情 報 学 基 礎　10－2
（１９８８．９．１６）

確率論理と知識獲得

大野和彦

日本電気㈱

帰納的学習のための知識表現の枠組みとして確率論理を設定し、これに基づく知識獲得と知識利用について報告する。

第１のテーマとして確率論理のモデル理論を述べ、実例の測定を繰り返すことによって確率論理式の論理値がその式の成立する確率へ収束する事を示す。これは確率論理の大数の法則であり、帰納的学習が収束する必要条件となる。

第２のテーマとして確率論理の演繹推論を論じる。述語論理の演繹推論では理論が無矛盾である限り論理式Ｐと～Ｐが同時に導出されることはないが、確率論理の演繹推論では論理式Ｐに対して複数の推論経路が存在して複数の相異なる論理値が対応する場合がある。この問題の解決法として、エントロピー最大原理に基づいて複数の論理値から最尤論理値を推定する演繹推論の方法を論ずる。

Stochastic Logic for Knowledge Aquisition

Kazuhiko OHNO

C&C Information Tech. Res. Labs. NEC Corp.

Miyazaki 4-1-1 Miyamae-ku Kawasaki-si Kanagawa Japan 213

This paper first presents a model theory of stochastic logic which is a multi-valued first order logic. This model theory is based on observation of examples. It is emphasized that logical value of each logical formula is updated by observation , and logical value converges to a truth probability.

The 2nd theme of this paper is deductive inference on stochastic logic. We explain a contradictory problem of stochastic duductive inference , and resolve this with maximum entropy principle.

1．はじめに

将来の学習機械は単純な原理のみに基づくものではなく、むしろ様々な要素技術－－例えば、発想の種としての神経回路網，抽象的思考の枠組みとしての形式論理，仮説評価検証の数理的基礎としての数理統計等－－を集積して実現されると予想される。これら要素技術の例として Shapiro のＭＩＳ [1]や Quinlan の決定木学習[2], Rumelhartの後方伝播学習[3] 等があるが、現在のところ、発展途上にあり、またこれらを統合して自律的な学習機械を作る枠組みは明かにされてはいない。

われわれは、学習機械の中核として、普遍性の高い知識表現言語を設定し、この上で確率統計的な推論方式や神経回路網との情報リンクなどを検討する方針で自律的学習機械への接近を試みている。

以上の展望に基づいて、本稿では形式論理の上での帰納的学習を議論する。帰納的学習とは、幾つかの事例から規則性を抽出することにより知識を後天的（好転的）に獲得することであり、これは学習機械構築のための主要な研究テーマとして上記の要素技術－－神経回路網，形式論理，数理統計－－が共通に掲げる目標でもある。本稿では、学習する知識が形式言語で表現され、学習プロセスが形式的手続きとして定式化された帰納的学習を帰納推論と呼ぶことにする。

帰納推論では知識は実例，仮説，規則の集合である。実例が学習機械に対して外部から与えられ、学習機械はそれを説明する理論を構築することを要求される。仮説は実例を説明するために学習機械が生成する論理式、規則は学習機械に先見的に与えられる法則である。

説明のため航空機の翼面荷重Ｗｓと失速速度Ｖｓ の関係を学習する例を挙げる。図１に示すように、フラップ付きの機体ではエンジン停止時には、

$$\log(V_s) = \alpha \log(W_s) + \beta$$

α，βは定数　(1.1)

の関係をほぼ満たしている[4]。この知識は一階論理を用いて、

```
weight_stall( AirCraft, Ws, Vs )
    :- power( AirCraft , off ),
       flap( AirCraft , on ),
       log(Vs) = α log(Ws) + β  (1.2)
```

と記述できる。航空機の初期設計では、おおまかな要求仕様から機体諸元を決定する際に式(1.1)のような過去の例を利用した推算式を多数用いる。式(1.2)は機体設計のための知識であって、帰納推論系に対して期待する解の一例である。

