

2次元 DCT 係数に対する新たな確率密度関数の導出

黒木 祥光[†] 上繁 義史[‡]

[†] 久留米工業高等専門学校

[‡] 鹿児島工業高等専門学校

あらまし 本研究では、静止画像における離散コサイン変換 (DCT) 係数の分布を近似する新たな確率密度関数を提案する。提案する関数は Lam と Goodman の手法を基礎としており、DCT 係数の分散を 1 つの確率変数と考えたものである。Lam 等の手法は DCT 係数の分散が指数分布、若しくは片側正規分布に従うと仮定しているのに対し、ガンマ分布を採用した点が異なる。低周波成分の DCT 係数に対し、Kolmogorov-Smirnov (KS) 統計量を測定した結果、提案した関数はラプラス分布、正規分布に比べ近似度が高く、一般型ガウス分布に比べ、多少劣るとの結論を得た。

A proposal of new probability density functions for 2D-DCT coefficients

Yoshimitsu KUROKI[†] Yoshifumi UESHIGE[‡]

[†]Kurume National Colledge of Technology

[‡]Kagoshima National Colledge of Technology

Abstract This paper presents a new probability density function (pdf), which approximates the distributions of discrete cosine transform (DCT) coefficients for still images. Our discussion is based on the mathematical analysis using a doubly stochastic model reported by Lam and Goodman. In the contrast with their studies, we assume that the variance of the Gaussian distributions can be modeled by the Gamma distributions. The Kolmogorov-Smirnov (KS) test statistic of the proposed pdf for the high-energy AC coefficients is smaller than the Laplacian and Normal distribution, and is slightly larger than the general Gauss statistic.

1 まえがき

DCT 係数の各周波数成分は 8×8 画素から成る矩形ブロック内の画素値の線形和であるため、理論的には中心極限定理により、正規分布に従うと考えられる [1]。しかし、Reininger と Gibson は 256×256 画素、256 階調の静止画像数種類に対して KS (Kolmogorov-Smirnov) 統計量を測定した結果、特に画素値の変化が大きな画像を除いた場合、低周波成分の分布は正規分布よりラプラス分布に近いとの結果を得ている [2]。なお、Reininger 等の手法

では、DCT 係数は周波数毎に独立した信号源として取り扱われている。一方、Bellifemine 等は動画像において動き補償を行った場合と行わない場合、双方の DCT 係数に対して χ^2 統計量を測定している。その際、DCT 係数を平均値と分散で規格化しているが、規格化の方法として、(1) 画像全体に対して求めた平均値と分散を使用、(2) 各ブロック毎に平均値と分散を導出、(3) 幾つかの平均値と分散に分類、の 3 種類を行っている。その結果、動き補償を行わない場合、上記 (1) と (3) の規格化におい

て、ゼロを対称とするガンマ分布に、(2)の規格化ではラプラス分布に従うとの結果を得ている。また、動き補償を行った場合は常に一般型ガウス分布に従うとの結果を示している [3]。これらの報告は全て経験則、あるいは定性的な解釈に因るものであり、定量的な解析は示されていない。しかし、Lam と Goodman は正規分布の分散を 1 つの確率変数と考え、分散が指数分布の場合、DCT 係数はラプラス分布に従うとの結果を導出した。同時に、分散が片側正規分布の場合も近似的にラプラス分布に従う事も示している [4]。この報告は、DCT 係数がラプラス分布に従う理由を定量的に示したものであり、極めて興味深いものである。しかし、分散が指数分布、或いは片側正規分布に従うとの仮定には、多少の疑問が残る。本稿では、分散の分布として、非負の実数に対してしばしば用いられるガンマ分布を採用し、新たな確率密度関数の導出を試みる。なお、DCT 係数は Reininger や Lam 等と同様、周波数毎に異なる信号源と仮定する。

