解 説

計算幾何学的手法と画像解析†

――ボロノイ図の応用を中心として――

杉 原 厚 吉††

1. は じ め に

種々の図形操作を計算効率の立場から眺め，効率のよいアルゴリズムを体系的に構成する努力が，計算幾何学 (computational geometry) と呼ばれる新しい研究分野で近年精力的になされている[1)~3)]．この動きは，コンピュータビジョンにとって，単に既存の手法の効率を向上させてくれるだけでなく，新しい手法を構成するための基礎的道具を提供してくれるものでもある．本稿では，計算幾何学における概念・算法がコンピュータビジョン・画像解析にいかに役立つかを，計算幾何学の中心的概念の一つであるボロノイ図に焦点をあてて紹介する．

とは言うものの，計算幾何学におけるはなばなしい成果がコンピュータビジョンに十分取り入れられているかというと，実は必ずしもそうとは言えないのが現状である．その主な理由の一つに，理論的に正しい算法をそのまま計算機プログラムに書き下しても，数値誤差が原因となって現実にはうまく動作しない，という理論と現実のギャップがある[4)~6)]．画像処理の分野では，画素単位に情報を扱っている限り数値誤差による暴走の心配のない図形処理手法を容易に構成できる[7),8)]ため，わざわざ“危険な手法”を取り込むことはない，という風潮が強いように思われる．

しかし，画素単位の情報表現は解像度が極端に低い．十分な解像度で幾何学的な情報を表現し操作するためには，やはり最終的には計算幾何学的手法に頼らざるを得ない．

幸い，計算幾何学の分野でも，数値誤差のない架空の世界に閉じこもって算法を設計していてはいけないという反省の動きが現れ始めている．その結果，たとえば，“数値誤差が生じても暴走する心配のない算法”という新しい概念が生まれ，その具体例が実際に構成されつつある[9)~12)]．本稿の後半では，この新しい動向に焦点を当て，計算幾何学的手法が“危険な手法”から“安心して使える手法”へ変わりつつある現状を紹介する．

まず2.で，コンピュータビジョン・画像解析の中のいくつかの問題を呈示する．3.でボロノイ図とその周辺の概念・算法を示し，4.でこれらの概念・算法を利用することによって2.で呈示した問題が解決できることを示す．5.では，数値誤差に強い算法の設計法をやはりボロノイ図を例にとって示す．

2. 画像解析におけるいくつかの問題

画像の中の幾何学的対象を解析する際にぶつかる問題のうち，次に列挙するものについて考えてみよう．これらは，次章で示すボロノイ図の概念を用いて統一的に解けるものである．

（1） ランダムな地点で観測されたデータの補間

観測データの補間は，多くの計測において必要となる基礎技術である．計測データが正方格子点などのように規則的に並んだ地点で得られる場合には，補間は比較的容易である．しかし，計測データは必ずしも規則的な地点で得られるとは限らない．両眼立体視においては，左右の画像で対応のとれた点だけで距離データが得られるが，対応のとれる点の位置は画像ごとに異なり規則的には並ばない[13),14)]．物体表面の模様のひずみから立体情報を抽出するときにも，たまたま模様の存在するところで計測データが得られるから，計測地点が規則的に並ぶとは限らない[15)]．このようにランダムな地点でデータが観測された場合には，補間はそれほど容易ではない．なぜなら，補間とは注目する点での値をそれをとり囲む周辺の観測データを用いて推定する作業であるが，“周辺の観測データ”がどれであるかが決して自明ではないからである．

† Computational-Geometry Methods and Image Analysis ――Concentrated on Applications of Voronoi Diagrams―― by Kokichi SUGIHARA (University of Tokyo, Faculty of Engineering and Information Physics).

†† 東京大学工学部計数工学科

もっとも簡単な補間は，観測地点を頂点とする三角形網で平面をおおい，注目点に対しては，それを含む三角形の頂点でのデータを用いて線形補間する方法であろう．この際，三角形網は何種類もあり得るが，そのうちなるべく細長い三角形ができにくい三角形網であることが望ましい．なぜなら，細長い三角形の内部を補間するときには比較的遠い地点の観測データを用いなければならないからである．したがって，観測地点がランダムに与えられたとき，それらを頂点とする三角形網のうち細長い三角形の少ないものを効率よく見つける方法がほしい．

（2） “隣り”の検出

平面上に不規則に配置された点に対して，どの点とどの点が互いに“隣り”であるとみなすべきかを決定したい場面も多い．たとえば，物体表面の模様のひずみから表面の微小面領域ごとの3次元情報（法線ベクトルなど）が得られたとき，互いに“隣り”同士で同じ性質をもつものを融合して面領域を抽出するときなどがその例である[16]．すべての点対の距離を計算したのでは，点の数の2乗に比例した時間がかかり能率が悪い．また，点の分布密度が一様でない場合には，距離が少々大きくても隣りとみなすべき点対も生じる．したがって，“隣り”という概念の適切な定義と，隣り同士の点を見つける効率のよい算法がほしい．