帰納推論系は、実例として、

```
weight_stall( YS-11 ,236 ,74 ),
power( YS-11 ,off ),
flap( YS-11 ,on )
```

等を与えられ、これらの実例を説明する仮説として式(1.2)のような論理式を生成し、検証する。仮説生成の際に用いた述語は、logと加算，積算であり、この様な事前知識を規則と呼ぶ。

帰納推論は生成可能な仮説の中から、もっともらしい仮説（全ての実例を説明する仮説）を発見する探索問題として定式化できるが、発見した仮説が実例を生成している真の解と一致するという保証は一般に有限回の実例観測のもと

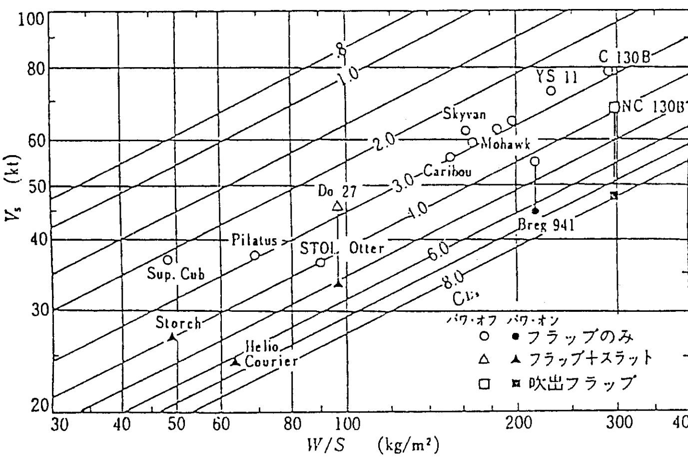

図１．失速速度と翼面荷重の関係

では得られない[5]。 従って、絶対の正しさを要求されるプログラムを自動生成するような問題に対して帰納推論を適用する場合、仮説空間を有限に限定するなどの注意が必要である。

ただし、この事実をもって帰納推論の工学的価値を減ずるべきではない。今日工学に対して貴重な知見を提供している物理学は、自然現象の数理的解釈を基礎としており、これは広義の帰納推論と呼べるものである。真の解は神のみしか知り得ないものだとしても、近似的な解あるいは暫定的な解が工学的に有効であることは明かである。

2．確率論理

現実的な応用の場では、実例を厳密に説明することは多くの場合困難であり、そもそも実例の無矛盾性を保証することすら難しい。従って、理論にある程度の誤り（誤差）が含まれることはやむをえず、誤りの少ない理論を構築することが学習機械の目標となる。

学習機械は仮説の生成・検証・修正を繰り返すことにより理論を構築していくが、この過程で問題になるのは妥当な仮説の生成・修正法と仮説の評価基準である。すなわち、正解率が高く利用範囲の広いと予想される仮説を優先的に生成する方式，ある程度妥当性を確認した仮説を組み合わせて新しい仮説を生成する方式および、仮説の妥当性を評価する定量的基準が必要となる。

我々は定量性の基礎を確率に求め、述語論理式の論理値に観測と確率の意味付けを与え[6]、確率論理(Stochastic Logic = SL) を提案している[7]。

SLでは、知識の最小単位である節は {整式, 論理値, 観測数} の３項組で表される。整式は述語論理の整式にいくつかの記号を追加したもの，観測数は整式の観測頻度，論理値は整式の論理値として真を観測する確率である。以下に「100例の鳥のうち90%が飛べる」を意味する節を示す。

{[$^{\alpha}$X](can_fly(X) ← bird(X))
,0.9 ,100 }

ここで記号 $^{\alpha}$は不定限量子と呼ばれ、不定限量された式 [$^{\alpha}$X]P(X) は「X を無視して P(X) が成り立つ」ことを主張する。またその論理値は不定のX に対してP(X)が成立する確率となる。