2 Lam と Goodman の手法 [4]

DCT 係数 $I_{m,n}$ ($m, n = 0, 1, \dots, 7$) の確率密度関数 $p(I_{m,n})$ は次式で与えられると仮定する。

$$p(I_{m,n}) = \int_0^{\infty} p(I_{m,n}|\sigma_{m,n}^2)p(\sigma_{m,n}^2)d(\sigma_{m,n}^2) \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_{m,n}^2$ は $I_{m,n}$ の分散を表す。以下、表記を簡略化するため、 $I_{m,n}$ と $\sigma_{m,n}^2$ の添え字を省略し、それぞれ I 、 σ^2 と記す。また、関数 $p(\cdot)$ は確率密度関数を表すものと仮定する。 $p(I|\sigma^2)$ は分散 σ^2 によって条件付けられた I の確率密度関数であり、中心極限定理により、次に示す平均値 0 の正規分布で表される。

$$p(I|\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{I^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2)$$

Lam 等は分散 $\sigma^2 \geq 0$ の分布を表す確率密度関数として、次に示す指数分布と片側正規分布を考え、双方の場合とも、DCT 係数の確率密度関数はラプラス分布になる (片側正規分布の場合は近似的に) との結論を得ている。

$$p(\sigma^2) = \lambda \exp(-\lambda\sigma^2) \quad (3)$$

$$p(\sigma^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{(\sigma^2)^2}{2s^2}\right\} \quad (4)$$

式 (3) のパラメータ λ および式 (4) のパラメータ s は、分散 σ^2 の平均値 $MEAN_{\sigma^2}$ 、および分散 VAR_{σ^2} と以下の関係にある。

$$\lambda = 1/MEAN_{\sigma^2} \quad (5)$$

$$s = \sqrt{VAR_{\sigma^2}} \quad (6)$$

式 (1) に式 (2) と式 (3) を代入し、整理すると

$$p(I) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \exp\{-\sqrt{2\lambda}|I|\} \quad (7)$$

となる。また、式 (3) の代わりに式 (4) を用いると

$$p(I) \approx \frac{\sqrt{2/s}}{2} \exp\{-\sqrt{2/s}|I|\} \quad (8)$$

が得られ、ラプラス分布となることが分かる。ここで、DCT 係数 I の分散 VAR_{coef} と各パラメータは次式の関係にある。

$$\lambda = 1/VAR_{coef} \quad (9)$$

$$s = VAR_{coef} \quad (10)$$

ただし、 VAR_{coef} は σ^2 と異なり、確率変数ではないことに注意する必要がある。また、 VAR_{coef} 、 λ 、 s は全て周波数毎に独立した値をとる。

3 提案する確率密度関数

3.1 ガンマ分布による分散の近似

本稿では、分散 σ^2 の分布を表す確率密度関数として、次に示すガンマ分布を採用する。

$$p(\sigma^2) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu (\sigma^2)^{\nu-1} \exp(-\alpha\sigma^2) \quad (11)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。 α はスケールパラメータ、 ν は形状パラメータと呼ばれ、周波数成分毎に異なり、それぞれ σ^2 の平均値および分散と以下の関係にある [5]。また、 $\nu = 1$ の時、指数分布となる [6]。

$$MEAN_{\sigma^2} = \nu/\alpha \quad (12)$$

$$VAR_{\sigma^2} = \nu/\alpha^2 \quad (13)$$

式 (2) および式 (11) を式 (1) に代入すると、次式を得る。

$$p(I) = \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} (\sigma^2)^{\nu-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left\{-\alpha\sigma^2 - \frac{I^2}{2\sigma^2}\right\} d\sigma^2 \quad (14)$$

ここで，次に示す積分公式 [8]

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp\left(-x - \frac{\mu^2}{4x}\right) dx = 2 \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\beta} K_{-\beta}(\mu) \quad (15)$$

を活用し，式 (14) を整理した結果，次式となる．

$$p(I) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sqrt{\frac{2^{-\nu+\frac{3}{2}} \alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{\pi}} \cdot I^{\nu-\frac{1}{2}} K_{-\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{2\alpha}I) \quad (16)$$

但し，式 (15) の関数 $K_{-\beta}(\mu)$ は第 2 種の変形ベッセル関数を表し， $\mu > 0$ の条件がある．また， $K_{\beta}(\mu) = K_{-\beta}(\mu)$ の性質を有する [9]．従って，式 (16) に対し， $I > 0$ の条件が必要であるが，式 (14) は明らかに $I = 0$ に関する偶関数である．結局，本論文で提案する確率密度関数は次式で表すことが出来る．

$$p(I) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sqrt{\frac{2^{-\nu+\frac{3}{2}} \alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{\pi}} \cdot |I|^{\nu-\frac{1}{2}} K_{-\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{2\alpha}|I|) \quad (I \neq 0) \quad (17)$$

