オーディオビジュアル複合情報処理　25－1
（１９９９．６．４）

ガウス信号の低ＳＮ比量子化についての考察

北島 秀夫 †

† 北海道大学大学院工学研究科
〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目
TEL (011)706-6076
E-mail kitajima@media.eng.hokudai.ac.jp

本論文は信号の量子化に際して発生する雑音の振幅特性を検討し，信号の振幅に連動する形をもった量子化誤差評価式を提案する．そして新たな誤差評価式の下で量子化器を設計し，その特性が信号の確率密度関数の支配を受けにくいことを示す．

Scalar Quantization Based on a New Distortion Measure

Hideo Kitajima†

†School of Engineering, Hokkaido University
Kita-ku Kita-13 Nishi-8 Sapporo, 060-8628 Japan
TEL +81-11-706-6076
E-mail kitajima@media.eng.hokudai.ac.jp

This paper proposes a new performance measure for evaluating the performance of scalar quantizers. A nonlinear quantizer designed for robust operation under the new performance measure is presented.

1　まえがき

多くの信号源はアナログ値を出力するので，後段に控えるディジタル処理の準備としての量子化の重要性は高い．なかでも信号のサンプル値を個別に量子化するスカラー量子化は応用範囲が広く，通信技術の発達に合わせて種々検討されて来た．量子化に関する重要な理論的成果として，量子化の理論限界 [1]，最適量子化器の設計法 [2]，線形量子化と理論限界との関係 [3],[4] が挙げられる．最後に挙げた二つの文献においては，過負荷点が十分に大きく設定された線形量子化器が，理論限界に近い動作をすることが示されている．スカラー量子化に関する基本問題は解決済みであって，個々の応用においては，既製の量子化器を適応的に選択する余地しか残っていないという見方が支配的であろう．一方では，データ圧縮，特に，画像圧縮への期待感は未だ高いため，新しい圧縮方式が種々検討されている．しかし，そこでは量子化そのものに関しては最早議論はされていない．

この様な状況にもかかわらず，本論文においては敢えて量子化の問題に取り組む．それは，低ビットの量子化 (結果的には低ＳＮ比) には問題があるからである．ここでは，一般に用いられている平均自乗誤差尺度を問題にする．量子化問題は近似問題であるが故に，必然的に誤差尺度が登場し，現状を打破しようとすれば先人が使用した尺度の再考が求め

られ，新たな発展の可能性が出てくるからである．

以下，従来からある量子化器の設計手順をまず概括する．ついで，そこで用いられている誤差評価式の問題点を指摘し，誤差評価式を変更する．新たな誤差評価式の下で量子化器を設計し，その特性を説明する．

2　量子化器の設計手順

以下の議論においては，連続値をとる入力信号 $x, -L \leq x \leq L$ に対する離散近似値 $Q(x)$ を出力するスカラー量子化器を扱う．量子化関数 Q は

$$Q(x) = y_i, x_i \leq x < x_{i+1} \tag{1}$$

ここで，$x_i, 1 \leq i \leq N+1$ は区間 $[-L, L] = [x_1, x_{N+1}]$ の分点である．つまり，信号値 x が量子化ビン $[x_i, x_{i+1})$ の内部にあるときに，その量子化ビンに予め用意された y_i で近似される．

後で再考するが，ここでは量子化による近似誤差の大きさを $(Q(x)-x)^2$ で評価するとしよう．更に，入力信号値 x として確率信号を想定し，誤差を $(Q(x)-x)^2$ の期待値 D で評価することにしよう：

$$D = \mathrm{E}\left\{(Q(x)-x)^2\right\} \tag{2}$$

入力 x の確率密度関数を $p(x)$ とし，(1) を考慮すれば次式を得る：

$$D = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y_i - x)^2 p(x) dx \tag{3}$$

