

情報量基準による幾何学的推論

金谷 健一[†]

群馬大学工学部情報工学科

著者は前論文で、統計学の AIC を変形した幾何学的 AIC を幾何学的モデル選択の基準として導入し、ロボットの画像やセンサデータからの 3 次元環境モデル構築への応用を示した。本論文ではこれをステレオ視、動画画像、およびオプティカルフローからの 3 次元復元の問題に適用する。抽象化すると、このような 3 次元復元はすべて高次元空間内に分布するデータ点にパラトリックな多様体として定義したモデルを最適に当てはめる問題とみなせる。このとき、対象物体が平面であったり、カメラの運動が純粋回転であると特別のモデルが必要となる。そこで、一般のモデルとこれらのモデルの多様体の相互の幾何学的関係を述べ、与えられたデータに対してどのモデルが最も適切が、データに含まれる誤差の大きさに関する知識や統計学の仮説検定で必要とされる恣意的な有意水準を用いずに判定できることを示す。

キーワード: AIC, 仮説検定, モデル選択, ステレオ視, 動画画像解析, オプティカルフロー

Geometric Inference by an Information Criterion

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

In his previous paper, the author derived the *geometric AIC criterion* by modifying the AIC criterion known in statistics and suggested its use for selecting a geometric model in robotics applications, such as building a geometric model of the environment from image and sensor data. This paper focuses on the problem of 3-D reconstruction from stereo images, motion images, and optical flow. In abstract terms, the problem can be regarded as fitting a *model* defined as a parameterized *manifold* to data points in high dimensions. If the object surface is planar or the camera is in pure rotation, special models become necessary. Describing the geometric interrelationships of the corresponding manifolds, we show that the most plausible model can be selected without using any knowledge of the magnitude of the noise or an ad hoc significance level necessary for the traditional statistical testing of hypothesis.

Key words: AIC, testing of hypothesis, model selection, stereo vision, 3-D motion analysis, optical flow

謝辞: 本研究の発端となった討論をして頂いた東京大学工学部の甘利俊一教授に感謝します。また、本研究に参加して頂いた群馬大学工学部の太田直哉助手、群馬工業高専の金沢靖助手、および筆者の研究室の大学院諸君にも感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費一般研究 B(No. 07458067) および大川情報通信基金からの助成による。

[†] 376 桐生市天神町 1-5-1 群馬大学工学部情報工学科
Tel: (0277)30-1841, Fax: (0277)30-1801
E-mail: kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

1. はじめに

ロボットが自律的に作業するには画像やセンサデータからの3次元環境理解が不可欠である。その根源的な問題は画像やセンサデータには誤差があることである。これを解決する基本的な方法は、得られたデータに2次元および3次元物体のモデルを最適に当てはめることである。物体のモデルは直線、円、平面、円筒、球などのプリミティブから構成される。したがって、

1. モデルを選択する、
2. モデルを最適に当てはめる、

の2段階が必要である。これはより抽象的なレベルにも当てはまる。例えば動画画像から物体の3次元構造を復元する動画画像の3次元解析は、動画データにそれが3次元空間を移動する物体の投影像であるというモデルを最適に当てはめる操作である。この問題は3次元復元とも呼ばれ、最適な復元の研究に数理的な方法が駆使されてきた[1, 6]。

一方、モデル選択として提案されているのは、経験的な推論規則がほとんどである。これに対して筆者は統計学で広く利用されているAIC[16]を変形した幾何学的AICを導入し、恣意的な有意水準を用いずにモデルのよさを比較する判定方式を提案した[7]。また、AICは元来データ数が無限大の極限の漸近的解析から得られるものであるが、誤差が0の極限の擾動解析(第1近似)を行なっても同様な結論が得られることを示した[8]。本論文ではその応用として、ステレオ視、動画画像、およびオプティカルフローからの3次元復元問題を例にとり、データの誤差の大きさを知ることなしに物体の形状やカメラの運動に関する推論が可能であることを示す。