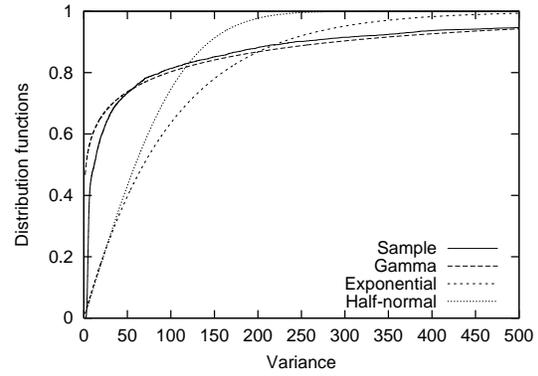
3.2 パラメータの導出

多くの確率密度関数にて使用されるように，モーメント法によりパラメータ α および ν と分散の関係を求める．なお，提案する関数は $I = 0$ を中心とする偶関数であるため，平均値は 0 である．著者らは既に [10] において，式 (14) を用いた分散 VAR_{coef} の導出過程を示したが，本稿では式 (17) を用い，分散とパラメータの関係を示す．その際，第 2 種の変形ベッセル関数における次の積分公式 [8] を活用する．

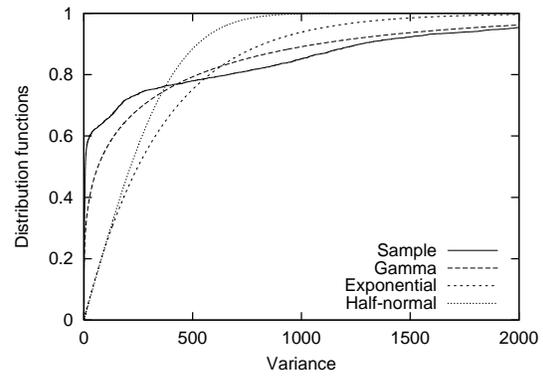
$$\int_0^{\infty} x^{\mu} K_{\beta}(ax) dx = 2^{\mu-1} a^{-\mu-1} \cdot \Gamma\left(\frac{1+\mu+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\beta}{2}\right) \quad (18)$$

式 (17) を式 (??) に代入し，式 (18) を参照すると，最終的に次式が導出される．

$$\begin{aligned} VAR_{coef} &= \int_{-\infty}^{\infty} I^2 p(I) dI \\ &= \frac{2}{\Gamma(\nu)} \sqrt{\frac{2^{-\nu+\frac{3}{2}} \alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{\pi}} \end{aligned}$$



(a) 肌色チャート

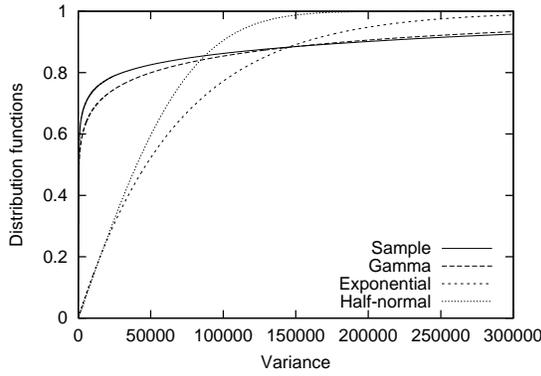


(b) 天気予報

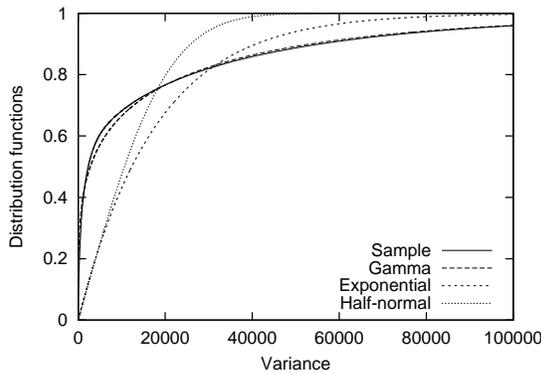
図 1: ITE 標準画像におけるブロック内画素値の分散に対する分布関数

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} I^{\nu+\frac{3}{2}} K_{-\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{2\alpha}I) dI \\ &= \frac{\nu}{\alpha} \quad (19) \end{aligned}$$

