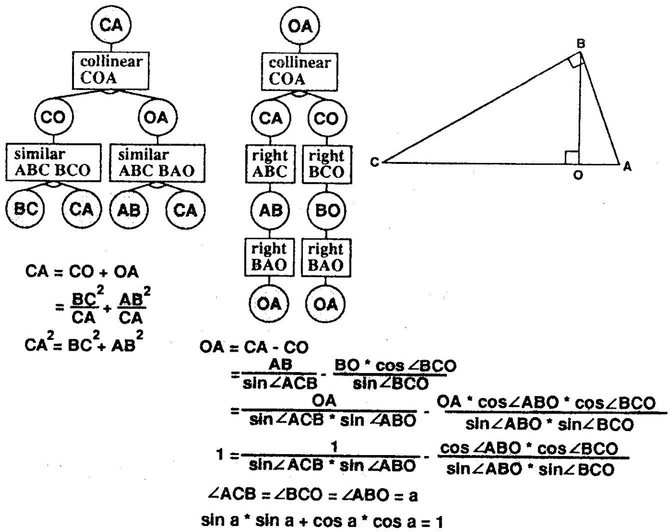

図 5: 三平方の定理の再発見

DST が再発見した主要な定理である三平方の定理と $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ の公式を PLANET が再発見する際に用いた図形と、図中の辺の関係を表す木を図 5に示す。辺 CA を根とする木の多くの部分木の中で、図 5の左の木は根と葉の辺集合が $\triangle ABC$ という閉図形を構成するため有用な木として数式処理サブシステムに渡され、その木を基に式変形を行なうことで PLANET は三平方の定理を再発見している。同様に辺 OA を根とする木の中で図 5の右の木は根と葉が同一の辺であり、この木を基に式変形を行なうことで $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ という三角関数の公式を再発見している。

図 5の図形を用いて補助線 BO で生じた副生成物を消去する式変形によって DST も三平方の定理を発見しているが、その副生成物以外の辺 AB、BC、CA は閉図形 $\triangle ABC$を構成するため、PLANET はそれらの辺を根と葉の辺集合としてもつ木を有用とみなし、それを基に式変形を行なうことで三平方の定理を発見している。辺集合の有用な関係を表す木を基にした式変形により、DST が副生成物の消去という基準によって発見した定理以外の有用な定理も PLANET は発見している。DST は $BC^2 = CA * CO$や $AB^2 = CA * OA$ のようなユークリッドの定理を導出しても発見とはみなさず、副生成物の消去という発見の基準は式の有用性を判断する基準としては不十分であった。PLANET の図形処理サブシステムは木の根と葉の辺集合が一点を共有するものも有用な木とみなすため、PLANET ではこれらの定理も有用なものとして発見している。PLANET の発見の基準は DST のそれを一般化したものであると言える。

DST は三平方の定理を発見した後に、三角関数の定義式を用いて辺を一つずつ消去する式変形によって三角関数の公式 $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ を発見している。副生成物を消去して平面幾何の定理を発見する毎にその定理から辺を消去することで三角関数の公式を発見する DST の手法は、辺を全て消去できない平面幾何の定理に対しても消去を試みて無駄な式変形をしてしまう可能性があり、