2. ステレオ視による3次元復元

2.1 一般モデル

カメラのレンズの中心を原点とし、その光軸をZ軸とするXYZ座標系をとる。原点Oと撮像面との距離を長さの単位にとれば、撮像は画像面Z=1への透視変換とみなせる。画像面上で光軸の位置を画像原点とし、X軸、Y軸に平行なxy画像座標軸をとると、画像座標(x, y)の点はXYZ座標系に関してベクトル $x = (x, y, 1)^T$ で表される。このカメラをXYZ座標系に関して原点Oの周りに回転行列Rだけ回転し、ベクトルhだけ平行移動した位置に第2のカメラを置いたステレオ視を考える。 $\{h, R\}$ を運動パラメータと呼ぶ。第2のカメラに関するX'Y'Z'座標系をとり、同様にx'y'画像座標系を定義すると、画像座標(x', y')の点はX'Y'Z'座標系に関してベクトル $x' = (x', y', 1)^T$ で表される。

空間中のある特徴点が第1, 第2のカメラ座標系に関してそれぞれベクトル x, x' で表される位置に観測されるとすると、画像に誤差がなければよく知られた次のエッジ極線方程式が成立する[1, 6]。

$$(x, Gx') = 0 \quad (1)$$

行列Gは次のように定義され¹、基本行列と呼ばれる。

$$G = h \times R \quad (2)$$

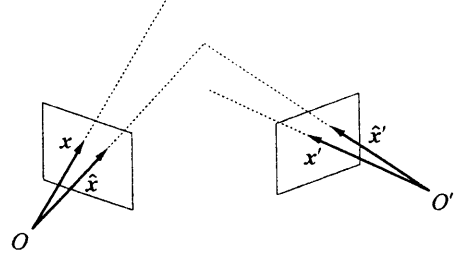


図1: 視線が交わるように補正する。

しかし画像に誤差があり、対応する特徴点の位置を画像間の局所的相関を計算しながら探索すると、 x, x' は式(1)のエッジ極線方程式を満たすとは限らない。このことは、ベクトル x, x' の定める「視線」が空間中で交わらないことを意味する(図1)。したがって、視線が交わるようにベクトル x, x' をそれぞれ $\hat{x}, \hat{x}'$ に補正しなければならない。

いまN個の対応点 $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha), \alpha = 1, \dots, N$ が与えられたとし、これをベクトル x_α, x'_α で表し、それらの共分散行列をそれぞれ $V[x_\alpha], V[x'_\alpha]$ とする²。画像処理によって得られるデータの精度をあらかじめ正確に推定することは実際上困難であるが、誤差の傾向(一様であるとか等方であるとか、ある方向に出やすいなど)を定性的に予想するのは可能であることが多い。そこで、以下では各データの共分散行列 $V[r_\alpha]$ が定数倍を除いて既知であると仮定する。すなわち、ある定数 ϵ があって

$$V[x_\alpha] = \epsilon^2 V_0[x_\alpha], \quad V[x'_\alpha] = \epsilon^2 V_0[x'_\alpha] \quad (3)$$

と書けて、 ϵ は未知であるが $V_0[r_\alpha]$ は既知であるとする。 ϵ をノイズレベル、 $V_0[r_\alpha]$ を正規化共分散行列と呼ぶ[6]。

ベクトル x, x' を補正する問題は、見方を変えると次のように解釈できる。対応点 $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha), \alpha = 1, \dots, N$ が与えられたということは、4次元データ空間 $\mathcal{R}^4$ にN個の点 $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha)^T$ が与えられたとみなせる。エッジ極線方程式(1)は $\mathcal{R}^4$ に3次元多様体 S を定義する。多様体 S は未知数を含んでいないので(自由度0)、それ自身が最尤推定量 $\hat{S}$ でもある。次元は3、余次元1である。このモデルの幾何学的AIC[7](以下、単にAICと呼ぶ)は次のようになる。

$$AIC_0(S) = S(\hat{S}) + 6N\epsilon^2 \quad (4)$$

x_α, x'_α の真の位置の最尤推定量をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{x}'_\alpha$ とする。これらは4次元データ r_α を多様体 S に最適に³射影したものであり(図2)、解析的に計算できる[5, 6, 12]。そして、残