（3） 粒状模様のテクスチャ解析

多数の点が平面に不規則に配置されているとき，その点の密度の違いによって平面を分割したい場合がある．一つの方法は，平面を多くの小領域に分割して，それらの小領域ごとに密度を計算するという統計的手法であろう[17]．しかし，この方法は密度の異なる領域の境界付近で両者の中間の密度が計算値として現れ，分割が正しく行われないことがある．点同士の関係をより構造的に把握して解析する方法がほしい．

（4） 図形の骨格線の抽出

平面が図形と背景に分割されているとき，図形内部の点で境界までの最短距離を実現する境界上の点が2個以上存在するものの集まりは骨格線（あるいは中心線）と呼ばれる．骨格線は，文字図形からペンの動きの構造を抽出したり，図形の局所的な対称構造を抽出したりする際の重要な手がかりとなる．ディジタル画像処理技術の中に距離変換，細線化[7),8),18]などの名称で呼ばれる骨格線抽出手法があるが，それらは4近傍距離や8近傍距離と呼ばれる“距離の代用品”に基づいているため，得られる骨格線の位置精度が低い．ユークリッド距離に基づいた骨格線を効率よく抽出する手法がほしい．

3. ボロノイ図とその構成法

3.1 ボロノイ図とドロネー網

2点 p, q のユークリッド距離を $d(p,q)$ で表す．平面上に指定された有限個の点の集合 $P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ に対して

$$V(p_i)=\{p\in \boldsymbol{R}^2 \mid d(p,p_i)<d(p,p_j) \text{ for } j=1,2,\cdots,n;\ j\neq i\}$$

を p_i の**ボロノイ領域** (Voronoi region) といい，平面のボロノイ領域 $V(p_1), V(p_2), \cdots, V(p_n)$ への分割を**ボロノイ図** (Voronoi diagram) という．P に属す点をこのボロノイ図の**母点** (generator) という．ボロノイ領域 $V(p_i)$ は，他のどの母点より p_i に近い点全体のなす領域であり，p_i の勢力圏と呼ばれることもある．ボロノイ図の例を図-1(a)に示す．ただし，黒丸が母点を表し，実線の図形がボロノイ図を表す．二つのボロノイ領域の境をなす線分または半直線または直線は**ボロノイ辺** (Voronoi edge) と呼ばれ，ボロノイ辺の端点は**ボロノイ点** (Voronoi vertex) と呼ばれる．

ボロノイ図は距離の概念に基づいた母点の勢力圏分布を表しているから，ボロノイ領域が境界を共有する2個の母点は“隣り合っている”とみなすことができる．二つのボロノイ領域がボロノイ辺を共有するとき対応する母点を線分で結んでできる図形は**ドロネー網** (Delaunay net) と呼ばれる．図-1 (a)の母点に対するドロネー網は，(b)の実線で示したとおりである((b)の破線は(a)のボロノイ図のコピーである)．

3.2 ボロノイ図の構成算法

n 個の母点に対するボロノイ図を構成するための計算時間の下限は $O(n \log n)$ であることがわかっている[1]．そして，実際，この下限を達成する算法，すなわち“最良の算法”，がいくつか知られている．分割統治法を利用したもの[1),19),20]，掃出し線を利用したもの[21),22] などがその例である．したがって，これらの算法の一つを使えばよさそうであるが，実はそうではない．ここに理論の落し穴がある．

一般的な傾向として，最悪の場合の計算時間を改良しようと算法を凝ると，それに足を引っぱられて最悪ではない場合の計算時間が増大してしまうように思える．実際，上にあげた“最良の算法”はほとんどいつも $O(n \log n)$ の計算時間がかかってしまう．一方，

最悪の場合にあまりこだわらず，一般の場合の計算量を減らすという態度が大きな実用的効果をもたらすことが多い．ボロノイ図の構成においてもこのことは真である．実際，最悪の場合の計算量は $O(n^2)$ となる（したがって“最良”ではない）が，ランダムに配置された母点に対して平均的に $O(n)$ の計算時間でボロノイ図を構成できる算法が知られている．それは，母点逐次添加法にバケットと四分木のデータ構造的技法を加味したもので，現在のところもっとも実用的な算法である[2),23),24)]．この算法の概要は以下のとおりである．