式 (19) より， VAR_{coef} と確率密度関数のパラメータ α, ν の関係が導出されたが，これだけでは両パラメータを一意に決めることは出来ない．従って，式 (11) に示した分散 σ^2 の確率密度関数のパラメータと同値であることに着目し，導出を試みる．これらのパラメータは式 (12)，(13) に示したように，それぞれ分散 σ^2 の平均値 $MEAN_{\sigma^2}$ 或いは分散 VAR_{σ^2} と関連づけられるが， σ^2 が確率変数である事に注意する必要がある．つまり， σ^2 はブロック毎に異なる，或いは数個のブロックにおいてのみ一定と考えるのが自然であるため，前者の場合は唯一，後者の場合は数個の DCT 係数をグループ化して分散を求める必要があり， σ^2 を知ることは困難と思われる．しかし， σ^2 はブロック内画素値



(a)PM001



(b)SA001

図 2: 超高精細画像におけるブロック内画素値の分散に対する分布関数

の分散 σ_b^2 に比例する性質を考慮すると、 σ_b^2 も σ^2 と同様にガンマ分布に従い、しかも形状パラメータ ν が同値、スケールパラメータ α のみ異なると捉えることができる。尚、式 (3)、(4) にて議論した指数分布および片側正規分布に対しても同様に、DCT 係数の分散とブロック内画素値の分散は、スケールパラメータのみが異なる同一の分布に従うと言える。

4 分布の比較

4.1 ブロック内分散の分布

提案する分布の優位性を示すため、まず、ブロック内画素値の分散に対する評価を行う。ここで、ブロック内画素値 σ_b^2 を評価の対象としたのは、上述したように σ_b^2 が DCT 係数の分散とスケールパ

表 1: ブロック内画素値の分散に対する各分布関数の KS 統計量

	指数分布	片側正規分布	ガンマ分布
肌色チャート	0.412	0.415	0.498
天気予報	0.535	0.539	0.235
PM001	0.630	0.634	0.374
SA001	0.383	0.387	0.119

ラメータのみが異なる同一分布に従うためである。近似度の評価尺度として、以下に説明する KS 統計量 [2, 7] を用いる。ブロック内画素値の標本値 $\Sigma = (\sigma_{b1}^2, \sigma_{b2}^2, \dots, \sigma_{bM}^2)$ によって定義される標本累積分布関数 $F_{\Sigma}(\sigma_b^2)$ は次式で定義される。

$$F_{\Sigma}(\sigma_b^2) = \begin{cases} 0, & \sigma_b^2 < \sigma_{b(1)}^2 \\ n/M, & \sigma_{b(n)}^2 \leq \sigma_b^2 < \sigma_{b(n+1)}^2, \\ & n = 1, 2, \dots, M-1 \\ 1, & \sigma_b^2 \geq \sigma_{b(M)}^2 \end{cases} \quad (20)$$

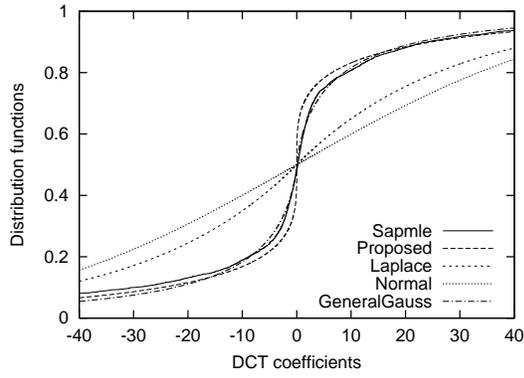
上式において、 $\sigma_{b(n)}^2$ ($n = 1, 2, \dots, M$) は標本 Σ を小さい順に並べたものである。また、各分布関数 $F(\sigma_b^2)$ に対する KS 統計量 t は次式で与えられる。

$$t = \max_{i=1,2,\dots,M} |F_{\Sigma}(\sigma_{b(i)}^2) - F(\sigma_{b(i)}^2)| \quad (21)$$