¹ベクトル $u = (u_i)$ と行列 $A = (A_{ij})$ の外積 $u \times A$ はその(ij)要素が $\sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ikl} u_k A_{lj}$ の行列と定義する。ただし ϵ_{ijk} はエディンガトンのイブシロン((iji)が(123)の偶順列なら1, 奇順列なら-1, それ以外は0)である。

²ベクトル x_α, x'_α のZ成分は定数1であるから、 $V[x_\alpha], V[x'_\alpha]$ はxy面を値域とするランク2の特異行列である。

³すなわち、共分散行列の定義するマハラノビス距離が最小になるように射影する[5, 6]。

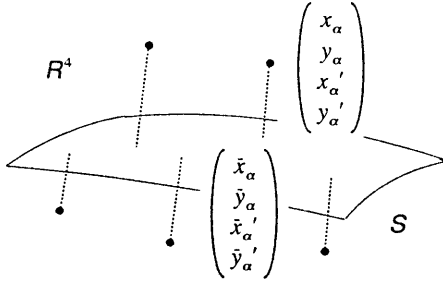


図 2: 4 次元データを多様体 S に最適に射影する。

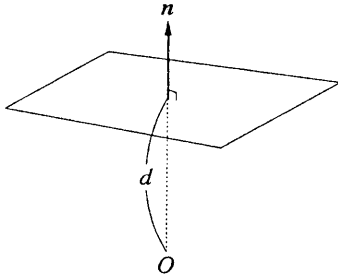


図 3: 平面パラメータ。

差平方和 $S(\hat{S})$ が次のように表せる。

$$S(\hat{S}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(x_{\alpha}, Gx'_{\alpha})^2}{(x'_{\alpha}, G^T V_0[x_{\alpha}] G x'_{\alpha}) + (x_{\alpha}, G^T V_0[x'_{\alpha}] G^T x_{\alpha})} \quad (5)$$

モデル S が正しいとすれば $S(\hat{S})/\epsilon^2$ が自由度 N の χ^2 分布⁴に従う [6, 9, 12]。

2.2 平面モデル

物体面が平面である場合を考える。その平面の単位法線ベクトルを第 1 のカメラに関する XYZ 座標系に関して n とし、原点 O からその平面までの距離 (ベクトル n の方向に正と約束する) を d とする。位置ベクトルを r とすると、平面の方程式は $(n, r) = d$ と書ける。以下 $\{n, d\}$ を平面パラメータと呼ぶ (図 3)。第 1, 第 2 カメラ座標系についてそれぞれ x, x' で表される点がこの平面上にある必要十分条件は次式が成り立つことである [1, 4, 5, 6, 11]。

$$x' \times Ax = 0 \quad (6)$$

ただし A は次のように定義した 3 次元行列である。

$$A = R^T(hn^T - dI) \quad (7)$$

画像に誤差があれば、式 (6) は厳密には成立しない。式 (6) は x, x' の定める視線がちょうど平面 $(n, r) = d$ で交わる必要十分条件であり、エッジ検出方程式 (1) よりも強い条件である。そこで視線がその平面上で交わるように x, x' を補正する (図 4)。

⁴ したがって 1 個の特徴点でも 3 次元復元ができる。

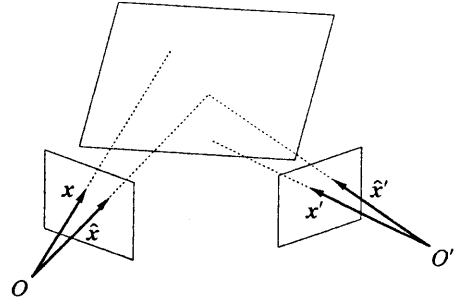


図 4: 視線が平面上で交わるように補正する。

式 (6) は 4 次元データ空間 R^4 に次元 2, 余次元 2, 自由度⁵ 3 の多様体 S_{Π} を定義する。その最尤推定量を $\hat{S}_{\Pi}$ とすると、モデル S_{Π} の AIC は次のようになる。