2個または3個の母点に対するボロノイ図から出発して，母点を1個ずつ添加しながら，すでに得られているボロノイ図を更新していく．図-1(c)は，図-1(a)のボロノイ図がすでに得られているとき，白丸で示す母点 p を添加したときの更新のようすを示したものである．すなわち，まず，p にもっとも近い母点 p_i を見つけ，p と p_i の垂直二等分線（これが新しくボロノイ辺となる）を $V(p_i)$ の境界と交わる点 q まで延ばす．次に点 q において $V(p_i)$ と隣接しているボロノイ領域の母点 p_j と p との垂直二等分線を作り，$V(p_j)$ の境界まで延ばす．同様の操作を，垂直二等分線が再び領域 $V(p_i)$ の境界に到達するまで繰り返し，今作ってきた垂直二等分線の列（図-1(c)の破線で示した線分列）に囲まれる領域を母点 p の領域 $V(p)$ とする．母点を1個ずつ添加しながら上の手続きを繰り返すことによって目的のボロノイ図を構成できる．

上の手続きを効率よく実行するために，図-2に示すように，母点が分布する領域を母点の数に比例した個数のバケットに分割し，それらのバケットを葉とする四分木を用意する．この四分木の各ノードに対して，それを根とする部分木の葉全体に対する領域をそのノードの支配領域と呼ぶ．一つのボロノイ領域の境界上のボロノイ点は平均6個であり，母点が領域に一様に分布するときにはこの平均値から大きく離れたボロノイ領域はめったに生じない．したがって，“添加済みの母点だけに着目したとき，それらが一様に分布している”という性質が常に満たされる順序で母点を添加すれば，更新される部分構造の規模は母点1点当り定数の大きさに限定できよう．これを達成するためには，まず，四分木の深さ1の4個のノードの支配領域からそれぞれ1個ずつ母点を選んで順に添加し，次に深さ2の16個のノードの支配領域からそれぞれ新しい母点を1個ずつ選んで順に添加する（このとき対応する領域に母点が存在しなければその領域は飛ばす），ということを葉の深さまで繰り返せばよい．また，新しく添加した母点 p にもっとも近い母点 p_i を効率よく見つけるためには，四分木の各ノードにそのノードの支配領域内で最初に添加された母点を記録しておき，p が属すバケットから四分木の根へ至る道の途中で最

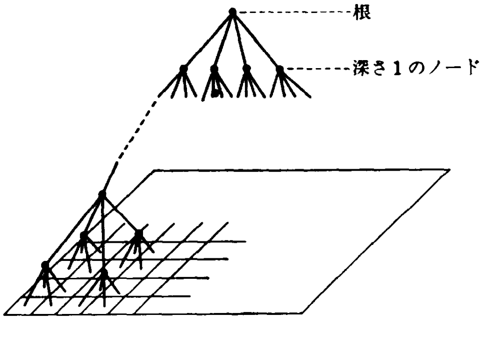


図-2　バケットを葉とする四分木

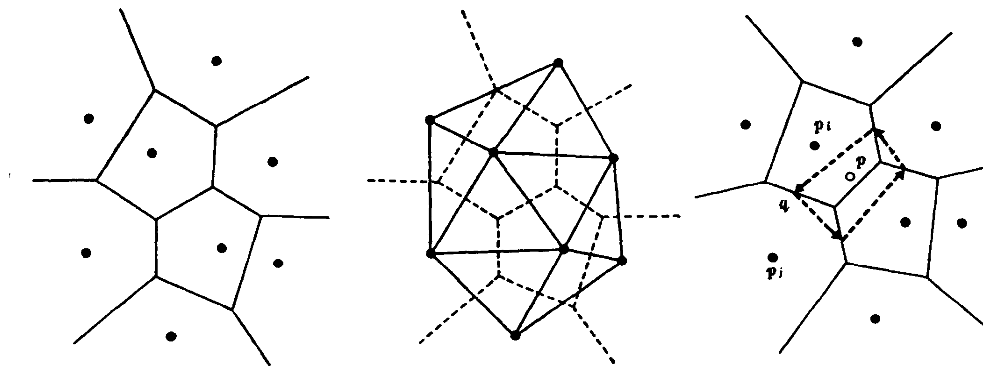


図-1　ボロノイ図とその構成算法：(a)ボロノイ図；(b)ドロネー網；(c)母点の添加

初に出会う母点を出発点とする探索を行えばよい．以上の工夫によって母点1個の添加に要する平均時間を母点の個数に依存しない定数とすることができ，全体の計算量を平均的に $O(n)$ におさえることができる．

ボロノイ図の位相構造を，ボロノイ点，ボロノイ辺，ボロノイ領域の間の隣接関係を表す標準的なデータ構造[2),25)]を用いて表現しておけば，ボロノイ図が得られた時点で対応するドロネー網も得られる．

4. 画像解析への応用

本章では，ボロノイ図の概念・算法が 2. で述べた問題を解くために役立つことを示す．

4.1 補間のための三角形分割

2. でみたとおり，ランダムな地点での観測データに基づいて補間を行うためには，観測点を頂点とする領域の三角形分割のうち，できるだけ細長くない三角形のみで構成されたものがほしい．この要求を満たすものがドロネー網である[1)]．したがって，観測点を母点とするドロネー網を作り，それによって得られる各三角形の内部を3頂点の観測データを用いて線形補間すればよい．