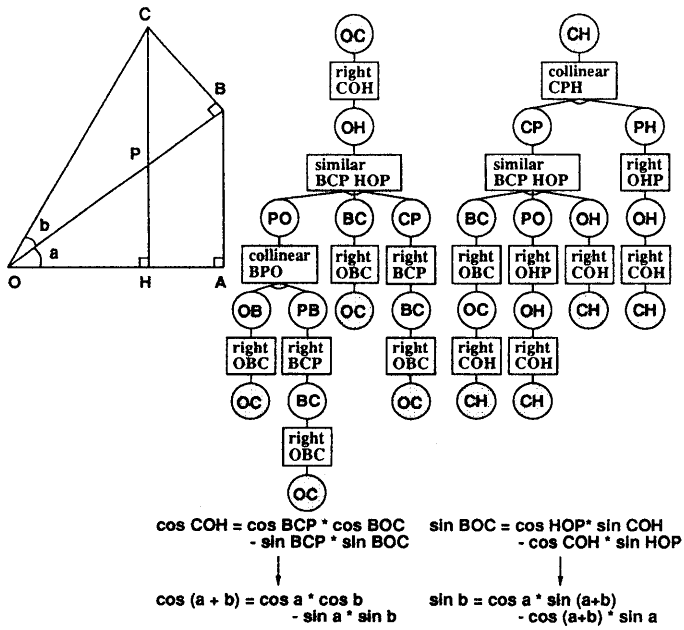

図 6: 加法定理の再発見

それを避けるためには式変形の切替えに関する知識を発見システムがあらかじめもっている必要がある。PLANET はそのような 2 種類の式変形を必要とせず、有用な辺集合をもつ木を基にした式変形という単一の手法によって三平方の定理と $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ の公式の両方を発見している。

4.2 三角関数の加法定理の再発見

三角関数の加法定理は、倍角公式や半角公式など多くの三角関数の公式の基礎となる定理である。DST による三角関数の公式の発見は、平面幾何の定理を発見した後に三角関数の定義式を用いて辺を消去することでなされているが、三角関数の加法定理においてはそのような対応する平面幾何の定理がない。加法定理の証明としては単位円やベクトルを用いて示すのが一般的であるが、人間による定理証明では与えられた定理を簡潔に証明するために多くの知識を用いて有効な手法を選択できるのに対し、発見システムがわずかな知識を基に試行錯誤をしながら有用な定理を発見していく過程においては、出来る限り多くの定理を発見できる単一の手法が望ましい。

三角関数の加法定理の再発見に用いた図と図中の辺の関係を表す木を図 6に示す。PLANET の図形処理サブシステムは辺 OC を根とする木で全ての葉が根と同じ辺 OC となった図 6の左の木を有用なものとして数式処理サブシステムに渡す。この木を基に式変形をすると辺に関する項が消え三角関数だけの式となる。同じ大きさの角を同一の変数に置き換えることで $cos(a + b) = cos\ a * cos\ b - sin\ a * sin\ b$ という良く知られた加法定理を再発見する。同様に辺 CH を根とする図 6の右の木を基にして $sin(a + b)$ に関する定理を再発見する。

補助線によって生じる副生成物はその補助線の周辺に集中しているため、DST はそれらを消去すべき図形要素として明確にすることで式変形を行なうことができた。加法定理の発見の基となった図 6の木を観察すると、式変形において消去の対象となる図形要素が図中のあちこちに点在しており、消去すべき図形要素をあらかじめ決めることができないため DST の手法では式変形ができないことがわかる。PLANET の手法はこのような比較的複雑な式変形を必要とする場合でも有効であることが加法定理の発見によって示された。

