グラフィクスとCAD 27－4
(1987. 7. 10)

n次元ディジタル画像の可逆的幾何変換法

志沢　雅彦

NTT電気通信研究所

本報告では，変換行列の行列式が1または－1である様な1次変換（等積1次変換）を，斜交軸変換と，座標軸の交換および座標の符号反転に対応する鏡映変換に分解し，これらの変換を整数近似したものを順次原画像に施すことにより，n次元のディジタル画像に対して，画素を保存する1次変換を可逆的に実行する方法を提案する．この方法によれば，与えられた等積1次変換を近似する様に画素が隙間なく転送される．

さらに，本報告では，座標値の整数近似による誤差を評価する方法を示し，それを用いて，一般の等積1次変換に対して座標誤差の小さい分解を得るためのアルゴリズムを提案する．最後に，2次元と3次元における回転変換の誤差最小分解例を示す．

An Inversible Geomertrical Transformation of n-dimensional Digital Images

Masahiko SHIZAWA
NTT Electrical Communications Laboratories
1-2356, Take, Yokosuka, Kanagawa, 238-03 Japan

This paper proposes an algorithm for n-dimensional *equivalent linear transformations* which preserve volume of n-dimensional figures. This algorithm resolves an equivalent linear transformation into a product of *skew transformations* and *reflective transformations*. These transformations of real numbers are approximated to integer transformations. The approximated transformations are applied to an original image in order. We also improve the algorithm to minimize approximation error. The proposed algorithm is *inversible*, because there exists *one-to-one correspondence* between pixels before transformation and pixels after transformation. Optimal resolution for 2 and 3 dimensional rotations is shown.

1．はじめに

ディジタル画像に対して回転，アフィン変換などの幾何学的変換を施す必要性は，画像処理に関する多くの応用分野に関連して現れる[(1)-(7)]．しかし，ディジタル画像の離散的性質によりその扱いが困難であった．すなわち，変換に際して座標値の整数化，画素値の補間，画素の間引きなどの処理を行う必要が生じるので，一般的には，原画像の情報を失わない様に任意の変換を行うことは困難である[(1)]．

例えば，通常，画像に対する幾何学的な変換は，次の２つの手順から構成される．

① 変換後画像の各画素に対して，与えられた変換式を用いて，変換前画像での対応点の座標を求める．

② ①で求められた変換前画像上の座標における画素値を周辺画素の画素値から補間などの方法により求め，変換後画像の対応する画素に格納する．

手順①においては，一般に変換前画像での対応点の座標値が任意の実数値をとりうるので，画素単位の対応をただちに求めることが不可能である．従って，②において画素値の補間処理が必要になる．手順②の補間法には座標の最も近い画素を対応させる方法や，周辺画素の画素値を重み付け平均するなど種々の方法が提案されているが，いずれの方法も原画像の情報を失うことは避けられない．特に，２値画像の場合には画素値の補間が困難なので，画素の間引き，重複転送により画像の品質を著しく損なうことが起こりうる．

本論文では，ｎ次元Euclid空間における１次変換の内で，変換の表現行列の行列式が１あるいは－１に等しい変換（閉図形のｎ次元（超）体積（２次元の場合は面積）を保存する１次変換，以下，等積１次変換と呼ぶ）を画素の補間を一切行わずにｎ次元ディジタル画像に対して施す方法を提案する．この方法によれば，変換後の画像から元の画像を完全に復元することが可能である．すなわち，与えられた等積１次変換を近似する様に画素が隙間なく並べかえられることになる．

まず，等積１次変換が，画素を座標軸方向へシフトさせる処理だけで実現可能な変換である斜交軸変換（skew transformation, shearing transformation,あるいは，transvection(移換)とも呼ばれる）といくつかの座標軸に関連した基本鏡映変換（後述）の有限個の積に分解可能であることを示す（以下，両変換をあわせて基本変換と呼ぶことにする）．斜交軸変換には，座標を整数近似した場合（これを整数近似斜交軸変換と呼ぶ）にも逆変換が存在する（すなわち，原画像から変換画像への１対１上への写像である）ことが示される．また，基本鏡映変換は，座標の交換と，符号反転のみで実行可能である．したがって，分解によって得られた基本変換のそれぞれをそれらに対応する整数近似基本変換に置き換えてディジタル画像に施せば，この合成変換は可逆変換となる．すなわち，変換の際のパラメータを保存しておけば，整数近似基本変換のそれぞれの逆変換を逆順に変換画像に施すことにより，原画像を完全に復元することが可能である．

さらに，整数近似斜交軸変換および，その合成変換の座標誤差の評価法を提案し，この評価法に基づいて，任意の等積１次変換が与えられた場合に，最終的な座標誤差の小さい分解を求めるアルゴリズムを示す．

最後に，２次元等積１次変換と，２次元および３次元の回転変換について，実現例を示す．

従来，画像の幾何学的変換の高速化の視点から，２次元ディジタル画像における１次変換を，高速に実行可能ないくつかの変換の積に分解して実現する方法が提案されている[(2),(3),(4)]．文献(2),(3)では，任意の１次変換を，２個の斜交軸変換と，２個の座標軸方向の膨張変換に分解している．また，文献(4)では，２次元ディジタル画像の回転変換を３つの斜交軸変換の積に分解することにより，高速かつ可逆的に実行する方法を提案している．文献(4)の方法は，本論文で提案する方法の特殊な場合である．

２．等積１次変換と斜交軸変換

等積１次変換，斜交軸変換を以下の様に定義する．

<u>**定義２－１**</u>　ｎ次元Euclid空間の１次変換 $f: R^n \to R^n$ が，

$$f(x) = Ax \quad (x \in R^n,\ |\det A| = 1)$$

と書かれる時，ｆを等積１次変換と呼ぶ．ここで，ｎ次正方行列 $A=(a_{ij})$ は，１次変換ｆの表現行列である．▌

１次変換ｆのJacobian行列式は $\det A$ であることから，ｆはｎ次元閉図形のｎ次元（超）体積を保存することは明らかである．

一般に，任意の正則行列Ｍは，単位行列の定数倍の行列Ｃと等積１次変換の表現行列Ａの積で表すことが可能である．すなわち，

$$M = CA$$

ただし，

$$C = (|\det M|^{1/n}) I \quad (\text{Ｉは単位行列})$$

$$A = (|\det M|^{-1/n}) M$$

したがって，等積１次変換に一様な拡大縮小を付け加えれば任意の正則な１次変換を表すことができる．

<u>**定義２－２**</u>　１次変換 $g: R^n \to R^n$ が，任意の点 $(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in R^n$ を点 $(x_1, \cdots, x_i', \cdots, x_n) \in R^n$（ただし，$x_i' = x_i + t x_j$，$i \neq j$，$t \in R$）に写す時，ｇを第ｉ軸に沿った第ｊ軸方向への傾きｔの斜交軸変換と呼ぶ．▌