図-3 に線形補間の例を示す．(a)は正方形領域にランダムに配置した点におけるある曲面の高さを垂直な棒で示し，それを斜め方向から見て描いたものである．それらの点を母点とするドロネー網による三角形分割を正面から描いたものが(b)で，これに基づいて補間した結果を(a)と同じ方向からみて描いたものが(c)である．これと比較するために，テレビ走査の順に点を並べて行った三角形分割とそれに基づいた補間結果を，それぞれ(d)，(e)に示した．

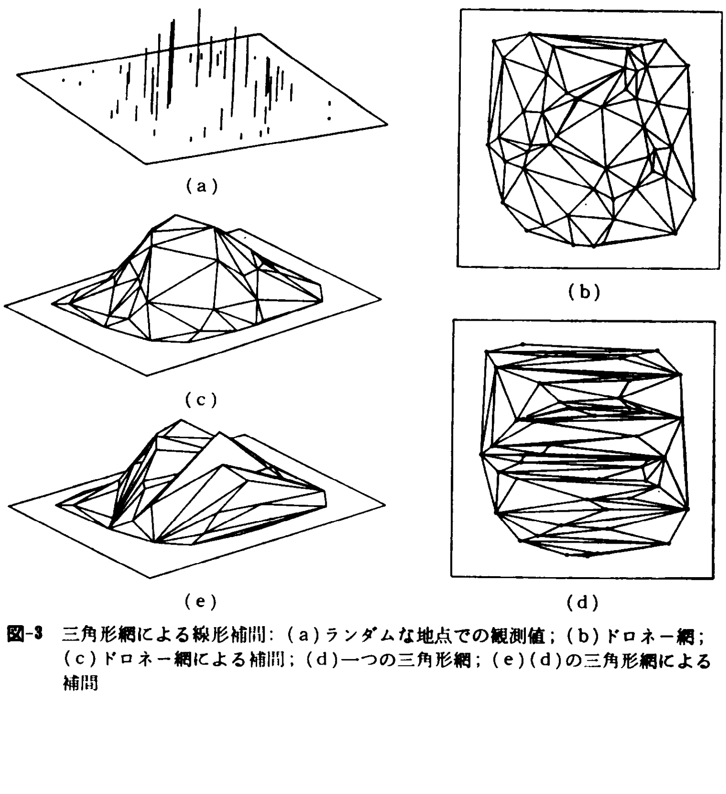


図-3 三角形網による線形補間：(a)ランダムな地点での観測値；(b)ドロネー網；(c)ドロネー網による補間；(d)一つの三角形網；(e)(d)の三角形網による補間

ドロネー網を利用した補間は，物体認識[26)~28)]，コンピュータグラフィックス[29),30)]などのための形状記述に広く利用されている．

4.2 “隣り”の検出とその利用

不規則に配置された点のどれとどれが互いに隣り同士であるかという問題に一つの妥当な解を与えてくれるものがドロネー網である．ドロネー網の辺はボロノイ領域が隣接する母点をつなぐものであり，その両端を互いに隣りであるとみなすことは自然だからである．この定義を採用すれば，隣り同士の関係が明確に定義できるだけでなく，それが $O(n)$ の算法で検出できる．したがって，局所的なデータを隣り同士で融合して大きな領域を抽出する手つづきなどに利用されている[16),27)]．

4.3 粒状模様の解析

不規則に配置された点に対して，種々の意味でのまとまりを検出したいことも多い．その場合にもドロネー網が利用できる．ドロネー辺の長さは隣りとの近さを表すから，ドロネー辺の長さの違いに基づいて点集合を分割すると，粒状模様の密度の差に基づいた領域分割ができる[31)]．また，単なる密度の差ではなく，点の集中としてのまとまり，点列としてのまとまり，およびそれらの相互作用などの漠然とした図形的概念を，人間の視知覚に近い形で抽出するための計算機構の中に組み込もうとする研究も多数行われている[32~35)]．

