

コンピュータ・グラフィックスにおける 干渉色表示の検討

横井茂樹, 鈴木信雄, 鳥脇純一郎

名古屋大学 工学部

色彩の生成の一つの原因として、光の干渉によるものがある。本文では、従来行われていなかった、光の干渉色を表示する方法について検討を行った。基本的には、干渉に伴う光線の分光エネルギースペクトルの変化の計算モデルを導出した。さらに、本モデルに基づき、自然物体の一つであるしゃぼん玉の表示を試み、良好な結果を得たので報告する。

A STUDY ON RENDERING COLOR CAUSED BY LIGHT INTERFERENCE WITH COMPUTER GRAPHICS

Shigeki YOKOI Nobuo SUZUKI Jun-ichiro TORIWAKI

Faculty of Engineering, Nagoya University Furo-cho, Chikusa-ku,
Nagoya 464, Japan

Color may be caused by light interference. In this paper, we studied displaying interference color by computer graphics. A model is driven to compute the spectrum energy change according to light interference. Based on the model, we succeeded to render a bubble soap which is one of natural objects.

1. はじめに

光を波であると考え、その干渉によって色がつくと考えられている現象はいくつかあるが、本研究では、その中で比較的身近な存在であるしゃぼん玉の色彩をコンピュータで計算し、表示することを試みた。

しゃぼん玉の色彩は、入射光線スペクトルが、干渉により波長に応じて分光エネルギーが強められたり弱められたりするために生じる。本稿では、このスペクトル変化の計算を導出し、それに基づいてしゃぼん玉の表示を行った結果について報告する。なお、しゃぼん玉の表示に関しては、従来、疑似的に色のゆらぎによる表示が試みられたことがあったが⁽¹⁾、光の干渉スペクトルの計算を行った研究はなされていない。

2. 干渉の起こるしくみ

ここではまず、しゃぼん玉に色がついて見える仕組みについて、従来から考えられている一般的な解釈を述べる⁽²⁾

図1で、入射光はまず単色光（特定の波長の光）を考える。水の薄膜の表面（空気|水）で反射した光と底の面（水|空気）で反射した光との光路の長さの差により干渉が起こり、光路差が光の波長のちょうど倍数になるとき明るくなるとか暗くなるとかなるのである。

ところが、一般的に入射光は白色光（つまり連続スペクトル）であるので、それぞれの波長での干渉が結果的に色をつけることになるのである。

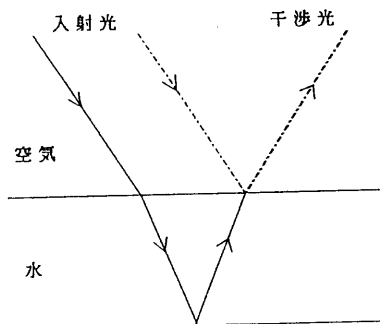


図1 薄膜での光の干渉

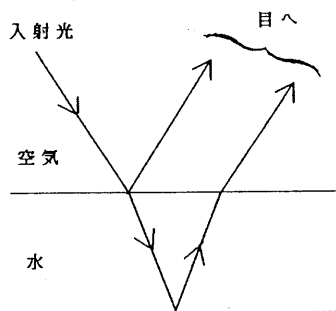


図2 一本の入射光の干渉モデル

ここで、入射光はコンピュータグラフィックスにおいて環境光（周囲の物体で散乱された反射光）として扱われている光線であるが、観察しているのは表面の微小領域であり、ここでは、コヒーレントであると仮定する。そうでないと干渉は起きないことになってしまうからである。しゃぼん膜の厚さ（およそ光の波長の数倍～数十倍）を考えると入射光の幅もかなり狭いと考えることができ、この仮定は成り立つものと考えられる。

またここで、図2のように入射光は一本でそれが表面で反射する光Aと底面で反射する光Bとに分かれ、それらが目に入るときは非常に近接しており、事実上

これらが同じ位置から反射してくるとみなしてよいと考えられるため、干渉を引き起こすという考え方もある。このように考えると上のようなコヒーレンスかどうかということは問題でなくなる。しかしどちらのモデルで考えても計算式は同じになる。