<u>**定義２－３**</u>　定義２－２の斜交軸変換 $g: R^n \to R^n$ を整数近似した変換 $g_Z: Z^n \to Z^n$（整数近似斜交軸変換と呼ぶ）を，Z^n の任意の点 $(z_1, \cdots, z_i, \cdots, z_n)$ を点 $(z_1, \cdots, z_i', \cdots, z_n)$（$z_i' = z_i + \mathrm{int}(t z_j)$，$i \neq j$，$t \in R$）に写す変換と定義する．ここで，$\mathrm{int}(): R \to Z$ は適当な整数近似関数である．▌

実際にこの変換 g_Z を実行するときには，従来から提案されているディジタル直線の発生アルゴリズムなどを用いた高速な方法を使うことができる[(6),(7),(8)]．

<u>**定理２－１**</u>　定義２－３の変換 g_Z は１対１であり，逆変換 $g_Z^{-1}: Z^n \to Z^n$ は，任意の点 $(z_1, \cdots, z_i, \cdots, z_n) \in Z^n$ を点 $(z_1, \cdots, z_i', \cdots, z_n) \in Z^n$（$z_i' = z_i - \mathrm{int}(t z_j)$，$i \neq j$，$t \in R$）に写す変換である．▌

したがって，与えられた等積１次変換が斜交軸変換の積として表されれば，それぞれの斜交軸変換の整数近似斜交軸変換を合成した変換を作ることにより，可逆な変換を構成することができる．

３．等積１次変換の斜交軸変換への分解

ここでは，等積１次変換の行列を次に定義する３種類の基本行列の積に分解することを考える．

定義３－１　n次正方行列$P_{ij}^{(n)}(t)$，$R_{ij}^{(n)}$，$Q_i^{(n)}$を，次のように定義する（これらを基本行列と呼ぶ）．

①　$P_{ij}^{(n)}(t)=I^{(n)}+t\,I_{ij}^{(n)}$　$(i\neq j$，$I^{(n)}$はn次単位行列，$I_{ij}^{(n)}$は(i,j)成分だけ１で，他の成分が０のn次正方行列，$t\in R)$

②　$R_{ij}^{(n)}=$(単位行列Ｉのｉ列とｊ列を交換したn次正方行列)　$(i\neq j)$

③　$Q_i^{(n)}=$(単位行列の第ｉ列を(-1)倍したn次正方行列)▌

これら３種類の基本行列をある行列Ａに右［左］から掛けたときの作用，および，幾何学的意味はそれぞれ次の通りである．

①　$P_{ij}^{(n)}(t)$は，行列Ａの第ｊ列［第ｉ行］に第ｉ列［第ｊ行］のｔ倍を加える操作に相当する．$P_{ij}^{(n)}(t)$は第ｉ軸に沿った第ｊ軸方向への傾きｔの斜交軸変換の表現行列である．

②　$R_{ij}^{(n)}$は，行列Ａのｉ列［行］とｊ列［行］を交換する操作に相当する．$R_{ij}^{(n)}$は，（超）平面$x_i=x_j$に関する鏡映変換の表現行列である．

③　$Q_i^{(n)}$は，行列Ａの第ｉ列［行］に(-1)を掛ける操作に相当する．$Q_i^{(n)}$は，（超）平面$x_i=0$に関する鏡映変換の表現行列である．

上記の②，③の鏡映変換をあわせて基本鏡映変換と呼ぶことにする．

n次元の等積１次変換の行列が３種類の基本行列の有限個の積に分解可能なことを示すために次元nに関する帰納法をもちいる．その準備として，次の行列を定義しておく．

定義３－２　n次正方行列$A^{(n)}$を拡張したn＋１次正方行列$A^{(n)*}$を次の様に定義する．

$$A^{(n)*}=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & A^{(n)}\end{bmatrix}$$ ▌

$P_{ij}^{(n)}(t)$，$R_{ij}^{(n)}$，$Q_i^{(n)}$に関して，以下の補題３－１～補題３－５に示す性質がある．

補題３－１　（行列式に関する性質）

①　$\det P_{ij}^{(n)}(t)=1$

②　$\det R_{ij}^{(n)}=-1$

③　$\det Q_i^{(n)}=-1$ ▌

補題３－２　（逆行列）

①　$P_{ij}^{(n)}(t)^{-1}=P_{ij}^{(n)}(-t)$

②　$R_{ij}^{(n)}=R_{ji}^{(n)}=(R_{ij}^{(n)})^{-1}=(R_{ji}^{(n)})^{-1}$

③　$(Q_i^{(n)})^{-1}=Q_i^{(n)}$ ▌

補題３－３　（基本行列の拡張行列）

①　$P_{ij}^{(n)}(t)^*=P_{(i+1)(j+1)}^{(n+1)}(t)$

②　$(R_{ij}^{(n)})^*=R_{(i+1)(j+1)}^{(n+1)}$

③　$(Q_i^{(n)})^*=Q_{i+1}^{(n+1)}$ ▌

補題３－４　３種類のn次元基本行列$P_{ij}(t)$，R_{ij}，Q_iの間の交換法則は次の様になる．（特記した条件を満たすすべての$i, j, p, q\in\{1,\cdots,n\}$に対して成り立つ．また，斜交軸変換の傾きパラメータｔ，ｕは任意の実数値をとるものとする）