4.4 骨格線の抽出とその利用

図形の境界が点列で表現されているとき，それらの点を母点とするボロノイ図を作ると，ボロノイ辺は，図形の境界上の2個以上の点から等距離にありしかもそれが

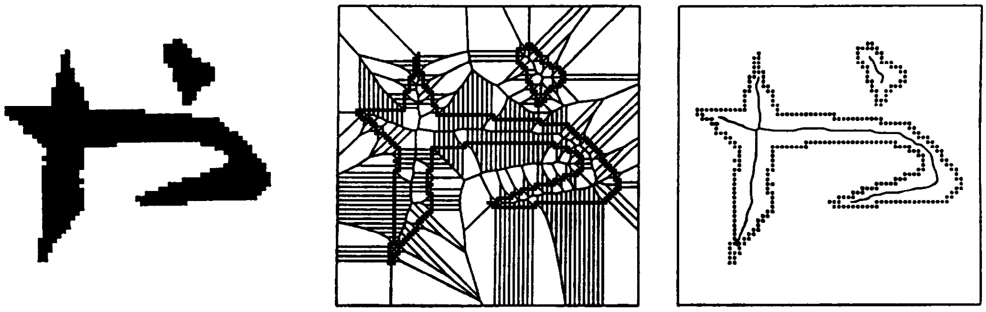


図-4 文字図形の骨格線：(a)文字図形；(b)ボロノイ図；(c)骨格線

境界までの最短距離であるような点の集合となる．そこで，ボロノイ辺のうち図形の内部にあってしかも両側の母点が境界上の点列の順序で近くないものを集めると，その図形の骨格線となる[36]．また，その骨格線に属すボロノイ辺は図形の局所的な対称軸を表しているとみなすことができ，したがって，その辺の両側の母点は互いに対称な位置にある点対であるとみなせる．この考え方に基づいて，胃などの複雑な形状の1枚の2次元輪郭図形からその3次元形状の一般化円筒表現を求める試みなどもなされている[37]．

図-4 は，文字図形からその骨格線を抽出した例である．(a)に示す2値図形の境界上の点を母点とするボロノイ図が(b)で，図形内部のボロノイ辺のうち両側の母点が境界上で 11 点以上離れているものだけを取り出したものが(c)である．

5. 幾何的アルゴリズムの数値的安定化の動向

5.1 数値誤差によるアルゴリズムの破綻

計算幾何学の研究は，計算量を減らすという観点からみると著しく進歩したが，数値的安定性を獲得するという観点からは大きな問題が残っている．ボロノイ図の構成の際に数値誤差がもたらす破綻の例を図-5 に示す．新しい母点 p を添加したとき，p のボロノイ領域の境界は理論的には閉じるはずである．しかし，その境界が古いボロノイ図のボロノイ点の近くを通過するときには，右側を通過するか左側を通過するかが数値誤差のために誤って判定されることがある．そうなると，閉じるはずの境界が，図-5 の破線で示すように，閉じないという事態も生じ，境界線が閉じることを前提として作られたアルゴリズムは破綻してしまう．

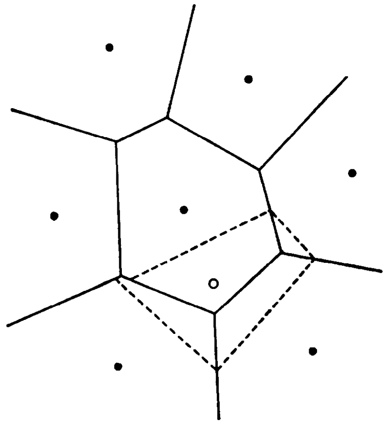


図-5 数値誤差によるアルゴリズムの破綻

5.2 位相構造の優先による数値的安定化

幾何的アルゴリズムの数値誤差による破綻を防ごうという研究は，最近になってようやく本格的になされ始めた．すべての図形を整数格子上の点のみを用いて表現しようとする方法[11]，厳密な交差判定に必要な計算精度を確保しようとする方法[9),12),38] などがその例である．また，いっそう根本的な解決を目指すものとして，位相構造を優先することによって矛盾の発生を防止する方法がある[10),39),40]．ここでは，この最後の方法を紹介する．

数値誤差の生じる世界では，図形の計量的性質をいつも正しく計算することはできない．一方，図形の位相的性質は組合せ論的計算によって厳密に確保できる．このことに着目すると，“いかなる精度で計算を行っても少くとも解がもつべき位相的性質を満たす結果を出力し，計算精度を上げていくとその出力が真の解に収束する”という振舞いをもつ算法を構成することができる．これが，以下に述べる方法の基本的考え方である．

ボロノイ図は辺が交差しないように平面に埋め込まれたグラフとみなせる．母点 $p_1, \cdots, p_i$ に対するボロノイ図のグラフを G_i と書くことにする（ただし，G_i は平面へ埋め込まれたグラフである；以下では，グラフという言葉をこの意味で用いる）．母点 p_i の添加作業は，グラフ G_{i-1} をグラフ G_i へ変更する作業とみなせる．この作業を位相構造に着目して眺めると，次のように表すことができる．

作業A

（ⅰ） G_{i-1} の中のある頂点集合 T を指定し，

（ⅱ） T に属する頂点とそれ以外の頂点をつなぐ辺の途中に新しい頂点を1個ずつ生成し，

（ⅲ） その新しい頂点をつないで T に属す頂点のみを囲むサイクルを生成し，

（ⅳ） そのサイクルの内部を取り除く（そして，その内部を母点 p_i のボロノイ領域とみなす）．

この作業の過程の例を図-6(a)に示す．実線がグラフ G_{i-1} を表し，黒丸が T に属する頂点を表すとき，白丸で示された6個の頂点が(ⅱ)で新しく生成され，破線で示されたサイクルが(ⅲ)で生成されて，その内部が(ⅳ)で取り除かれる．