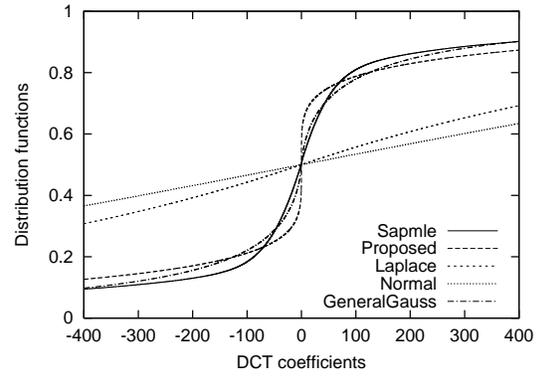
ただし、 $F(\sigma_b^2)$ は次式で定義される。

$$F(\sigma_b^2) = \int_{-\infty}^{\sigma_b^2} p(\sigma_b^2) d(\sigma_b^2) \quad (22)$$

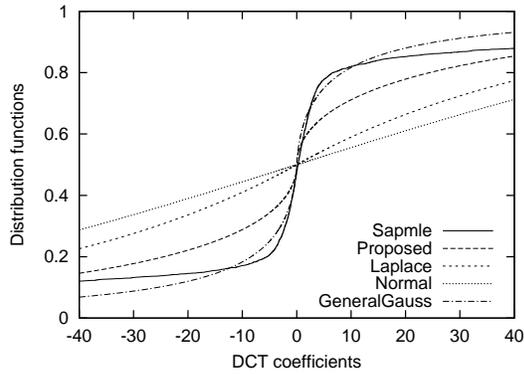
ITE 標準画像“肌色チャート”と“天気予報”(512 × 480 画素, 256 階調)における σ_b^2 の標本累積分布関数、指数分布、片側正規分布、ガンマ分布を図 1 に、サンプル画像として超高精細画像“PM001”と“SA001”(4,096 × 4,096 画素, 4,096 階調)を用いた場合の結果を図 2 にそれぞれ示す。また、各分布関数における KS 統計量を表 1 に示す。数値積分は GNU Scientific Library (GSL) の gsl-1.0 [11] を用いた。図 1 および図 2 より、ガンマ分布が標本累積分布関数に最も近いと思われる。実際に、表 1 では、肌色チャートを除く全ての画像においてガンマ分布の KS 統計量が最小となった。肌色チャートでガンマ分布の KS 統計量が最大となった理由は、形状パラメータ ν が小さい場合、0 付近の出現確率が極めて高い事に起因すると考えられる。つまり、図 1 (a)に見られるように、標本値の最小値 $\sigma_{b(1)}^2 = 1.530$ における標本累積分布関数の値 $F_{\Sigma}(\sigma_{b(1)}^2) = 2.60 \times 10^{-4}$ に対し、ガンマ分布



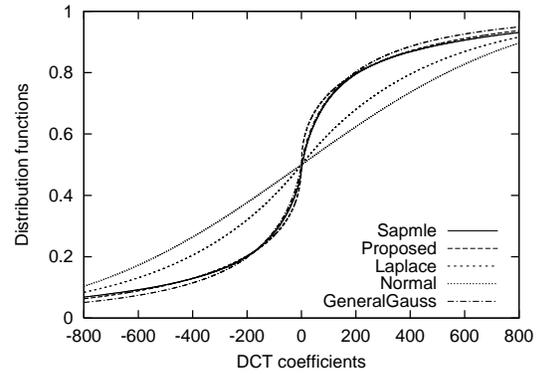
(a) 肌色チャート



(a)PM001



(b) 天気予報



(b)SA001

図 3: ITE 標準画像における DCT 係数 $I_{1,0}$ に対する各分布関数の比較

の値は $F(\sigma_{b(1)}^2) = 0.467$ であるために生じた結果である。しかし、肌色チャートにおいても他の分布と KS 統計量は大差ないため、ブロック内画素値の分散は指数分布、片側正規分布双方に比べガンマ分布に近いと結論付ける。

4.2 DCT 係数の分布

DCT 係数 $I_{1,0}$ に対する累積確率密度関数、およびラプラス分布、正規分布、一般型ガウス分布、提案分布の分布関数を求めた。ブロック内画素値の場合と同様に、サンプル画像として ITE 標準画像を用いた場合を図 3 に、超高精細画像を用いた場合を図 4 にそれぞれ示す。また、KS 統計量の測定結果を表 2 に示す。なお、一般型ガウス分布は次式