$$AIC_0(S_{\Pi}) = S(\hat{S}_{\Pi}) + (4N + 6)\epsilon^2 \quad (8)$$

x_{α}, x'_{α} の真の位置の最尤推定量をそれぞれ $\hat{x}_{\alpha}, \hat{x}'_{\alpha}$ とし、平面パラメータ $\{n, d\}$ の最尤推定量を $\{\hat{n}, \hat{d}\}$ とする。これらはくりこみ法と呼ぶ反復法によって精度よく効率的に計算できる [2, 6, 11]。残差平方和 $S(\hat{S}_{\Pi})$ は次のように表せる⁶。

$$S(\hat{S}_{\Pi}) = \sum_{\alpha=1}^N (x'_{\alpha} \times \hat{A} x_{\alpha}, \hat{W}_{\alpha} (x'_{\alpha} \times \hat{A} x_{\alpha})) \quad (9)$$

$$\hat{W}_{\alpha} = (x'_{\alpha} \times \hat{A} V_0[x_{\alpha}] \hat{A}^T \times x'_{\alpha} + (\hat{A} x_{\alpha}) \times V_0[x'_{\alpha}] \times (\hat{A} x_{\alpha}))^{-1}_2 \quad (10)$$

ただし $\hat{A}$ は式 (7) で $\{n, d\}$ を $\{\hat{n}, \hat{d}\}$ で置き換えたものであり、 $(\dots)^{-1}_r$ はランクを r に拘束した一般逆行列を表す⁷。モデル S_{Π} が正しいとすれば $S(\hat{S}_{\Pi})/\epsilon^2$ が自由度 $2N - 3$ の χ^2 分布⁸に従う [9]。

2.3 平面性の判定

$S_{\Pi} \subset S$ であるから、文献 [7] の手続きによると、次の条件が満たされるときに物体形状は平面であると判定される。

$$\frac{S(\hat{S}_{\Pi})}{S(\hat{S})} < 3 - \frac{6}{N} \quad (11)$$

3. 3 次元運動解析

3.1 一般モデル

ステレオ視では 2 台のカメラの相対位置を指定する運動パラメータ $\{h, R\}$ が既知であるが、対応点の数が十分あればそれらを未知数として推定することもできる。これは 1 台のカメラを任意に運動させて画像を撮れば、カメラの運動と物体の 3 次元形状の両方が計算できることを意味し、動画像

⁵ 平面パラメータ $\{n, d\}$ は 3 自由度をもつ。

⁶ 行列 A とベクトル u の外積 $A \times u$ は $(u \times A^T)^T$ と定義する。

⁷ スベクトル分解 (固有値分解) して大きい r 個の固有値をそれぞれその逆数に置き換え、残りの固有値を 0 と置いて得られる。

⁸ したがって最低 2 個の特徴点を識別する必要がある。

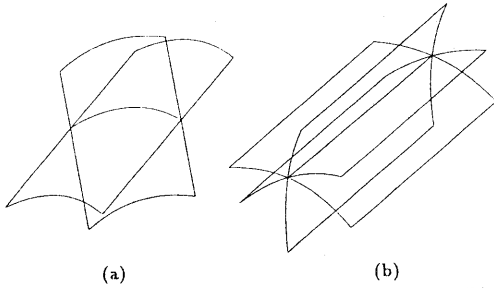


図 6: (a) 平面モデルを含む複数の一般モデルが存在する。(b) 回転モデルは無数の一般モデルの共通部分となる。

文献 [7] の手続きによると、次の条件が満たされるときに物体形状は平面であると判定される。

$$\frac{S(\hat{S}_\Pi)}{S(\hat{S})} < 3 + \frac{4}{N-5} \quad (21)$$

3.5 回転性の判定

前述したように、カメラの運動が純粋回転であれば 3 次元情報はまったく得られない。これは回転モデル (2 次元多様体) が無数の一般モデル (3 次元多様体) の共通部分として定義されるためである (図 6(b))。\$S_R \subset S\$ であるから、文献 [7] の手続きによると、次の条件が満たされるときにカメラの運動は純粋回転であると判定される。

$$\frac{S(\hat{S}_\Pi)}{S(\hat{S})} < 3 + \frac{14}{N-5} \quad (22)$$

4. オプティカルフローの解析

4.1 一般モデル

カメラで観測した空間中のある特徴点の画像座標を \$(x, y)\$ とする。カメラが並進速度 \$v\$、回転速度 \$\omega\$ の瞬間運動を行なうときの \$(x, y)\$ の変化速度 (オプティカルフロー) を \$(\dot{x}, \dot{y})\$ とする¹⁵。これらをベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