このようにボロノイ図の更新作業から位相構造のみにかかわる部分を抽出することができるが，この作業をさらに次のように制限することができる．

母点が分布する領域を囲む十分大きな三角形を一つ導入し，その頂点も便宜的に母点に加えて，その3個の母点が p_1, p_2, p_3 となるように母点番号をずらす．そして，p_1, p_2, p_3 に対するボロノイ図のグラフ G_3 を逐次添加法の初期グラフとする．これによって，以後添加される母点のボロノイ領域は有限領域であることが保証されるため，無限に広がったボロノイ領域という例外を扱うわずらわしさから解放される．このとき次の位相的性質が成り立つ：

P1. 母点 p_i を添加したとき除かれるべきボロノイ点の集合 T によって導かれる G_{i-1} の部分グラフ（これを $G_{i-1}(T)$ と書く）は木（サイクルを含まない連結グラフ）をなす．

なぜなら，$G_{i-1}(T)$ がサイクルを含むときには，図-6(b)に示すように古いボロノイ領域の一つが完全になくなってしまい，$G_{i-1}(T)$ が連結でないときには，(c)に示すように新しい母点のボロノイ領域が複数個現れたりするからである．

また，ボロノイ領域は凸であるから，二つのボロノイ領域の共通の境界辺はたかだか1個である．したがって，次の位相的性質も成り立つ：

P2. G_{i-1} の任意の一つのボロノイ領域の境界と部分グラフ $G_{i-1}(T)$ との共通部分は連結している．

なぜなら，上の共通部分が連結していないときには，図-6(d)の領域 r のように，古いボロノイ領域の一つが新しいボロノイ領域と二つ以上の辺で隣接することになってしまうからである．

新しいアルゴリズムでは，母点 p_i の添加作業を，頂点集合 T はP1, P2を満たすものの中から選ぶという条件のもとで作業Aを実行することであるとみなす．この作業は組合せ論的計算のみによって実行できるから，数値誤差による破綻の心配はない．ただし，T の選び方には大きな任意性がある．そこで，T の任意性の範囲で真のボロノイ図の更新作業に最も近いと思われるものを抽出するためにのみ浮動小数点計算を行う．G_{i-1} のボロノイ点が新しい母点 p_i のボロノイ領域に含まれるのは，そのボロノイ点に隣接する3個のボロノイ領域の母点をとお

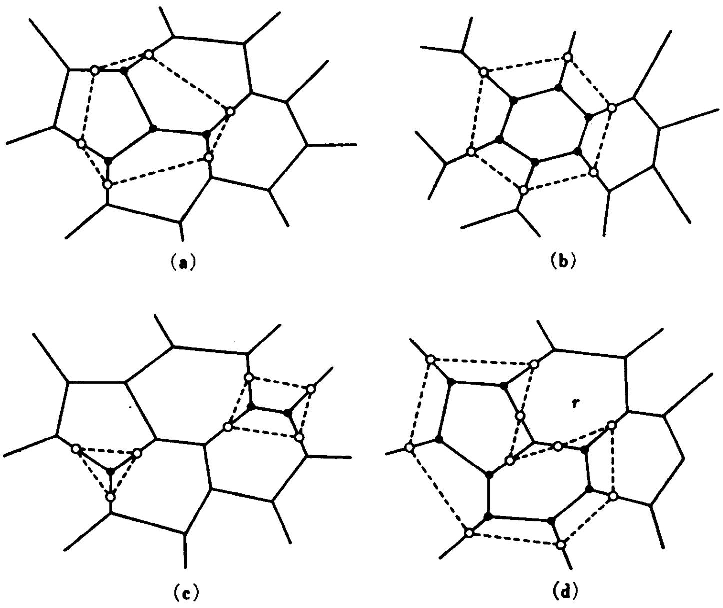
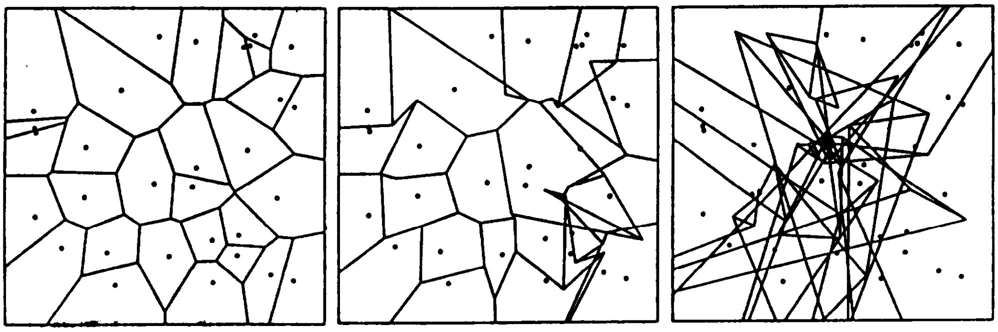