上式を用いることにより入力信号の確率分布から，この量子化器の平均自乗誤差特性が求められる．したがって量子化器の設計上，重要な基本式である．

上式の D は両端点 $x_1 = -L, x_{N+1} = L$ を除く分点，$x_i, 2 \leq i \leq N$，出力値 $y_i, 1 \leq i \leq N$，そして量子化段階数 N の関数である．この内，N の効果は自明であるとして一定値の正整数を与え，D が最小になるように，残りの分点および出力値を求めることができる [2]：

$$x_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \tag{4}$$

$$y_i = \mathrm{E}\{x \mid x_i \leq x < x_{i+1}\} \tag{5}$$

文献 [2] には，ガウス分布を仮定した場合の設計例が整理されている．なお，ガウス分布に対しては，端点はそれぞれ $x_1 = -\infty, x_{N+1} = \infty$ に設定される．以上の手順によって設計される量子化器を Max の非線形量子化器とよぶ．

量子化ビンの大きさを一定値Δに選ぶことにより，更に簡便な量子化器が得られ，多方面で実用されている．これが線形量子化器であり，N さえ与えられれば

$$\Delta = \frac{2L}{N} \tag{6}$$

によりその設計が終了する．ただし，ガウス分布に代表されるように N 等分すべき区間が無限に広い場合には，有限の量子化区間でそれを近似してからΔを求める必要がある．近似区間が広すぎれば区間内の量子化が粗く，逆に狭すぎれば量子化区間外の信号が到来すると大きな誤差 (過負荷雑音) が発生する．文献 [2] には線形量子化器の設計例も示されている．なお，量子化区間 $[-L, L]$ の両端点は過負荷点とよばれる．実用上は，過負荷点を信号の標準偏差σに対して 4σにとる場合が多いが，これは特別の N に対してのみ最適値であって，あくまで簡便な設定に過ぎない．

3　量子化誤差評価式

前節においては，量子化段階数 N を先に固定した上で，残りの設計パラメータの決定法を説明した．正整数 b に対して $N = 2^b$ という設定が一般のディジタル信号処理系には好都合である．現状では b として 4 から 24 が使われている．しかし，用途をデータ圧縮に限定するならば N を先に決めておくことに必ずしも合理性はない．量子化器出力を効率よく符号化する必要がある場合には，N よりも出力のエントロピーを監視すべきである．

データ圧縮を目的とするならば，仕様として量子化誤差 D を与えた上で，エントロピーを最小にするように残りの設計パラメータを決定することが

理想である．最近の数値計算手段を駆使すれば，これは不可能ではないかも知れない．しかし，大筋の結果は既に得られている．Gish[3] は，ガウス信号に対して，線形量子化器の出力エントロピーは近似的に

$$H(D) = R(D) + 0.25 \tag{7}$$

であたえられることを示した．ここで $R(D)$ は，理論上必要とされる符号量の限界であって，分散σ^2のガウス信号を量子化誤差 D(平均自乗値) で符号化する際には次式で与えられる．

$$R(D) = \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma^2}{D}, D \leq \sigma^2 \tag{8}$$

式 (7) で与えられるエントロピーは，同じ D について比較された場合，Max の非線形量子化器のそれよりも小さい．実際の設計においては，量子化ビンの大きさΔを与えておき，過負荷点を過負荷雑音が無視できるくらいに余裕をもって大きく設定するのみでよい．この際，出力エントロピーは (7) で与えられる値に収束する．