< 確率論理のシンタクス >

一階述語論理のシンタクスにくわえて、定数記号として u （未知定数），限量記号として $^{\alpha}$（不定限量子）を含む。

3．確率論理のセマンティクス

帰納的学習の過程で知識は動的に変化する。確率論理ではこの変化は、仮説論理式の論理値の更新および新しい仮説論理式の追加，古い仮説論理式の削除により実現される。本節では実例の測定に伴う論理値の確率的意味付けと更新方法を明らかにする。図２に概略を示すように、まず矛盾のない２値論理式であたえられる完全な情報源を仮定する。ここには、対象に関する全ての情報が含まれており誤りや誤差のないモデル化が実現されているものとする。この情報源から論理式を取り出すことを測定と呼ぶが、測定にともなって情報の一部が欠落し論理値のゆらぎを起こす。

［例］ 完全情報源：

黒い（からす，権べ）　真

黒い（からす，かん一郎）　偽

測定情報：

黒い（からす， u ）　真

黒い（からす， u ）　偽

仮説論理式：

黒い（からす， u ）論理値＝0.5

論理値は測定にともなって更新される値である。一方、論理式の確率的性質を規定する真理値割付規則にしたがって真理値が定義されるが、測定を繰り返すことにより論理値は真理値に確率収束する。これが論理値収束定理である。

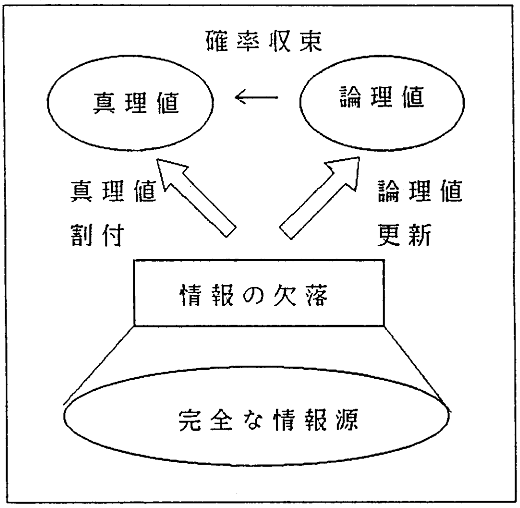

図２．確率論理のセマンティクス

＜　確率論理の測定論　＞

学習の対象となる現実世界を対象世界と呼び、システムが作り出す世界を模擬世界と呼ぶ。対象世界が述語論理の無矛盾な節集合で記述されていると仮定し、対象世界のモデルからグランドアトムをひとつ取り出して、その定数の一部分を隠して模擬世界へ取り込むことを、測定と呼ぶ。対象世界のグランドアトムに対して取り出し確率と定数の未知化を定義し、これらの組を測定構造と呼ぶ。

［取り出し確率］対象世界モデルのグランドアトムＰに対して確率ｅ(Ｐ)を割り当てこれを取り出し確率と呼ぶ。

［未知化関数］対象世界のグランドアトムの定数を未知定数ｕで置き換えることを未知化とよぶ。未知化関数　ｈ　は対象世界のグランドアトムと模擬世界のグランドアトムを対応づける多対１の関数とする。

例：　親(ホァンホァン，トントン)を第２項について未知化すると

　親（ホァンホァン，ｕ）となる。

これを未知化関数で表すと

　親(ホァンホァン，ｕ)＝

　　ｈ(　親(ホァンホァン，トントン)　)

となる。

［真理値の割付］確率論理の式Ｐの真理値 $\tau(P)$は区間［0，1］の実数値をとる。また観測度　$\mu(P)$は正の実数値をとり、それぞれ以下の割り付け規則によって定義する。

（紙面の都合上一部のみを示す。）

Ｐがグランドアトム；

真理値割り付け

$$\tau(P)=\sum_{q\in Q} e(q)\,t(q)\,/\,\Sigma\, e(q)$$

観測度割り付け

$$\mu(P)=\sum_{q\in Q} e(q)$$

ただし

$$Q=\{q \mid P=h(q)\},$$

$$t(q)=\begin{cases}1 ; & \text{qの真理値が ” TRUE”}\\ 0 ; & \text{qの真理値が ” FALSE”}\end{cases}$$