図-6　位相構造に注目した母点添加作業



(a) (b) (c)

図-7 新しいアルゴリズムの振舞い

る円が p_i を含むときである．この性質を利用して T に属す頂点を選択すればよい．浮動小数点計算には数値誤差が入るから真のボロノイ図の更新に対応する頂点集合が T として選ばれないかもしれないが，それでもかまわない．P1，P2 を満たす範囲で T を選んでいる限り，平面を母点と同数の領域に分割するグラフを必ず出力するからである．

図-7 に，この方針で作ったプログラムの振舞いの例を示す．(a)は単位正方形内にランダムに発生させた 30 個の母点に対して単精度浮動小数点計算でアルゴリズムを実行したときの出力である．また(b)はアルゴリズム中のすべての浮動小数点計算の結果にある範囲の一様乱数を加えた場合の出力で，(c)はアルゴリズム中のすべての浮動小数点計算を乱数で置きかえた場合の出力である．どれほど大きな数値誤差が発生しても，途中で破綻することなく最後まで処理が進んで結果が出力されている．また図-7 を(c)，(b)，(a)の順に眺めると，計算精度を上げるにつれて出力が真の解に収束していくようすがわかる．

図-4(b)のボロノイ図も，同じプログラムで作ったものである．この場合は，ディジタル画像の画素の位置に母点がおかれているため，新しい母点のボロノイ領域の境界が古いボロノイ点の上を通過するという事態が，かなりの頻度で発生している．そのため，数値誤差への配慮を欠いた算法では，ボロノイ図を構成することが難しい例である．

この新しいアルゴリズムは，数値誤差に対して安定なだけでなく，従来の逐次添加法と同じように平均的に $O(n)$ の計算量で済むこと，4 個以上のボロノイ辺が 1 点で隣接するという退化状態に対する例外処理が不要であること，など多くの著しい特徴をもっている[39),40)]．

6. おわりに

計算幾何学の中心的概念の一つであるボロノイ図とその算法が画像情報の解析にいかに利用できるかをみるとともに，数値誤差が発生しても破綻しないアルゴリズムの開発が始まりつつある現状を紹介してきた．今後は，数値誤差対策をアルゴリズムの基本設計の段階で取り入れることが可能であり有効であるという考え方が広まり，安心して使える算法が次第に増えていくであろうと期待できる．

参 考 文 献

1) Preparata, F. P. and Shamos, M. I.: Computational Geometry—An Introduction, Springer-Verlag, New York (1985).
2) 伊理(監)，腰塚(編)他：計算幾何学と地理情報処理，共立出版，東京 (1986).
3) Edelsbrunner, H.: Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, Berlin (1987).
4) Segal, M. and Sequin, C. H.: Consistent calculations for solids modeling, J. O'Rourke (ed.): Proceedings of the ACM Symposium on Computational Geometry, Baltimore, pp. 29-38 (1985).
5) Dobkin, D. and Silver, D.: Recipes for geometry and numerical analysis—Part I: An empirical study, Proceedings of the 4 th ACM Annual Symposium on Computational Geometry, Urbana-Champaign, pp. 93-105 (1988).
6) Hoffmann, C. M.: The problems of accuracy and robustness in geometric computation, Computer, Vol. 22, No. 3, pp. 31-41 (1989).
7) Rosenfeld, A. and Kak, A. C.: Digital Picture Processing, Vols. 1 and 2, 2nd ed., Academic Press, Orlands (1982).

8) 鳥脇純一郎：画像理解のためのディジタル画像処理，I，II，昭晃堂，東京（1988）.

9) 杉原，伊理：計算誤差による暴走の心配のないソリッドモデラの提案，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 9, pp. 962-973（1987）.

10) 伊理，杉原：計算誤差を考慮した幾何的アルゴリズム，情報処理学会アルゴリズム研究会研究報告，88-AL-1-1（1988）.

11) Greene, D. H. and Yao, F.: Finite-resolution computational geometry, Proceedings of the 27 th ACM Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Toronto, pp. 143-152 (1986).

12) Ottman, T. Thiemt G. and Ullrich, C.: Numerical stability of geometric algorithms, Proceedings of the 3 rd ACM Annual Conference on Computational Geometry, Waterloo, pp. 119-125 (1987).

13) Marr, D.: Vision, W. H. Freeman and Company, New York (1982).

14) Grimson, W. E. L.: From Images to Surfaces—A Computational Study of the Human Early Visual System, MIT Press, Cambridge (1981).