4 新しい量子化器の設計と性能

画像データの圧縮に線形量子化器がしばしば用いられる．前節で述べたように，線形量子化器の過負荷点を大きく取り，量子化出力を可変長符号化すれば，高能率の符号化が期待できるからである．しかし，線形量子化器に問題がないわけではない．ガウス信号に代表される，裾の広い確率密度関数を相手に符号量を下げたい場合には，量子化ビンの大きさ $Delta$ を大きくする必要がある．平均自乗誤差で評価する限り支障がない場合でも，実際には量子化誤差を無視できないことがある．これには，量子化器の使用目的に応じて様々な原因があると考えられるが，ここでは，誤差評価に使われている $(Q(x)-x)^2$ という量に注目する．この式においては信号レベル x そのものには無関係に量子化誤差が評価される．これを信号レベルで正規化する形で相対評価することを提案する．すなわち，一種の誤差対信号電力比 $(Q(x) - x)^2/x^2$をもって量子化誤差を評価するのである．ただし，この形式そのままでは $x = 0$ を扱えないので，ある定数$\lambda \neq 0$を用い修正を加え，$(Q(x)-x)^2/(x^2+\lambda^2)$ によって量子化誤差を評価する．式 (2) に相当する評価式は次式で与えられる：

$$NSR = \mathrm{E}\left\{\frac{(Q(x) - x)^2}{x^2 + \lambda^2}\right\} \tag{9}$$

上式は $x^2 \gg \lambda^2$の場合には，誤差電力対信号電力比の平均値という意味をもつ．一方，従来の類似の評価式は平均誤差電力と平均信号電力との比によって与えられる．

新たに導入した量子化誤差評価式 (9) を用いて，非線形量子化器を設計する．具体的な構成としては，圧伸方式を採用する．すなわち，記憶をもたない，ある非線形関数 $C(x)$ によって入力 x を変換した結果を線形量子化器に導く．線形量子化器の出力を $C(x)$ の逆関数 $C^{-1}(x)$ を用いて逆変換する．なお，誤差評価式から容易に予想されるように，$C(x)$ として対数関数が得られる．そこで先回りして圧伸方式という表現を用いた．

まず，圧縮関数の効果を考察するために，一般的な平均自乗誤差の解析をしよう．量子化誤差評価式 (3) を次式によって近似することができる．

$$D = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{N} p(y_i)\Delta_i^3 \tag{10}$$

ここでΔ_iは i 番目の量子化ビンの大きさを意味し，

$$\Delta_i = x_{i+1} - x_i \tag{11}$$

で与えられる．圧縮関数 $C(x)$ は滑らかであると仮定して，その導関数 $C'(x)$ を用いて次の近似関係を得る：

$$C(x_{i+1}) - C(x_i) = C'(y_i)\Delta_i \tag{12}$$

一方 $C(x)$ は $C(-L) = -L, C(L) = L$ を満足し，圧縮後は量子化段階数 N の線形量子化を行うとすれば

$$C(x_{i+1}) - C(x_i) = \frac{2L}{N} \tag{13}$$

が成立する．式 (12) と (13) とを組み合わせて次式を得る．

$$\Delta_i = \frac{\Delta}{C'(y_i)} \tag{14}$$

ここで

$$\Delta = \frac{2L}{N} \tag{15}$$

は，圧縮後適用される線形量子化器の量子化ビンの大きさである．

式 (14) を (10) に代入し，総和を積分によって近似すれば次式を得る：

$$D = \frac{\Delta^2}{12} \int_{-L}^{L} \frac{p(y)}{\left[C'(y)\right]^2} dy \tag{16}$$

同様の操作を新しい誤差評価式 (9) に対して行うと

$$NSR = \frac{\Delta^2}{12} \int_{-L}^{L} \frac{p(y)}{(y^2+\lambda^2)\left[C'(y)\right]^2} dy \tag{17}$$