①　$P_{ij}(t)P_{pq}(u)=P_{pq}(u)P_{ij}(t)$　$(i\neq q,\ j\neq p)$

（特に，$i=q$または$j=p$の場合は交換不可能）

②　$R_{ij}R_{pq}=R_{pq}R_{ij}$　$(i\neq p,\ i\neq q,\ j\neq p,\ j\neq q)$

③　$R_{ij}R_{ij}=R_{ij}R_{ji}=I$

④　$Q_iQ_j=Q_jQ_i$

⑤　$P_{ij}(t)R_{pq}=R_{pq}P_{ij}(t)$　$(j\neq p,\ j\neq q)$

⑥　$P_{ip}(t)R_{pq}=R_{pq}P_{iq}(t)$　$(i\neq p,\ i\neq q)$

⑦　$P_{ij}(t)R_{ij}=R_{ij}P_{ji}(t)$
$=P_{ij}(t)R_{ji}=R_{ji}P_{ji}(t)$

⑧　$R_{ij}Q_p=R_{ji}Q_p=Q_pR_{ij}=Q_pR_{ij}$　$(i\neq p,\ j\neq p)$

⑨　$R_{ij}Q_i=R_{ji}Q_i=Q_jR_{ij}=Q_jR_{ji}$

⑩　$P_{ij}(t)Q_p=Q_pP_{ij}(t)$　$(j\neq p)$

⑪　$P_{ij}(t)Q_j=Q_jP_{ij}(-t)$ ▌

補題３－５　n次正方行列Ａ，Ｂに関して，次の関係が成り立つ．

①　$(AB)^*=A^*B^*$

②　$\det A^*=\det A$ ▌

さらに，次の補題３－６が証明できる．

補題３－６　n次正方行列Ａが$|\det A|=1$を満たす時，

$A=C_1B^*C_2$

と変形できる．ここで，Ｂは$(n-1)$次正方行列で，$|\det B^*|=|\det B|=|\det A|$であり，$C_1$と$C_2$は合計$(2k-1)$個以下の$P_{ij}^{(n)}(t)$と１個以下の$R_{ij}^{(n)}$の積である．▌

［証明］

$A=(a_{ij})$とする．まず，次の（１）または（２）により$(1,1)$成分が１の行列$\overline{A}$を作る．

（１）　$a_{1j}\neq 0$かつ$1<j\leqq n$を満たすｊが存在する場合，第ｊ列の$(1-a_{11})/a_{1j}$倍を第１列に加える．すなわち，

$\overline{A}=AG_1$

但し，

$G_1=P_{j1}^{(n)}((1-a_{11})/a_{1j})$

とすると，$\overline{A}$の成分$\overline{a}_{11}=1$となる．

（２）　$a_{1j}\neq 0$かつ$1<j\leqq n$を満たすｊが存在しない場合，$|\det A|=1$であるから，第１行の全ての成分が０であることは有り得ない．したがって，$a_{11}\neq 0$である．このときは，まず，Ａの第１列と任意に選んだ第ｊ列$(n\geqq j>1)$とを交換した行列$\hat{A}$を作る．すなわち，

$\hat{A}=AR_{1j}^{(n)}$

さらに，行列$\hat{A}$の第ｊ列の$(1/\hat{a}_{1j})$倍を第１列に加える．すなわち，

$\overline{A}=\hat{A}P_{j1}^{(n)}(1/\hat{a}_{1j})=AG_2$

但し，

$G_2=R_{1j}^{(n)}P_{j1}^{(n)}(1/a_{11})$

とすると，$\overline{A}$の成分$\overline{a}_{11}=1$となる．

次に，$1<p\leqq n$を満たす全てのｐに対して第１列の$(-\overline{a}_{1p})$倍を第ｐ列に加えることにより，$(1,p)$成分を０にする．すなわち，

$$\bar{\bar{A}}=\bar{A}H_1$$
但し，
$$H_1=\prod_{p=1}^{n}P_{1p}{}^{(n)}(-\bar{a}_{1p})$$
とすると，$\bar{\bar{A}}$の成分は$\bar{\bar{a}}_{11}=1$，$\bar{\bar{a}}_{1p}=0$ $(1<p\leqq n)$ となる．

最後に，$1<q\leqq n$を満たす全てのqに対して第1行の$(-\bar{\bar{a}}_{q1})$倍を第q行に加える．すなわち，
$$\tilde{A}=H_2\bar{\bar{A}}$$
$$H_2=\prod_{q=1}^{n}P_{q1}{}^{(n)}(-\bar{\bar{a}}_{q1})$$
とすると，$\tilde{A}$の成分は$\tilde{a}_{11}=1$，$\tilde{a}_{1p}=0$ $(1<p\leqq n)$，$\tilde{a}_{q1}=0$ $(1<q\leqq n)$ となる．

ここで，**補題3－2**を用いて，
$$B^*=\tilde{A}^{(n)}$$
$$C_1=H_2{}^{-1}=\prod_{q=1}^{n}P_{q1}{}^{(n)}(\bar{\bar{a}}_{q1})$$
$$C_2=(G_1H_1)^{-1}=H_1{}^{-1}G_1{}^{-1}=\{\prod_{p=1}^{n}P_{1p}{}^{(n)}(\bar{a}_{1p})\}\cdot P_{j1}{}^{(n)}((a_{11}-1)/a_{1j})$$
あるいは，
$$C_2=(G_2H_1)^{-1}=H_1{}^{-1}G_2{}^{-1}=\{\prod_{p=1}^{n}P_{1p}{}^{(n)}(\bar{a}_{1p})\}\cdot P_{j1}{}^{(n)}(-1/a_{11})R_{1j}{}^{(n)}$$

とおけば，命題の関係式が成り立つ．C_1，C_2の中に$P_{ij}{}^{(n)}(t)$と$R_{ij}{}^{(n)}$が，それぞれ，$(2k-1)$個，1個以下含まれることは容易にわかる．また，**補題3－1**①，②，**補題3－5**②から，
$$|\det B^*|=|\det B|=|\det A|$$
であることも明らかである．

Q．E．D．

以上の補題を用いると次の定理が成り立つ．

定理3－1 $|\det A|=1$を満たす任意のn次正方行列Aは，(n^2-1)個以下の斜交軸変換$P_{ij}{}^{(n)}(t)$と，$(n-1)$個以下の$R_{ij}{}^{(n)}$と1個以下の$Q_i{}^{(n)}$の積に分解可能である．▌

［証明］

次元nに関する数学的帰納法で証明する．以下，n次正方行列であることを$A^{(n)}$の様に表す．

①n＝1の時，$|\det A^{(1)}|=1$より，
$A^{(1)}=(1)=I^{(1)}$，または，$A^{(1)}=(-1)=Q_1{}^{(1)}$
なので，命題は成立する．