図 4: 超高精細画像における DCT 係数 $I_{1,0}$ に対する各分布関数の比較

で与えられる。

$$p(I) = \left\{ \frac{a\eta(a,b)}{2\Gamma(1/a)} \right\} \exp[-\{\eta(a,b)|I|\}^a] \quad (23)$$

ただし、 $b = \sqrt{VAR_{coef}}$ であり、 $\eta(a,b)$ は次式で与えられる。

$$\eta(a,b) \equiv \frac{1}{b} \left\{ \frac{\Gamma(3/a)}{\Gamma(1/a)} \right\}^{1/2} \quad (24)$$

一般型ガウス分布のパラメータ a, b は周波数毎に異なり、 $a = 1$ の時ラプラス分布を、 $a = 2$ の時正規分布を表す。 a は 0.01 刻みで変化させ、KS 統計量が最小となる値を採用した。各画像における a の値を表 3 に示す。提案分布における第 2 種のベッセル関数の計算は、数値積分と同様 gsl-1.0 を用いた。図 3、図 4、および表 2 より、提案した確率密度関数は一般型ガウス分布には多少劣るものの、全ての場合において、正規分布およびラプラス分布より実際の分布を良く近似していると言える。

表 2: DCT 係数 $I_{1,0}$ に対する各分布関数の KS 統計量

	ラプラス分布	正規分布	一般型 ガウス分布	提案分布
肌色チャート	0.176	0.213	0.0297	0.127
天気予報	0.249	0.275	0.0561	0.138
PM001	0.270	0.303	0.0435	0.132
SA001	0.125	0.176	0.0205	0.0547

表 3: DCT 係数 $I_{1,0}$ における一般型ガウス分布のパラメータ, a

肌色チャート	天気予報	PM001	SA001
0.34	0.25	0.24	0.43

5 まとめ

本研究では, DCT 係数の分布を近似する新たな確率密度関数を提案した. 本手法は Lam と Goodman の手法を基礎としており, DCT 係数の分散を 1 つの確率変数と考えたものである, Lam 等の手法は DCT 係数の分散が指数分布, 若しくは片側正規分布に従うと仮定しているのに対し, ガンマ分布を採用した点が異なる. 低周波成分の KS 統計量を測定した結果, 提案した関数はラプラス分布, 正規分布に比べ近似度が高く, 一般型ガウス分布に比べ, 多少劣るとの結論を得た. 今後の課題として, 様々な静止画像, 動画像における検証, 提案分布を用いて作成した量子化表や符号表の評価等が挙げられる.

参考文献

- [1] A. N. Netravali and J. O. Limb, "Picture coding: A review", Proc. IEEE, vol. 68, no. 3, pp. 366–406, Mar. 1980.
- [2] R. C. Reininger and J. D. Gibson, "Distributions of the Two-Dimensional DCT Coefficients for Images", IEEE Trans. Commun., vol. COM-3, no. 6, pp.835–839, June 1983.
- [3] F. Bellifemine, A. Capelino, A. Chimienti, R. Picco, and R. Ponti, "Statistical analysis of the 2D-DCT coefficients of the differential signal for images", Signal Process. Image Commun., vol. 4, pp. 477–488, Nov. 1992.

- [4] E. Y. Lam and J. W. Goodman, "A mathematical analysis of the DCT coefficient distributions for images", IEEE Trans. Image Processing, vol. 9, no. 10, pp. 1661–1666, Oct. 2000.
- [5] 伏見正則, "確率と確率過程", 講談社, 1987.
- [6] 蓑谷 千鳳彦, "すぐに役立つ統計分布", 東京図書, 1998.
- [7] 竹内 啓, "確率分布と統計解析", 日本規格協会, 1975.
- [8] 大槻義彦訳, "数学大公式集", 丸善, 1983.
- [9] 数学ハンドブック編集委員会編, "理工学のための数学ハンドブック", 丸善, 1994.
- [10] 黒木祥光, 上繁義史, "DCT 係数の分布に関する一考察", 信学技法, IE2001-116, pp. 1–6, Nov. 2001.
- [11] <http://sources.redhat.com/gsl/>