実際のしゃぼん玉では、重力や周りの空気の流れなどにより、膜の厚みが時々刻々と変化するため、また見る角度によっても光路差が変化するため、あの様に複雑な色模様が出る。また重力のため水がどんどん下の方に流れて行くため膜は上方から次第に薄くなり、同心円状の色縞ができる。

3. 光の干渉のモデル化

ここでは、2. で述べた干渉のおこるしくみに基づいて、干渉色をコンピュータで計算するためのモデルを導出する。

3. 1 光路差の計算

まず、前節の図1の考え方に基づき2種類の反射光線の光路差を求める。膜の厚さを d 、入射角、屈折角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると (図3)、

DE : AB = 4 : 3 = 水の屈折率

CE = CE'

$\Delta = BC + CE = BC + CE' = EE' \cos \theta_2$

よって光路差 Δ は、

$$\Delta = 2d \cdot \cos \theta_2$$

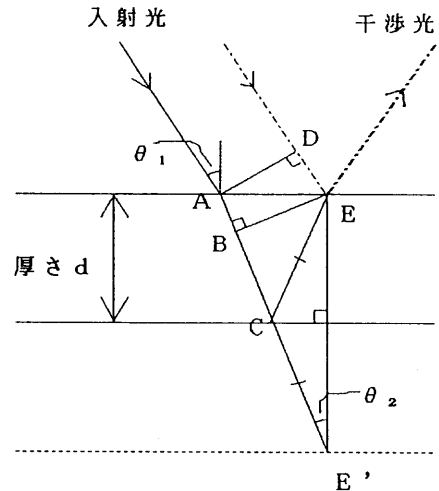


図3 光路差の算出

3. 2 光の振幅反射・透過係数の計算

これは、以下のフレネルの式より求められる (文献 (3))。屈折率は波長に依存せず一定とした。

(α_1, α_2 はそれぞれ入射角、屈折角。
(s) と (p) はそれぞれ入射面に平行な偏光 (p 偏光)、垂直な偏光 (s 偏光) の成分の場合を表す。)

光線が入射角 θ_1 、屈折率が n_1 の媒質から n_2 の媒質へ入射したときの振幅の反射係数は以下のように表される (図4)。

$$r^{(s)}(n_2/n_1, \theta_1) = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$r^{(p)}(n_2/n_1, \theta_1) = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

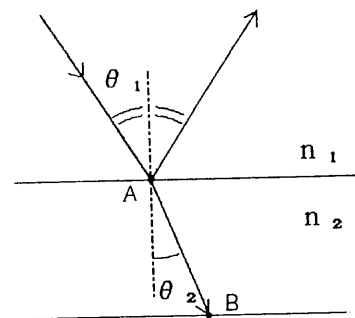


図4 光の反射・透過

また、振幅透過係数は次式で表される。

$$t^{(s)}(n_2/n_1, \theta_1) = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$t^{(o)}(n_2/n_1, \theta_1) = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

上式から次式が成り立つことが分かる。

$$r(n_2/n_1, \theta_1) = r(n_1/n_2, \theta_2)$$

つまり図4において、光線Sの点A、点Bでの反射係数は同じである。しかし透過係数に関しては異なる。

$$t(n_2/n_1, \theta_1) \neq t(n_1/n_2, \theta_2)$$

3. 3 干渉による波の振幅の増減

振幅が各々 a 、 b 2つの波（波長は同じ）が、位相が α ずれて干渉した（足し合わさった）場合に現れる波の振幅 K (a, b, α) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & a \sin \theta + b \sin(\theta + \alpha) \\ = & \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot \sin(\theta + \beta) \\ & \beta = \tan^{-1}(b \sin \alpha / (b \cos \alpha + a)) \end{aligned}$$