を用いて表すと、次のエビ極線方程式¹⁶が成り立つ [1]。

$$|x, \dot{x}, v| + (v \times x, \omega \times x) = 0 \quad (24)$$

ただし、オプティカルフローに誤差はないものとする。\$\{v, \omega\}\$ を (瞬間) 運動パラメータと呼ぶ。

オプティカルフローに誤差があり、真のフローに各点ごと独立で、期待値 0、共分散行列

$$V[\dot{x}] = \epsilon^2 V_0[\dot{x}] \quad (25)$$

¹⁵ 画像座標もその速度も、ステレオ視の場合と同様にレンズの中心と撮像面との距離を 1 とする尺度で測る。

¹⁶ ベクトル \$a, b, c\$ のスカラー三重積を \$|a, b, c|\$ で表す。

の正規分布に従う誤差が加わったものとする。そしてノイズレベル \$\epsilon\$ は未知であるが、正規化共分散行列 \$V_0[\dot{x}]\$ は既知であるとする。これは画像処理によってオプティカルフローを検出する過程で計算することができる [13, 14]。

データは 4 次元ベクトルとして \$r = (x, y, \dot{x}, \dot{y})^T\$ と表せる。ただし \$x, y\$ は確定値であり、誤差を含むのは \$\dot{x}, \dot{y}\$ のみである。したがって \$r\$ の共分散行列は特異であり、これまでの議論はそのままでは適用できない。しかし、逆行列を一般逆行列に置き換えるなど適切な修正を行えば本質的な点は成立することが示される (詳細省略)。有限運動の場合と同様に絶対的なスケールが不定であるから、\$\|v\| = 1\$ と正規化する。エビ極線方程式 (24) は 4 次元データ空間 \$\mathcal{R}^4\$ に次元 3、余次元 1、自由度¹⁷5 の多様体 \$S\$ を定義する。その最尤推定量を \$\hat{S}\$ とすると、モデル \$S\$ の AIC は次のようになる。

$$AIC_0(S) = S(\hat{S}) + (2S + 10)\epsilon^2 \quad (26)$$

ただし \$S\$ はオプティカルフローが定義されている画像の点の総数である。フロー \$\dot{x}\$ の最尤推定量を \$\hat{x}\$ とし、運動パラメータ \$\{v, \omega\}\$ の最尤推定量を \$\{\hat{v}, \hat{\omega}\}\$ とする。これらは“くりこみ法” [2, 6] によって精度よく効率的に解くことができる [15]。残差平方和 \$S(\hat{S})\$ は次のように表せる。

$$S(\hat{S}) = \int_S \frac{(|\dot{x}, \dot{x}, \hat{v}| + (\hat{v} \times x, \hat{\omega} \times x))^2}{(\hat{v}, (x \times V_0[\dot{x}] \times x) \hat{v})} dx dy \quad (27)$$

ただし、記号 \$\int_S dx dy\$ はオプティカルフローの定義されているすべての点に関する総和を表す。モデル \$S\$ が正しいとすれば \$S(\hat{S})/\epsilon^2\$ が自由度 \$S-5\$ の \$\chi^2\$ 分布¹⁸に従う [9]。

運動パラメータ \$\{v, \omega\}\$ の最尤推定量 \$\{\hat{v}, \hat{\omega}\}\$ は一般には一意的には定まらないが、多様体 \$S\$ の最尤推定量 \$\hat{S}\$ は一意的に定まる。有限運動の場合と同様に、これは異なる運動パラメータが同一の多様体を定義するからであり、残差平方和は一意的に定まる。