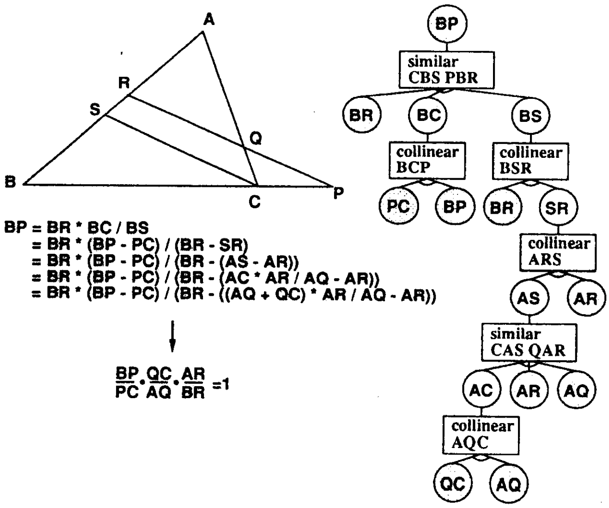

図 7: メネラウスの定理の再発見

4.3 メネラウスの定理の再発見

PLANETは、平面幾何の定理の中で応用範囲が広いメネラウスの定理の再発見にも成功している。再発見に用いた図形と辺の関係を示す木を図7に示す。図7の木の根と葉の辺集合である辺BP、PC、QC、AQ、AR、BRは閉図形を構成するため有用な木とみなされ、その木を基に式変形をすることでメネラウスの定理を再発見する。人間がメネラウスの定理を証明する際には、相似の三角形の相似比の式を辺辺掛け合わせて示すことが多いが、これは証明すべき定理が与えられているから出来る手法であり、わずかな知識を基に定理を発見する手法としては適当でない。

PLANETは辺の有用な関係を表す木を基に式変形をするという、三平方の定理や加法定理の発見と同じ手法でメネラウスの再発見に成功している。平面幾何におけるこれらの有用な定理を全て同一の手法で再発見したことは、PLANETの発見手法の有効性を示しており注目に値する。

5 おわりに

本研究では平面幾何の領域において有用な定理を発見するための手法を提案し、平面幾何定理発見システムPLANETを構築した。PLANETはごくわずかな初期知識を基に、図から式を抽出する段階で失われてしまう図形的関係を用いて図形中の辺の関係を表す木を生成しそれを基に式変形をするという単一の手法で、DSTが再発見した主要な定理だけでなく、三角関数の加法定理やメネラウスの定理など、DSTでは発見することの出来なかった多くの有用な定理を再発見している。

PLANETが発見のために必要とする初期知識は以下のものだけである。

- 直角三角形の二辺の比による三角関数の定義
- 三角形の相似、合同の定義
- 辺の関係を表す木に関する知識

最初の二つは図形を観察して辺の式を抽出するために必要な定義であり、DSTに対しても与えられていたものである。最後のものは辺の図形的な関係を用いた式変形を行ない、式の有用性を判断するために必要である。これらのごくわずかな初期知識を基に多くの有用な定理を再発見したことで、PLANETの発見手法の有効性を示すことができた。

参考文献

[1] B. C. Falkenhainer and R. S. Michalski. Integrating Quantitative and Qualitative Discovery: The ABACUS System. *Machine Learning*, Vol. 1, No. 4, pp. pages 367–401, 1986.

[2] D. Kulkarni and H. A. Simon. Experimentation in Machine Discovery. In J.Shrager and P.Langley, editors, *Computational Models of Scientific Discovery and Theory Formation*, pp. 255 – 273. Morgan Kaufmann Publishers, 1990.

[3] P. W. Langley, G. L. Bradshaw, and H. A. Simon. Rediscovering Chemistry with the BACON System. In R. S. Michalski, J. G. Carbonell, and T. M. Mitchell, editors, *Machine Learning : An Artificial Intelligence Approach*, pp. 307–329. Tioga, 1983.

[4] D. B. Lenat. The Role of Heuristics in Learning by Discovery: Three Case Studies. In R. S. Michalski, J. G. Carbonell, and T. M. Mitchell, editors, *Machine Learning : An Artificial Intelligence Approach*, pp. 243 – 306. Tioga, 1983.

[5] T. Murata, M. Mizutani, and M. Shimura. A Discovery System for Trigonometric Functions. In *Proceedings, Twelfth National Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 1, pp. 645 – 650. The AAAI Press, 1994.

[6] B. Nordhausen and P. Langley. An Integrated Approach to Empirical Discovery. In J.Shrager and P.Langley, editors, *Computational Models of Scientific Discovery and Theory Formation*, pp. 97 – 128. Morgan Kaufmann Publishers, 1990.

[7] J. M. Zytkow. Combining many searches in the FAHRENHEIT discovery system. In *Proceedings of the Fourth International Workshop on Machine Learning*, pp. 281 – 287. Morgan Kaufmann, 1987.