$P=\ A\wedge B\ ;$

$$\tau(P)=\tau(A)\tau(B)$$
$$\mu(P)=\mu(A)\mu(B)$$

$P=\ A\rightarrow B\ ;$

$$\tau(P)=\tau(B)$$
$$\mu(P)=\mu(B)\tau(A)$$

$P=[\,^{a}X]\ (A\ (X)\ )\ ;$

$$\tau(P)=\frac{\sum_{x}\tau(A(x))\,\mu(A(x))}{\sum_{x}\mu(A(x))}$$
$$\mu(P)=\sum_{x}\mu(A(x))$$

測定構造はＭの真理値を決定する。ただし測定構造を予め知る事はできないので、真理値を陽に知る事もできない。そこで確率論理では、具体的な測定を繰り返すことによって更新される論理値と観測数が定義されている。簡単に述べると、グランドアトムの論理値は測定結果から推定した真理値であり、整式の論理値は上記のセマンティクスを満足するように更新される。

［論理値の更新］

測定結果として論理式ｐとその真理値ｔ(ｑ)を得る毎にｐの追加論理値を

ｔ(ｐ)，観測数変動をある定数として以下の更

新手続きを更新すべき式がなくなるまで再帰的に繰り返す。

<更新手続き>

論理式Pの追加論理値 $\Delta\tau$，観測数変動 $\Delta\mu$ が与えられたとき

Pのそれまでの論理値をτ，
観測数をμとすると、
Pの新しい論理値τ'，観測数μ' は

$$\mu' = \mu + \Delta\mu$$
$$t' = \tau\mu + \Delta\tau\Delta\mu$$
$$\tau' = t' / \mu'$$

P∧Qのそれまでの論理値をτ, 観測数をμ,
Q のそれまでの論理値をτq とすると、
P∧Qの追加論理値を$\tau q \Delta\tau$，
観測数変動を$\Delta\mu$
として更新手続きを継続

P→Qのそれまでの論理値をτ, 観測数をμ,
P のそれまでの論理値をτp
新しい論理値を$\tau' p$ とすると
P→Qの追加論理値をτ，観測数変動
を $\Delta\mu$ $(\tau p' - \tau p) / \tau p$
として更新手続きを継続

Q→Pのそれまでの論理値をτ, 観測数をμ,
Q の論理値をτq とすると
P→Qの追加論理値を $\Delta\tau$，
観測数変動を$\tau q \Delta\mu$
として更新手続きを継続

論理式P(a)の追加論理値 $\Delta\tau$，
観測数変動 $\Delta\mu$ が与えられたとき
[ᵅX] P(X) のそれまでの論理値をτ，
観測数をμとすると、
[ᵅX] P(X) の追加論理値 $\Delta\tau$，
観測数変動 $\Delta\mu$
として更新手続きを継続

<論理値の収束定理>

補題１　Pがグランドアトムのとき論理値の更新を繰り返すことにより、Pの論理値はPの真理値へ確率収束する。

［証明］大数の法則を用いて簡単に証明できる。

補題２　任意のグランドアトムの論理値が確率収束する場合，任意の整式の論理値も確率収束する

［証明］論理積，含意については論理式を構成する部分論理式が有限であることから、部分論理式の論理値の変動δiの総和が最大の変動δ_{max}の自然数倍で　おさえられ、δ_{max}が確率収束することにより論理値が確率収束する。不定限量　された論理式については補題１と同様にして示される。