②n＝kの時，命題が成り立つと仮定し，n＝k＋1の時に成り立つことを示す．**補題3－6**より，$|\det A^{(k+1)}|=1$を満たす$(k+1)$次正方行列$A^{(k+1)}$は次の様に変形できる．
$$A^{(k+1)}=C_1{}^{(k+1)}B^{(k)*}C_2{}^{(k+1)}$$
ここで，
$$|\det B^{(k)}|=|\det B^{(k)*}|=|\det A^{(k+1)}|=1$$
なので，仮定を用いると，$B^{(k)}$は，(k^2-1)個以下の$P_{ij}{}^{(k)}(t)$と$(k-1)$個以下の$R_{ij}{}^{(k)}$と1個以下の$Q_i{}^{(k)}$の積で表すことができる．よって，**補題3－3**，**補題3－5**①を使えば，$B^{(k)*}$が，(k^2-1)個以下の$P_{ij}{}^{(k+1)}(t)$と$(k-1)$個以下の$R_{ij}{}^{(k+1)}$と1個以下の$Q_i{}^{(k+1)}$の積で表されることがわかる．さらに，**補題3－6**から，C_1，C_2が，$2(k+1)-1=2k+1$個以下の$P_{ij}{}^{(k+1)}(t)$と1個以下の$R_{ij}{}^{(k+1)}$の積からなるので，結局，$A^{(k+1)}$は$(k^2-1)+(2k+1)=(k+1)^2-1$個以下の$P_{ij}{}^{(k+1)}(t)$と$(k-1)+1=(k+1)-1$個以下の$R_{ij}{}^{(k+1)}$と1個以下の$Q_i{}^{(k+1)}$に分解できることがわかる．したがって，この定理はn＝k＋1の場合にも成立する．

以上から，任意の自然数nに対して定理が成り立つことが証明された．

Q．E．D．

以上から，n次元Euclid空間における任意の等積1次変換が，(n^2-1)個以下の斜交軸変換といくつかの基本鏡映変換に分解できることが示された．これらの変換の順序は，**補題3－4**を用いて変更することができる．たとえば，基本鏡映変換が初めに行われる様に右側にまとめておくことができる．

また，斜交軸変換の数(n^2-1)の意味は次の様に考えることができる．n次正方行列Aの成分の数はn^2で，それに，行列式の絶対値が1という拘束条件が1個あるので，結局，等積1次変換の行列Aの自由度(次元)は(n^2-1)である．したがって，任意の等積1次変換の行列Aを斜交軸変換の積に分解するためには，互いに独立なパラメータを持つ少なくとも(n^2-1)個の斜交軸変換行列が必要であることがわかる．逆に，与えられる行列の自由度がより小さい場合には，より少ない斜交軸変換の積に分解することが可能な場合もある．本論文では，主に一般の等積1次変換を考察する．

ディジタル画像に対してこの分解された等積1次変換を施すためには，それぞれの斜交軸変換に対応して**定義2－3**の様に整数近似した変換を施せばよい．しかし，この分解のしかたは一意ではなく，分解の中にパラメータが大きい斜交軸変換が存在すると，座標値の整数近似誤差の影響により，その整数近似斜交軸変換を施す時に画像が大きく歪むため，最終的な変換画像の品質が低下する．そこで，可能な分解の中で，なるべく最終的な画像の歪みが小さいものを得るための方法を考察する必要がある．次に，準備として，斜交軸変換の整数近似誤差の評価法について述べる．

4．斜交軸変換による座標誤差の伝搬

今までは，座標が実数値をとる場合を考察してきたが，以下では，座標を整数に近似した場合を考察する．なお，以下では，n次元空間で考えることとし，次元の指定は省略して右肩の添字は斜交軸変換の順番を表すものとする．

定義4－1 基本行列$P_{ij}(t)$，R_{ij}，Q_iに対応する整数近似変換を次の様に定義する．

① $p_{ij}(t)$は第i軸に沿った第j軸方向への傾きtの斜交軸変換$P_{ij}(t)$を**定義2－3**と同様に整数近似したもの．$p_{ij}{}^{-1}(t)$は**定理2－1**と同様に，$p_{ij}(t)$の逆変換とする．

② r_{ij}，q_iはそれぞれ，R_{ij}，Q_iで表される変換をZ^nに制限したものとする．▌

ディジタル画像に整数近似斜交軸変換を施すと，座標値を整数に丸めるために，誤差が生じる．整数近似斜交軸変換を行うたびに座標誤差が累積してゆくと考えて誤差評価を行う．なお，基本鏡映変換は，座標の交換と，符号反転だけなので，誤差はないものと考える．

原画像から数えて，第kk番目の斜交軸変換を行った後の座標を$x^{(k)} \in R^n$とし，それに対応して，第k番目の整数近似斜交軸変換を行った後の座標を$z^{(k)} \in Z^n$とする．また，原画像における座標は$x^{(0)} = z^{(0)} \in Z^n$とする．

定義4－2　$z^{(k)}$に対応して，各座標の最大誤差を成分とするベクトルを$e^{(k)} = (e_1{}^{(k)}, \cdots, e_n{}^{(k)})$ $(0 \leq e_r{}^{(k)} \in R)$と書くことにする．すなわち，

$$e_i{}^{(k)} = \sup_{z^{(0)} \in Z^n} |z_i{}^{(k)} - x_i{}^{(k)}|$$

とする．▌

整数への近似関数の定義の違いにより誤差の伝搬法則が異なるので，次の2通りの場合を考える．

定義4－3　$x \in R$としたとき，

切捨て$\lfloor x \rfloor$：

$$x \leq \lfloor x \rfloor < x+1 \quad (\lfloor x \rfloor \in Z)$$

最近傍$[x]$：

$$x - 1/2 \leq [x] < x + 1/2 \quad ([x] \in Z)$$ ▌

このとき，第k番目の最大誤差ベクトル$e^{(k)}$と$e^{(k+1)}$の間には次の関係がある．

定理4－1　斜交軸変換$P_{ij}(t)$に対応する整数近似斜交軸変換$p_{ij}(t)$による最大座標誤差の伝搬は，次の式で計算できる．

$$e^{(k+1)} = P_{ij}(|t|)e^{(k)} + \gamma u_j$$

（u_jは第j単位ベクトル）

成分で書くと，

$$e_j{}^{(k+1)} = e_j{}^{(k)} + |t| e_i{}^{(k)} + \gamma$$
$$e_h{}^{(k+1)} = e_h{}^{(k)} \quad (h \neq j)$$