4.2 平面モデル

物体面が平面パラメータ \$\{n, d\}\$ をもつ平面であるための必要十分条件は次式が成り立つことである。

$$\dot{x} = Wx - (k, Wx)x \quad (28)$$

$$W = -\frac{1}{d} \left(vn^T - \frac{1}{3}(v, n)I \right) - \omega \times I \quad (29)$$

ただし \$I\$ は単位行列であり、\$k = (0, 0, 1)^T\$ である。式 (29) の両辺の \$Z\$ 成分は恒等的に 0 であるから、これは 4 次元データ空間 \$\mathcal{R}^4\$ に次元 2、余次元 2、自由度 8 の多様体 \$S_\Pi\$ を定義する。その最尤推定量を \$\hat{S}_\Pi\$ とすると、モデル \$S_\Pi\$ の AIC は次のようになる¹⁹。

$$AIC_0(S_\Pi) = S(\hat{S}_\Pi) + 16\epsilon^2 \quad (30)$$

¹⁷ 並進速度 \$v\$ は単位ベクトルとしているから自由度 2 であり、回転速度 \$\omega\$ は 3 自由度をもつ。

¹⁸ 有限運動の場合と同様に最低 5 個の特徴点を識別する必要があるが、個々のフロー成分は信頼性が低いので多数の点 (例えばデジタル画像のすべての画素) でのフローを用いるのが現実的である。総和に積分記号を用いるのもそれを意識したためである。

¹⁹ 式 (28) の形から、あるいは AIC のパラメータ数の項にデータ数が含まれていないことからわかるように、この問題は通常の統計学の帰帰問題と同一の形であり、したがって通常の統計解析がそのまま当てはまる。

フロー $\dot{x}$ の最尤推定量を $\hat{x}$ とし、平面パラメータ $\{n, d\}$ と運動パラメータ $\{v, \omega\}$ の最尤推定量をそれぞれ $\{\hat{n}, \hat{d}\}$, $\{\hat{v}, \hat{\omega}\}$ とする。これは解析的な公式によって容易に解くことができる[1]。残差平方和 $S(\hat{S}_\Pi)$ は次のように表せる。

$$S(\hat{S}_\Pi) = \int_S (\dot{x} - \dot{W}x + (k, \dot{W}x)x, V_0[x] - (\dot{x} - \dot{W}x + (k, \dot{W}x)x)) dx dy \quad (31)$$

ただし $\dot{W}$ は式(29)で $\{n, d\}$, $\{v, \omega\}$ をそれぞれ $\{\hat{n}, \hat{d}\}$, $\{\hat{v}, \hat{\omega}\}$ に置き換えたものである。モデル S_Π が正しいとすれば $S(\hat{S}_\Pi)/\epsilon^2$ が自由度 $2S-8$ の χ^2 分布²⁰に従う[9]。

平面パラメータ $\{n, d\}$ と運動パラメータ $\{v, \omega\}$ の最尤推定量 $\{\hat{n}, \hat{d}\}$, $\{\hat{v}, \hat{\omega}\}$ は一般には一意には定まらないが、多様体 S_Π の最尤推定量 $\hat{S}$ は一意に定まる。有限運動の場合と同様に、これは異なる平面パラメータと運動パラメータが同一の多様体を定義するからであり、残差平方和は一意に定まる。

4.3 回転モデル

モデル S , S_Π はいずれも $v \neq 0$ と仮定している。 $v = 0$ であればカメラの運動は純粋回転であり、有限運動の場合と同様に何ら3次元情報は得られない。カメラの運動が純粋回転である必要十分条件は次式が成り立つことである。

$$\dot{x} = Q_X(x \times \omega), \quad Q_X = I - xk^T \quad (32)$$

これは4次元データ空間 $\mathcal{R}^4$ に次元2, 余次元2, 自由度3の多様体 S_R を定義する。その最尤推定量を $\hat{S}_R$ とすると、モデル S_R のAICは次のようになる²¹。

$$AIC_0(S_R) = S(\hat{S}_R) + 6\epsilon^2 \quad (33)$$

フロー $\dot{x}$ の最尤推定量を $\hat{x}$ とし、回転速度 ω の最尤推定量を $\hat{\omega}$ とする。これは統計学でいう正規方程式を解くことによって直ちに求まる[6]。残差平方和 $S(\hat{S}_R)$ は次のように表せる。

$$S(\hat{S}_R) = \int_S (\dot{x} - Q_X(x \times \omega), V_0[x] - (\dot{x} - Q_X(x \times \omega))) dx dy \quad (34)$$