補題３　論理値の修正手続きは確率論理の真理値割付の制約を保存する。則ち真理値割付により計算した論理値と更新手続きで求めた論理値は一致する。

［証明］　略

補題１，２，３より、次の定理が導かれる。

［定理］（論理値収束定理）測定と更新を繰り返すことにより、整式の論理値は真理値に確率収束する。

論理値収束定理は確率論理の帰納的学習が収束するための必要条件である。

４．エントロピー最大原理に基づく演繹推論

確率論理の演繹推論では２値論理には見られない問題が生じる。これを例題により説明し、その解決としてエントロピー最大原理に基づく演繹推論方式を示す。

まず確率論理の演繹推論規則を示す。

$$A(\tau_A),\ A \to B(\tau_{AB}, \mu_{AB})$$
$$B\ (\tau_B, \upsilon_B, \mu_B)$$
$$\tau_B = \tau_A \tau_{AB},\ \upsilon_B = 1 - \tau_A,\ \mu_B = \tau_A \mu_{AB} \qquad (4.1)$$

ただし

τ_A，τ_B，τ_{AB}：A，B，A→Bの論理値；

μ_B, μ_{AB}：B，A→Bの観測度(観測数)；
υ_B：Bの不明値；
である。このうち不明値とは式の真偽についての情報が得られない確率を表す。

＜例題＞

箱の中に多数の貨幣があり、無作意抽出により次の3つの情報を得たとする。

1:抽出した貨幣のうち穴開き貨幣は100個，
　楕円貨幣　は10000個あった。
2:穴の開いた貨幣の10%は金貨である。
3:楕円型の貨幣の90%は金貨である。

1,2,3を確率論理の節で記述する。

{[^{a}X] (gold(X) ← has_hole(X))
　　　,0.1 ,　100 }　　(4.2)

{[^{a}X] (gold(X) ← ellipse(X))
　　　,0.9 , 10000 }　　(4.3)

節(4.2)は穴開貨幣100個の内 10%が金貨である事を，節(4.3)は楕円貨幣 10000個の内 90%が金貨であることを、主張している。いま貨幣1が楕円の穴開貨幣であることが解ったとき、貨幣1はどの程度の確率で金貨だといえるだろうか？（図3）。

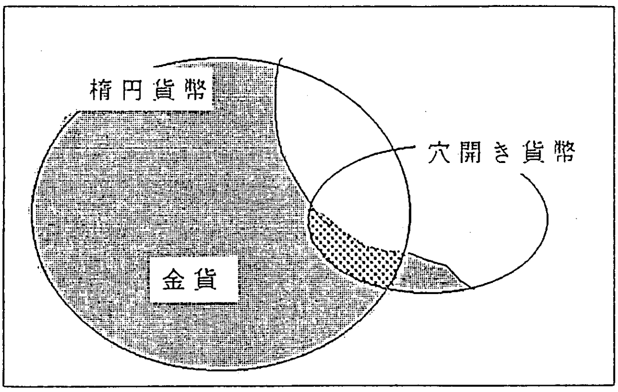

図3．貨幣の推定

演繹推論規則より節(4.2) からは

{ gold(貨幣1),0.9,10000}　　　(4.4)

節(4.3)からは

{ gold(貨幣1),0.1, 100 }　　　(4.5)

が得られるが、(4.4)と(4.5)の論理値（確率）はそれぞれ0.9, 0.1となっており、それぞれが殆ど逆の事柄を主張している。このように単一の結論に対して複数の論理値が対応することは演繹推論の継続にあたって不都合であり、論理値を統一して一つの妥当な論理値を得ることが必要になる。

問題を一般化する。

前提条件の集合を {C_1, C_2} とする。このとき

τ_i； 条件 C_iのもとで結論 Rの成り立つ条件付き確率（論理値）
μ_i： 条件 C_iのもとでの結論 Rの観測数

が与えられ

τ ； 条件 $C_1 \wedge C_2$ のもとで結論 Rの成り立つ条件付き確率
μ ； 条件 $C_1 \wedge C_2$ のもとでのRの観測数

を求める。　　　(4.6)