ここで，$\gamma = 1$（切捨て），または，$\gamma = 1/2$（最近傍）である．▌

［証明］

定義4－2，定義2－2，定義2－3より，

$$\begin{aligned} e_j{}^{(k+1)} &= \sup |z_j{}^{(k+1)} - x_j{}^{(k+1)}| \\ &= \sup |\{z_j{}^{(k)} + \mathrm{int}(t z_i{}^{(k)})\} - \{x_j{}^{(k)} + t x_i{}^{(k)}\}| \\ &= \sup |(z_j{}^{(k)} - x_j{}^{(k)}) + \{\mathrm{int}(t z_i{}^{(k)}) - t x_i{}^{(k)}\}| \\ &= \sup |z_j{}^{(k)} - x_j{}^{(k)}| + \sup |\mathrm{int}(t z_i{}^{(k)}) - t x_i{}^{(k)}| \\ &= e_j{}^{(k)} + \sup |t(z_i{}^{(k)} - x_i{}^{(k)})| + \gamma \\ &= e_j{}^{(k)} + |t| e_i{}^{(k)} + \gamma \end{aligned}$$

$e_h{}^{(k+1)} = e_h{}^{(k)}$ $(h \neq j)$は明らかである．

Q．E．D．

5．分解のアルゴリズム

補題3－6，定理3－1の証明の様に，行列の次元を下げてゆく方法で分解すると，斜交軸変換の行列が行列Aの左右両方から掛けられるために，実際に変換が施される順番に斜交軸変換行列が確定しない．そのため，分解を行いながら累積される誤差の評価をすることが不可能である．ここでは，まず，実際に座標に変換を施す順番に斜交軸変換の基本行列を求めるため，斜交軸変換の基本行列は右側からしか掛けないアルゴリズムを示す．以下では，行列Aを列ベクトルa_jによって，

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

（ただし，$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T$）

と表すことにする．

アルゴリズム5－1（列基本変形に基づく方法）

行列Aの右から定義3－1の3種類の行列を掛けて，行列Aの上の行から順次，対角成分を1に，対角成分以外を0にしてゆく様な変形を行い，最終的に単位行列Iにする．変形過程の行列，ベクトル，スカラーを$A^{(k)}$，$a_j{}^{(k)}$，$a_{ij}{}^{(k)}$（ただし，$k \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$，$A^{(0)} = A$）などで表す．

［1］　$1 \rightarrow k$とする．

［2］　以下の［2A］または［2B］のいずれかの操作を行い，対角成分$a_{kk}{}^{(k)}$を1に正規化する．

［2A］　$a_{kj}{}^{(k)} \neq 0$ $(j > k)$を満たす$a_{kj}{}^{(k)}$が存在する場合：

その様なj $(> k)$のうち1つを選び，

$$a_k{}^{(k+1)} = a_j{}^{(k)}(1 - a_{kk}{}^{(k)}) / a_{kj}{}^{(k)} + a_k{}^{(k)}$$

という列基本変形を施す．これに対応する変換行列は，

$$S_k = P_{jk}((a_{kk}{}^{(k)} - 1) / a_{kj}{}^{(k)})$$

である．

［2B］　$a_{kj}{}^{(k)} \neq 0$ $(j > k)$を満たす$a_{kj}{}^{(k)}$が存在しない場合：

このとき，行列式の関係から明らかに$a_{kk}{}^{(k)} \neq 0$であるので，適当なj $(> k)$をとり，k列とj列の交換を行ってから［2A］に相当する次の列基本変形を行う．

$$a_k{}^{(k+1)} = a_j{}^{(k)} / a_{kj}{}^{(k)} + a_k{}^{(k)}$$

これらの操作に対応する変換行列は，

$$S_k = R_{kj} P_{jk}(-1 / a_{kj}{}^{(k)})$$

である．

［3］　第k行の対角成分以外の成分$a_{kj}{}^{(k)}$ $(k \neq j)$を0にするため，$a_{kk}{}^{(k+1)}$を軸として$j \neq k$なるすべてのjに対して第j列を掃き出す．すなわち，

$$a_j{}^{(k+1)} = a_j{}^{(k)} - a_{kj}{}^{(k)} \cdot a_k{}^{(k+1)}$$

という列基本変形を施す．この操作に対応する変換行列は，

$$T_k = \prod_{j \neq k} P_{kj}(a_{kj}{}^{(k)})$$

である．

［4］　$k+1 \rightarrow k$，$k < n$ならば［2］へ．

［5］　この様にして，$k = n-1$まで終了すると，その時点で，$a_{nn}{}^{(n)} = 1$または-1である．これは，$\det A^{(n)} = 1$または-1でなければならないことから明らかである．よって，第n行の処理では［2］に相当する操作は必要ない．次の列基本変形により，第n列以外の成分を0にする．

$$a_j{}^{(n+1)} = a_j{}^{(n)} - a_{nj}{}^{(n)} a_n{}^{(n)} / a_{nn}{}^{(n)}$$

$(j = 1, \cdots, n-1)$

$a_{nn}{}^{(n)} = 1$の場合には，これで，単位行列Iに変形されたことになる．このとき，この操作に対応する変換行列は，

$$T_n = \prod_{j < n} P_{nj}(a_{nj}{}^{(n)})$$

である．

$a_{nn}^{(n)}=-1$の場合には，さらに，第n列に(-1)を掛けることにより，最終的に単位行列Ｉに変形される．この場合の対応する変換行列は，

$$T_n=\{\prod_{j<n} P_{nj}(a_{nj}^{(n)})\}Q_n$$である．

である．

以上から，行列Ａは次の様に分解される．

$$A=T_n T_{n-1} S_{n-1}\cdots T_1 S_1$$ ▌

このアルゴリズムにより，**定理３－１**と同様，行列Ａはそれぞれ(n^2-1)個以下，$(n-1)$個以下，１個以下の$P_{ij}(t)$，R_{ij}，Q_iの積に分解される．しかも，このアルゴリズムでは実際に座標に変換を施す順番に斜交軸変換の行列が求まる．しかし，得られる分解は，**補題３－６**と**定理３－１**の証明の手順で得られるものとは一般には一致しない．また，斜交軸変換の誤差伝搬について考慮していないので座標誤差の大きい分解が得られる可能性がある．

そこで，次に，最終的な最大誤差ベクトルの大きさをなるべく小さくするためのアルゴリズムについて述べる．ここでは，誤差伝搬式が同じになる様な分解は，区別しないものとする．すなわち，**補題３－４**の交換法則によって互いに移りかわるものと，**定理４－１**から分かる様に，斜交軸変換の傾きを符号だけ変えたものは誤差の伝搬式が同じになるので，区別しないものとする．