モデル S_R が正しいとすれば $S(\hat{S}_R)/\epsilon^2$ が自由度 $2S-3$ の χ^2 分布²²に従う[9]。

4.4 平面性の判定

有限運動の解析と同様に、平面物体の場合は一般の形状に対する3次元復元のアルゴリズムにおける特異点となるので[1]、物体が平面であるかそうでないかによって別々のアルゴリズムが必要となる。 $S_\Pi \subset S$ であるから、文献[7]の手続きによると、次の条件が満たされるときに物体形状は平面であると判定される。

$$\frac{S(\hat{S}_\Pi)}{S(\hat{S})} < 3 + \frac{4}{S-5} \quad (35)$$

²⁰したがって最低4個の特徴点を識別する必要があるが、多数の点でのフローを用いるのが現実的である。

²¹これも通常の統計学の帰帰問題と同一の形であり、したがって通常の統計解析がそのまま当てはまる。

²²したがって最低2個の特徴点を識別する必要があるが、多数の点でのフローを用いるのが現実的である。

4.5 回転性の判定

有限運動の場合と同様に、カメラの運動が純粋回転であれば3次元情報はまったく得られない。 $S_R \subset S$ であるから、文献[7]の手続きによると、次の条件が満たされるときにカメラの運動は純粋回転であると判定される。

$$\frac{S(\hat{S}_R)}{S(\hat{S})} < 3 + \frac{14}{S-5} \quad (36)$$

7. まとめ

本論文では幾何学的AICを用いる推論の代表的な例として、これをステレオ視、動画像、およびオプティカルフローからの3次元復元の問題に適用した。抽象化すると、このような3次元復元はすべて高次元空間内に分布するデータ点にパラトリックな多様体として定義したモデルを最適に当てはめる問題とみなせる。このとき、対象が平面であったり、カメラの運動が純粋回転であると特別のモデルが必要となるが、与えられたデータに対してどのモデルが最も適切かをデータの誤差の大きさに関する知識や恣意的な有意水準を用いずに判定できることを示した。

参考文献

- [1] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [2] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, 35-2 (1994), 201-209.
- [3] K. Kanatani, Renormalization for motion analysis: Statistically optimal algorithm, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E77-D-11 (1994), 1233-1239.
- [4] 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, 36-8 (1995-8), 1865-1873.
- [5] 金谷健一, 幾何学的補正問題の精度の理論限界と最適計算法, 情報処理学会研究報告, 95-CV-94 (1995-5), 33-44.
- [6] 金谷健一, 「空間データの数理—3次元コンピューティングに向けて—」, 朝倉書店, 1995.
- [7] 金谷健一, 幾何学的モデルの選択基準について, 情報処理学会研究報告, 95-MSP-2 (1995-7), 27-32.
- [8] 金谷健一, 幾何学的モデル選択の情報量基準, 電子情報通信学会技術研究報告, IT95-16 (1995-7), 19-24.
- [9] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University, June 1995.
- [10] K. Kanatani and S. Takeda, 3-D motion analysis of a planar surface by renormalization, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E78-D-8 (1995).
- [11] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E78-D-7 (1995), 917-922.
- [12] 川島徹, 金澤靖, 金谷健一, ステレオによる3次元復元の信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 94-CV-90 (1994-9).
- [13] N. Ohta, Image movement detection with reliability indices, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E74-D-10 (1991), 3379-2288.
- [14] 太田直哉, 信頼性情報を持ったオプティカルフローからの形状復元とその移動物体検出への応用, 電子情報通信学会論文誌, 76-D-II-8 (1993), 1562-1571.
- [15] 太田直哉, 金谷健一, くりこみ法とそれを用いたオプティカルフローの解析, 情報処理学会研究報告, 95-cv-94 (1995-5).
- [16] 坂本慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎, 「情報量統計学」, 共立出版, 1983.