を得る．

線形量子化器は特定の $p(x)$ を想定して設計されたのではない．結果として，その動作は広範囲の信号に対して，同じ自乗誤差での比較において，最低の出力エントロピーを示す [3]．式 (17) に基づいて新たに量子化器を設計する場合でも，特定の $p(x)$ に支配されない動作を目指すことにする．同式の被積分関数の分母を考察することにより，次式を満足する圧縮関数 $C(x)$ を得る：

$$C'(x) = \frac{c}{\sqrt{x^2+\lambda^2}}. \tag{18}$$

この式中の c の決定，および,$C'(x)$ から $C(x)$ を求める際に出てくる積分定数の決定に際して，次の条件を $C(x)$ に課す：

$$C(L) = L \tag{19}$$

$$C(0) = 0 \tag{20}$$

その結果，次の２式を得る：

$$c = \frac{L}{\log \frac{L+\sqrt{L^2+\lambda^2}}{\lambda}} \tag{21}$$

$$C(x) = L\frac{\log \frac{x+\sqrt{x^2+\lambda^2}}{\lambda}}{\log \frac{L+\sqrt{L^2+\lambda^2}}{\lambda}}, 0 \le x \le L. \tag{22}$$

なお，$-L \le x < 0$ に対しては $C(x) = -C(-x)$ を用いる．上式は $C(x)$ が対数圧縮関数であることを示している．

式 (16),(17) に (18) を代入することにより従来の平均自乗誤差と新しい誤差対信号比とをそれぞれ得る：

$$D = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{\sigma^2+\lambda^2}{c^2} \tag{23}$$

$$NSR_{new} = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{c^2} \tag{24}$$

を得る．更に，(23) をσ^2で割ることにより従来の誤差対信号比が得られる：

$$NSR_{conv} = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{\sigma^2+\lambda^2}{c^2\sigma^2} \tag{25}$$

もし

$$\lambda^2 \ll \sigma^2 \tag{26}$$

であれば (25) と (24) との大きさは，この圧縮関数 $C(x)$ を用いる場合は一致すると言える．

出力エントロピーは

$$H = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i \tag{27}$$

ここで P_iは入力信号が i 番目のビンに入る確率であって，次式で近似される：

$$P_i = p(y_i)\Delta_i \tag{28}$$

式 (28) と (28) とを (27) に代入し，総和を積分で近似することにより次式を得る：

$$H = -\int_{-L}^{L} p(y) \log_2 p(y) \frac{\Delta}{C'(y)} dy \tag{29}$$

上式に圧縮関数 (22) を代入し，信号の確率密度 $p(x)$ を与えることにより，エントロピーが計算される．

ここまで一連の解析は総和を定積分で近似することで可能になった．念のため，ガウス分布を仮定して数値解析を行ったところ，粗い量子化 (例えば$\Delta = \sigma, entropy = 3$ bits) の場合でも，積分による解析結果は有効であることが判明した．なお，$\lambda = \sigma$とおいた．また，同じλ を用いて新しく設計した量子化器の出力においては，線形量子化器と比べて 0.05 ~ 0.07 ビットだけエントロピーが大きいことがわかった．ただし，エントロピーに関する比較は低ＳＮ比 (粗い量子化，出力エントロピーは数ビット) の場合にのみ行なった．

5 むすび

平均自乗誤差を評価尺度とする，伝統的なスカラー量子化器の設計手順の要点を述べた．ついで，新しい量子化誤差評価式として誤差電力と信号電力の比の平均値を導入した．これに基づき対数型の圧宿関数を求め，非線形量子化器を設計した．得られた量子化器は広範囲の信号確率密度関数に対応可能な誤差評価値をもつ．また，そのガウス信号に対する出力エントロピーは，線形量子化器のそれと比べて実質的な増加はない (低ＳＮ比の場合にのみ確認).

残された課題は誤差評価パラメータλの決定法を考えること，また，実際に応用してみることである．

参考文献

[1] C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication.* Urbana, Ill. : University of Illinois Press, 1959.

[2] J. Max,"Quantizing for minimum distortion," IRE Trans. Information Theory, vol. IT-6, pp.7-12, March 1960.

[3] H. Gish and J.N. Pierce, "Asymptotically efficient quantizing," IEEE Trans. Information Theory, vol.IT-14, pp.676-683, September 1968.

[4] R. wood, "On optimum quantization,"IEEE Trans. Information Theory, vol.IT-15, pp.248-252, March 1969.