アルゴリズム５－１の第k行（$k=1,\cdots,n-1$）における処理［２］，［３］の前に，適当なR_{kj}，Q_k（$j>k$）を$A^{(k)}$の左右から掛けるという自由度を与えることにする．明らかに［２Ｂ］の処理は，この操作に包含されるので，［２Ａ］と［２Ｂ］を区別する必要は無い．このとき，次の関係が成り立つ：

<u>**定理５－１**</u>　アルゴリズム５－１の第k行（$k=1,\cdots,n-1$）の操作において，誤差伝搬に影響のあるものだけを区別した場合の$A^{(k)}$と$A^{(k+1)}$の間の関係は次の式で表される．

$$A^{(k+1)}=R_{ku}A^{(k)}R_{kv}Q(\delta)\cdot P_{wk}((1-\delta a_{uv}^{(k)})/a_{uw}^{(k)})\cdot P_{kv}(-a_{uk}^{(k)})\prod_{\substack{j\neq v\\ j\neq k}} P_{kj}(-a_{uj}^{(k)})$$

ただし，

$R_{ii}=I$，$u\in\{k,\cdots,n\}$，$v\in\{k,\cdots,n\}$，
$w\in\{k+1,\cdots,n\}$，$\delta\in\{-1,1\}$，
$Q(-1)=Q_k$，$Q(1)=I$．

すなわち，第k行での処理は，u，v，w，δの選択で定まる．▌

［略証］

アルゴリズム５－１において，第k行に関する処理を考える．［２］の処理の前に，第k列から第n列までの各列，および，第k行から第n行までの各行で，列および行の交換が自由に行える．そこで，第k行に関する処理の前に１に正規化する成分(u,v)を決めて，それが，(k,k)成分になる様に適当に行と列を交換しておくことが可能である（R_{ku}とR_{kv}をそれぞれ左，右から$A^{(k)}$に掛けることに対応する）．さらに，第k列の対角成分を１にするために使う要素が属する列（［２Ａ］で選択した第j列）を第k＋１列から第n列の間の列で選ぶことができる（添字wの選択）．これらの操作が誤差伝搬式を変化させることは明らかである．さらに，第k列に－１を掛ける（Q_kを右から掛けることに相当する）と，(k,k)成分を１にするための行列$P_{wk}((1-a_{uv}^{(k)})/a_{uw}^{(k)})$が$P_{wk}((1+a_{uv}^{(k)})/a_{uw}^{(k)})$になるので，誤差伝搬式を変化させる．第k行に－１を掛けても（Q_kを左から掛けることに対応する）誤差伝搬に対しては同じ効果になるので，これは考慮しない．これ以外の基本鏡映変換の基本変形を行っても誤差伝搬式を変化させないことは明らかである．以上から，第k行では，(i)（k,k)に移動させる要素の選択，(ii)（k,k)要素を１に正規化するために用いる列の選択，(iii) 第k列に－１を掛けるか否かの選択を行うことができる．これらを考慮して，［２］，［３］を実際に行えば，定理の式が導かれる．

Q．E．D．

この選択を各行における処理について行うと，選択の組合せの数は次の様になる．

<u>**定理５－２**</u>　アルゴリズム５－１に定理５－１の操作を加えたアルゴリズムに基く分解の組合せの数（ただし，係数が一般の値を取る場合）は，次の通り．

① 第k行（$k=1,\cdots,n-1$）における分解の組合せの数は，$2(n-k+1)^2(n-k)$通り．

② 全体の分解の組合せの数は，$2^{n-1}(n!)^2(n-1)!$通り．▌

［証明］

① 定理５－１において，添字u，v，wのとりうる場合の数を考えるとそれぞれ，$(n-k+1)$，$(n-k+1)$，$(n-k)$であり，第k列に－１を掛けるか否かで２通り，したがって，$2(n-k+1)^2(n-k)$通り．

② 第n行の分解は，明らかに１通りなので，全体の場合の数は，

$$\prod_{k=1}^{n-1}\{2(n-k+1)^2(n-k)\}=2^{n-1}(n!)^2(n-1)!$$

Q．E．D．

第k行で分解される列基本変形に対応する誤差伝搬に関する演算を$E^{(k)}$とし，それまでの累積された最大誤差ベクトルを$d^{(k)}$と書くことにする．さらに，最大誤差ベクトルの初期値を$d^{(0)}$とする．すなわち，

$$d^{(k)}=E^{(k)}E^{(k-1)}\cdots E^{(1)}d^{(0)}$$

このとき，第k行での誤差伝搬をまとめると次の様になる．

<u>**定理５－３**</u>　定理５－１に示した第k行での分解で得られる斜交軸変換に対応する誤差伝搬，

$$d^{(k)}=E^{(k)}d^{(k-1)}$$

は次の式で表される．

$$d_j^{(k)}=d_j^{(k-1)}+|a_{uj}^{(k)}|d_v^{(k-1)}+|a_{uj}^{(k)}(a_{uv}^{(k)}-\delta)/a_{uw}^{(k)}|d_w^{(k-1)}+(|a_{uj}^{(k)}|+1)\gamma \qquad (j\neq v,\ j\neq k)$$

$$d_v^{(k)}=d_k^{(k-1)}+|a_{uk}^{(k)}|d_v^{(k-1)}+|a_{uk}^{(k)}(a_{uv}^{(k)}-\delta)/a_{uw}^{(k)}|d_w^{(k-1)}+(|a_{uk}^{(k)}|+1)\gamma$$

$$d_k^{(k)}=d_v^{(k-1)}+|(a_{uv}^{(k)}-\delta)/a_{uw}^{(k)}|d_w^{(k-1)}+\gamma$$

ただし，第k列の符号反転を行わない場合は$\delta=1$，行う場合は$\delta=-1$とする．▌

第k行（$k=1,\cdots,n-1$）に関する分解で選択し

た添字u，v，wをそれぞれ，$u^{(k)}$，$v^{(k)}$，$w^{(k)}$と書き，第k列の符号反転を行うか否かを$\delta^{(k)}\in\{1, -1\}$で表す．$u^{(k)}$，$v^{(k)}$，$w^{(k)}$，$\delta^{(k)}$をまとめてベクトル$c^{(k)}=(u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)},\delta^{(k)})$で表すことにする．
また，最大誤差ベクトルの評価のためのノルムを$\|\ \|$で表すことにする．また，$\varepsilon^{(k)}=\|d^{(k)}\|$とする．$E^{(k)}$は，$A^{(k-1)}$，$c^{(1)}$，$c^{(2)}$，…，$c^{(k)}$の関数である．従って，次の最小化問題を解くことになる．