15) 池内克史：被写体表面上の小図形の幾何学ひずみから3次元形状を再構成する一手法，電子通信学会論文誌，Vol. J 65-D, pp. 850-857（1982）.

16) Yoshitake, T., Sugihara, K. and Sugie, N.: Recognition of three-dimensional objects by means of regular pattern projection, Proceedings of the IEEE International Workshop on Industrial Applications of Machine Vision and Machine Intelligence, Tokyo, pp. 229-234 (1987).

17) Tomita, F. and Tsuji, S.: Extraction of multiple regions by smoothing in selected neighborhoods, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-7, pp. 107-109 (1977).

18) 田村秀行：多目的画像処理とそのソフトウェア・システムに関する研究，電子技術総合研究所研究報告，No. 835（1983）.

19) Shamos, M. I. and Hoey, D.: Closest-point problems, Proceedings of the 16th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science, pp. 151-162 (1975).

20) Lee, D. T. and Schachter, B. J.,: Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation, International Journal of Computer and Information Sciences, Vol. 9, pp. 219-242 (1980).

21) Fortune, S.: A sweepline algorithm for Voronoi diagrams, Proceedings of the 2nd ACM Annual Symposium on Computational Geometry, Yorktown Heights, pp. 313-322 (1986).

22) Aurenhammer, F.: Power diagrams—properties, algorithms and applications, SIAM Journal on Computing, Vol. 16, pp. 78-96 (1987).

23) Ohya, T., Iri, M. and Murota, K.: Improvements of the incremental method for the Voronoi diagram with computational comparison of various algorithms, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 27, pp. 306-336 (1984).

24) Iri, M.: Practical computational methods in geometrical/geographical optimization problems, in M. J. Beckmann, K.-W. Gaede, K. Ritter and H. Schneeweiss (eds.): Methods of Operations Research, 54 (Proceedings of the X. Symposium on Operations Research, München, 1985), Verlag Anton Hain, Part II, pp. 17-37 (1986).

25) Baumgart, B. G.: A polyhedron representation for computer vision, AFIPS Conference Proceedings, Vol. 44, pp. 589-596 (1975).

26) Faugeras, O. D., Hebert, M., Mussi, P. and Boissonnat, J. D.: Polyhedral approximation of 3-d objects without holes, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol. 25, pp. 169-183 (1984).

27) Sugihara, K., Okazaki, K., Feng, K. and Sugie, N.: Regular pattern projection for surface measurement, H. Hanafusa and H. Inoue (eds.): Robotics Research—The Second International Symposium, MIT Press, Cambridge, pp. 17-24 (1985).

28) 馮，杉原，杉江：多数の円錐光束を利用した三次元情報抽出法，電子情報通信学会論文誌，Vol. J 68-D, pp. 1697-1704（1985）.

29) DeFloriani, L., Falcidieno, B. and Pienovi, C.: A Delaunay-based method for surface approximation, P. J. W. ten Hagen (ed.): EUROGRAPHICS '83, Elsevier Science Publishers B. V., pp. 333-350 (1983).

30) DeFloriani, L.: A pyramid data structure for triangle-based surface description, Computer Graphics and Applications, Vol. 9, No. 2, pp. 67-78 (1989).

31) Toriwaki, J., Mase, K., Yashima, Y. and Fukumura, T.: Modified Voronoi diagram and relative neighbors on a digitized picture and their applications to tissue image analysis, Proceedings of the IEEE 1st International Symposium on Medical Imaging and Image Interpretation, pp. 362-367 (1982).

32) Toussaint, G. T.: The relative neighbourhood graph of a finite planar set, Pattern

Recognition, Vol. 12, pp. 261-268 (1980).
33) Ahuja, N.: Dot pattern processing using Voronoi neighborhoods, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-4, pp. 336-343 (1982).
34) Urquhart, R.: Graph theoretical clustering based on limited neighbourhood sets, Pattern Recognition, Vol. 15, pp. 172-187 (1982).
35) Fairfield, J.: Segmenting dot patterns by Voronoi diagram concavity, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-5, pp. 104-110 (1983).
36) Lee, D. T.: Medial axis transformation of a planar shape, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-4, pp. 363-369 (1982).
37) 奥村, 福島：平面分割にもとづく図形の歪み対称性の認識技術, 1989 年度電子情報通信学会春季全国大会講演論文集, 分冊 6, p. 250 (D-530) (1989).
38) 吉田清範：代数的な量の符号判定に必要な計算精度, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J 69-A, pp. 543-547 (1986).
39) 杉原, 伊理：組合せ構造の優先によるボロノイ図構成算法の数値的安定化, 1988 年度応用数学合同研究集会報告集, pp. 183-192 (1988).
40) 杉原厚吉：パターン認識の道具としてのボロノイ図構成算法の整備, 電子情報通信学会パターン認識・理解研究会技術研究報告, PRU 88-119 (1989).

(平成元年5月15日受付)