τ，μを推定するために以下の仮定を置く。

［仮定］　エントロピーEを最大にする。

$$E = -\Sigma\,\omega_i \log(\omega_i) + \Sigma\,\omega_i H(\nu_i) \quad (4.7)$$

$$H(\nu) = -\nu \log(\nu) - (1-\nu)\log(1-\nu) \quad (4.8)$$

ただし

m_i：排他的な前提条件
　($C_1 \wedge C_2$, $C_1 \wedge -C_2$, . .)のもとでの
　結論Rの観測数　；
$M = \Sigma\, m_i$　；
$\omega_i = m_i / M$
ν_i：排他的な前提条件
　($C_1 \wedge C_2$, $C_1 \wedge -C_2$, . .)のもとで結論
　Rの成り立つ条件付き確率

である。

前述の楕円穴開貨幣の問題についての数値解は、

$\tau = 0.3338$　　$\mu = 16.84$

となる。この推定は、100 個の穴開貨幣のうち楕円貨幣は約17個あって、そのうち約6個が金貨である事を示している。金貨の可能性は約33% と推定されており、10%,90%の 中間値50% よりも低い値になっている。”穴開き”は

希にしか出現しない貨幣なので、その情報を重視して導かれた結論「どちらかといえば金貨ではない」は直感的にも納得できる。

エントロピー最大原理は確率的推定の分野ではしばしば用いられる仮定である[8]。確率論理のにおける特徴は事前確率を仮定しない点にある。エントロピーは与えられた制約条件の元で可能な粒子（貨幣）配置の場合の数の増加関数であり、エントロピーを最大にする配置比（楕円貨幣，穴開貨幣等の比率）は配置の場合の数が最大になる配置比に他ならない。つまり、ある制約条件の元で配置が無作意に行われたとき、確率的に最も起こりやすい配置比がエントロピーを最大にする配置比である。

エントロピー最大は対象となる空間に不自然さがないという仮定であるため推定が外れることがある。従来の統計的推測では、これは望ましい状態ではないが、学習機械にとっては新しい知識を増やすきっかけとなる。すなわち、エントロピー最大仮定の不成立は、なんらかのバイアスが存在して観測値に影響を与えている事を示唆する。この情報は新しい仮説を生成する動機付けとなる。

5．まとめ

確率論理の測定論を述べた。確率論理式の論理値は実例の測定に基づいて更新されるが、この値が論理式の成立確立である真理値に収束することを示した。この性質は学習の収束の必要条件として重要である。

さらに節の情報を利用して結論の論理値を推定する演繹推論方式を示した。つまり、確率論理の測定論により意味付けられた確率パラメータ（論理値，観測数）を利用して、演繹推論

$$A,\ B,\ A\rightarrow C,\ B\rightarrow C\ \vdash\ C$$

におけるCの論理値を計算する方法を示した。Cの論理値はA，BのもとでC＝真となる確率の推定値である。推定の尤らしさの基準としてエントロピー最大を仮定した。

帰納的学習の進捗とエントロピーの変化には関係がある。この性質を利用して仮説の評価基準を設定することが今後の課題である。

謝辞

C＆C情報研究所　中村勝洋部長，
紀　一誠課長，永井義裕課長，
笠原　裕課長，上野順一主任，
宮下敏昭主任，三浦晋示主任，
宮内　宏氏
情報処理グループ　真名垣昌夫技師長
に感謝の意を表します。

参考文献

[1] Shapiro E. Y.：知識の帰納的推論　共立出版 1986

[2] Quinlan，J. R. ：Induction of dicision trees , Machine Learning 1，pp81-106 1986

[3] D. E. Rumelhart , J. L. McClelland，(Eds) Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition. MIT Press ,Cambridge，1986

[4] 山名　他　航空機設計論 ，養賢堂　1968

[5] Gold E. M. :Language Identification in the Limit，Information & Control 10 (1967)，447-474

[6] 大野　他：あいまい帰納推論とその応用，人工知能学会全国大会（１回）論文集 65-68 ，1987

[7] 大野　他：確率論理：演繹推論について，人工知能学会全国大会（２回）論文集 41-44 ，1988

[8] Cheeseman P.[1983]:A Method of Computing Generalized Bayesian Probability Value for Expert Systems 8th IJCAI pp198-202