Find $c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(n-1)}$ such that

$$\varepsilon^{(n)}(A, c^{(1)}, \cdots, c^{(n-1)}) = \|d^{(n)}\| = \|E^{(n)}E^{(n-1)}\cdots E^{(1)}d^{(0)}\| \to \min.$$

これから分かる様に，第k行でどの様な分解を選択するかによって，第k＋1行以降のすべての行における処理に影響する．したがって，任意の等積1次変換に対して，誤差最小の分解を求めるためには，すべての場合を試す必要がある．しかし，すべての場合を試すと定理5－2に示した場合の数だけ分解を行わなければならない．もちろん，与えられる変換が特殊なものならば，試行回数を減らすことが可能である．ここでは，任意の等積1次変換が与えられる場合を考える．この場合，定理5－2より，n＝2で8通り，n＝3で288通り，n＝4で27648通りの分解の組合せがある．特に，nが4以上の場合には実用上問題である．そこで，各行ごとに分解を確定してしまう方法を示す．第k行においては，$c^{(k)}$のみを動かし，すでに確定した$c^{(1)}$から$c^{(k-1)}$は固定しておく．すなわち，$\overline{c}^{(k)}$，$\overline{d}^{(k)}$などはすでに確定したベクトルを表すものとして，第k行の処理において，

Find $c^{(k)}$ such that

$$\varepsilon^{(k)}(A, \overline{c}^{(1)}, \cdots, \overline{c}^{(k-1)}, c^{(k)}) = \|d^{(k)}\| = \|E^{(k)}\overline{d}^{(k-1)}\| \to \min.$$

として，$c^{(k)}$を確定してしまう．
この方法によると，アルゴリズムは次の様になる．

<u>アルゴリズム5－2</u>(行ごとの選択を行う方法)
［1］初期誤差$\overline{d}^{(0)}$は例えば全ての成分を0.5にしておく．k＝1とし，k＝n－1になるまで以下の［2］～［4］を繰り返す．
［2］$c^{(k)}=(u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)},\delta^{(k)})$を範囲，$u\in\{k,\cdots,n\}$，$v\in\{k,\cdots,n\}$，$w\in\{k+1,\cdots,n\}$，$\delta^{(k)}\in\{1, -1\}$で動かして，$\varepsilon^{(k)}=\|E^{(k)}\overline{d}^{(k-1)}\|$が最小になるものを求める．それを，$\overline{c}^{(k)}$とする．このときの新しい誤差ベクトル$\overline{d}^{(k)}=E^{(k)}\overline{d}^{(k-1)}$を定理5－3の式で計算する．さらに，変換行列を次の様に置く．

$$U_k = R_{ku}$$

$$V_k = \{\prod_{\substack{j\neq v\\ j\neq k}} P_{kj}(a_{uj}^{(k)})\}P_{kv}(a_{uk}^{(k)})\cdot P_{wk}((1-\delta a_{uv}^{(k)})/a_{uw}^{(k)})Q(\delta)R_{kv}$$

［3］k＋1→k，［2］へ．
［4］この様にして，k＝n－1まで終了すると，その時点で，$a_{nn}^{(n)}$＝1または－1である．変換行列を次の様に置く．

$$V_n = \prod_{j<n} P_{nj}(a_{nj}^{(n)}) \qquad (a_{nn}^{(k)}=1\text{の時})$$

$$V_n = \{\prod_{j<n} P_{nj}(a_{nj}^{(n)})\}Q_n \qquad (a_{nn}^{(k)}=-1\text{の時})$$

以上から，行列Aは次の様に分解される．

$$A = U_1U_2\cdots U_{n-1}V_nV_{n-1}\cdots V_1 \ \blacksquare$$

6．特殊な場合の例

以上，一般の等積1次変換について考察してきたが，ここでは，2次元の等積1次変換と2次元および3次元の回転変換に対する分解の例を示す．

6.1 2次元の等積1次変換

変換行列を次式の様に置く．

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ここで，

$$|\det A_1| = |ad - bc| = 1$$

このとき，行列Aの分解は次の式で表される．

$$A_1 = XY_1P_{21}(\lambda)P_{12}(\mu)P_{21}(\nu)Y_2$$

ここで，

$$X\in\{I, Q_1, Q_2, Q_1Q_2\}$$

$$Y_1, Y_2\in\{I, R_{12}\}$$

このX，Y_1，Y_2の組合せは，全部で16通りあるが，この内，$\det(XY_1Y_2)=1$を満たす8通りが，$\det A_1=1$の場合に対応し，$\det(XY_1Y_2)=-1$を満たす8通りが，$\det A_1=-1$の場合に対応する．

$$A_1' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

$$= Y_1XA_1Y_2 = P_{21}(\lambda)P_{12}(\mu)P_{21}(\nu)$$

とすると，斜交軸変換のパラメータλ，μ，νは，次の様に表される．

$$\lambda = (d'-1)/b'$$

$$\mu = b'$$

$$\nu = (a'-1)/b'$$

最大誤差ベクトルの評価のためのノルムとして市街区距離をとり，初期誤差を0とし，整数近似関数として最近傍をとった場合，累積誤差εは次式になる．

$$\varepsilon = (1/2)(3+|\lambda|+|\mu|+|\lambda\mu|)$$

$$= (1/2)(3+|d'-1|/|b'| + |b'| + |d'-1|)$$

6.2 2次元の回転変換

2次元の回転変換については文献(4)で提案されているが，誤差について考慮しておらず，任意角度に対応していない．2次元の回転変換の行列は，

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

であるから，6.1において，

$$a = d = \cos\theta,\ -b = c = \sin\theta$$

とすればよい．detA＝1であるから，8通りの分解があるが，6.2の累積誤差の評価式によると，これらの内，2通りづつが同じ評価式になる．結局，次の4通りの分解を得る．

① $A_2 = P_{21}(\lambda_1)P_{12}(\mu_1)P_{21}(\nu_1)$

② $A_2=Q_1Q_2P_{21}(\lambda_2)P_{12}(\mu_2)P_{21}(\nu_2)$
③ $A_2=Q_1R_{12}P_{21}(\lambda_3)P_{12}(\mu_3)P_{21}(\nu_3)$
④ $A_2=Q_2R_{12}P_{21}(\lambda_4)P_{12}(\mu_4)P_{21}(\nu_4)$

ここで，

$\lambda_1=\nu_1=(\cos\theta-1)/(-\sin\theta)=\tan(\theta/2)$
$\mu_1=-\sin\theta$
$\lambda_2=\nu_2=-(\cos\theta+1)/\sin\theta=-\cot(\theta/2)$
$\mu_2=\sin\theta$
$\lambda_3=\nu_3=(\sin\theta-1)/\cos\theta$
$\qquad=\tan(\theta/2-\pi/4)$
$\mu_3=\cos\theta$
$\lambda_4=\nu_4=(\sin\theta+1)/\cos\theta$
$\qquad=-\cot(\theta/2-\pi/4)$
$\mu_4=-\cos\theta$

これら4通りの分解において，誤差式を比較すると，回転角度θが属する区間J_1〜J_4により，次の様に誤差最小の分解が定まる．

$\theta\in J_0=[-\pi/4,\pi/4]$ → ①
$\theta\in J_1=[\pi/4,3\pi/4]$ → ③
$\theta\in J_2=[3\pi/4,5\pi/4]$ → ②
$\theta\in J_3=[5\pi/4,7\pi/4]$ → ④

このとき，誤差εについては，

$\max(\varepsilon)=(3+\sqrt{2})/2\fallingdotseq 2.2$

となり，小さい範囲に抑えられている．

6.3 3次元の回転変換

3次元の回転変換が，Eular角(θ,ϕ,ψ)を用いて，

$A_3=T_Z(\phi)T_Y(\theta)T_Z(\psi)$

と与えられた場合を考える．ただし，

$$T_Z(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$T_Z(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$T_Z(\phi)$，$T_Z(\psi)$は，それぞれ，Z軸回りの角度ϕ，ψの回転で，$T_Y(\theta)$は，Y軸回りの角度θの回転の行列である．この場合は，もちろん，行列A_3を計算してから，5．の方法を使うこともできる．しかし，ここでは，$T_Z(\phi)$，$T_Y(\theta)$，$T_Z(\psi)$それぞれをＸＹ平面，ＺＸ平面，ＸＹ平面での2次元の回転と考えて次の様に6.2の分解を行えば，9個の斜交軸変換の積に分解される．誤差最小の分解も，θ，ϕ，ψそれぞれについて，6.2に示した方法で最小化すれば良い．すなわち，

$T_Z(\phi)=$
$\quad S_{12}(\phi)P_{21}(\lambda(\phi))P_{12}(\mu(\phi))P_{21}(\nu(\phi))$
$T_Y(\theta)=$
$\quad S_{31}(\theta)P_{13}(\lambda(\theta))P_{31}(\mu(\theta))P_{13}(\nu(\theta))$
$T_Z(\phi)=$
$\quad S_{12}(\phi)P_{21}(\lambda(\phi))P_{12}(\mu(\phi))P_{21}(\nu(\phi))$

ここで，

$$S_{ij}(\xi)=\begin{cases} I & (\xi\in J_0)\\ Q_iR_{ij} & (\xi\in J_1)\\ Q_iQ_j & (\xi\in J_2)\\ Q_jR_{ij} & (\xi\in J_3)\end{cases}$$

$\lambda(\xi)=\nu(\xi)=\tan(\xi'/2)$
$\mu(\xi)=-\sin\xi'$

ただし，

$\xi'=(\xi+\pi/4)\ \mathrm{mod}\ (\pi/2)$

この例のように，変換のパラメータの与えられ方により分解の方法を工夫すれば，より効率の良い方法が構成できる．

7．まとめ

ディジタル画像に対して，(超)体積を保存するような1次変換である等積1次変換を，斜交軸変換と基本鏡映変換の積に分解して，可逆的に実行する方法を提案した．まず，任意の等積1次変換が斜交軸変換と基本鏡映変換の積に分解可能であることを証明し，斜交軸変換を整数近似することにより発生する座標誤差の評価方法を提案した．さらに，この座標誤差を小さく抑えながら分解を行うアルゴリズムを示した．最後に，2次元の等積1次変換と2次元および3次元の回転変換の分解例を示した．

この等積1次変換に平行移動を付け加えれば，画素を保存するようなアフィン変換が構成できる．斜交軸変換と平行移動は画素のシフトにより実行可能で，基本鏡映変換は，対称の位置にある画素ごとの交換によって実行可能なので，画像1枚分のバッファで実行することもできる．また，直線発生のアルゴリズムなどにより斜交軸変換の座標計算が高速化可能なので，ハードウエアによる実行に向いていると考えられる．

今後は，見た目の画像の品質と誤差評価（特に誤差ノルムとして何を採用すべきか）との関係を評価する必要がある．

謝辞

熱心に御討論いただき，有益な御意見を頂いた画像処理研究室の山田豊通主幹研究員，金子透主任研究員，鈴木智研究主任ほか，研究室の皆さんに感謝します．

<<参考文献>>

(1) A.Rosenfeld, A.C.Kak: "Digital Picture Processing, 2nd Ed.", Academic Press, New York (1982).
(2) Carl F.R.Weiman: "Highly Parallel Digitized Geometric Transformations without Matrix Multiplication", Proc. IEEE Int. Conf. on Parallel Processing, pp.1-10 (1976).
(3) 宮沢篤: "イメージフォントの高速アファイン変換処理方式", 第32回情処全大, 5V-10, (昭61).
(4) A.Tanaka, M.Kameyama, S.Kazama, O.Watanabe: "A Rotation Method for Raster Image Using Skew Transformation", Proc. IEEE CVPR 1986, pp.272-277.
(5) C.Braccini, G.Marino: "Fast Geometrical Manipulations of Digital Images", CGIP-13, pp.127-141 (1980).
(6) 田畑，津原，岩見，町田，武田: "2次元ブロック転送によるメモリ・アドレス制御方式の提案と文書画像処理への応用", 情処学論, 24, 4, pp.462-473 (昭59-07).
(7) 市河研一: "高速ディジタルアフィン変換", 情処研資, グラフィクスとＣＡＤ, 21-7 (昭61-5).
(8) 山口富士夫: "コンピュータディスプレイによる図形処理工学", 日刊工業新聞社 (昭56).