つまり、

$$K(a, b, \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

となる。

3. 4 干渉による光線のスペクトル変化の計算

入射角を θ_1 、屈折角を θ_2 、しゃぼん膜の厚さを d 、波長を λ ($=380 \sim 780 \text{nm}$) とすると

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{4}{3} = \text{水の屈折率}$$

$$\text{光路差: } \ddot{x} = 2d \cdot \cos \theta_2$$

$$\text{光路差による位相差: } \alpha = \frac{2\pi \ddot{x}}{\frac{n_1}{n_2} \lambda} - \pi$$

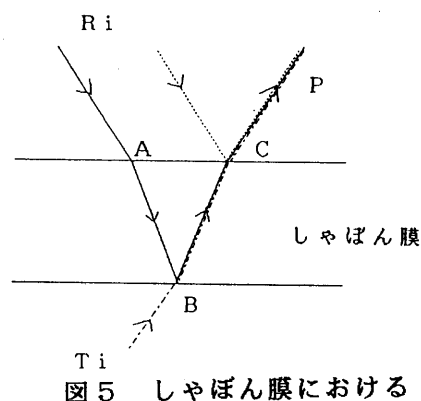


図5 しゃぼん膜における
反射・透過

以下、ある波長 λ での p 偏光（添字^(p)）の光の成分のみについて考える。

（ t :透過係数、 r :反射係数、添字は図5での位置。）

まず上面に入射する光線（これを光線 a とする）を

$$Ri = I r^{(s)}(\lambda) \cdot \sin(2\pi / \lambda \cdot x + \phi) \quad (\phi: \text{任意})$$

とおく。このとき上面Cでの反射光は位相が反転するので、次式で与えられる。

$$I r^{(s)}(\lambda) r_c^{(s)} \cdot \sin(2\pi/\lambda \cdot x + \phi - \pi)$$

またAを透過し、底面Bで反射する光線（これを光線bとする）は光路差により位相がずれるため、次式で与えられる。

$$I r^{(s)}(\lambda) \cdot t_a^{(s)} r_b^{(s)} t_c^{(s)} \cdot \sin(2\pi/\lambda \cdot x + \phi + \frac{2\pi \ddot{x}}{n_1/n_2 \lambda})$$

このとき両者の干渉光は以下ようになる。

$$I r^{(s)}(\lambda) \cdot r^{(s)} \cdot \sin(2\pi/\lambda \cdot x + \delta) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{但し、} r^{(s)} = \sqrt{r_c^{2(s)} + (t_a^{(s)} r_b^{(s)} t_c^{(s)})^2 + 2 r_c^{(s)} t_a^{(s)} r_b^{(s)} t_c^{(s)} \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{位相差：} \alpha = \frac{2\pi \ddot{x}}{n_1/n_2 \lambda} - \pi$$

また、Bに入射して来る光線を

$$T_i = I t^{(s)}(\lambda) \cdot \sin(2\pi/\lambda \cdot x + \gamma) \quad (\gamma: \text{任意})$$

とおくと、透過してC点から出てきたとき、

$$I t^{(s)}(\lambda) t_b^{(s)} \cdot t_c^{(s)} \cdot \sin(2\pi/\lambda \cdot x + \gamma) \quad \dots \textcircled{2}$$

（ここで、 $t_b^{(s)} \cdot t_c^{(s)} = t^{(s)}$ とおく）

となる。

ここで、式①の干渉光と式②の透過光は、計算の上からは干渉して合成波形が求められるが、当然両者はコヒーレントではなく、波長が少し異なれば位相の差が全く変化し、強め合ったり弱め合ったりするため干渉はないものとして扱える。このとき、光線Pのエネルギー $EP^{(s)}$ は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} EP^{(s)} &= K (I_P^{(s)})^2 = r^{(s)2} (K I r^{(s)})^2 + t^{(s)2} (K I t^{(s)})^2 \\ &= r^{(s)2} E r^{(s)} + t^{(s)2} E t^{(s)} \end{aligned}$$

但し、Kは定数、 I_P は光線Pの振幅、 $E r^{(s)}$ 、 $E t^{(s)}$ は光線a、bのs偏光成分エネルギー。

s偏光成分についても全く同様に扱え（上式で添字 $^{(s)}$ を全て $^{(o)}$ に変更すればよい）、この結果次式が導かれる。

$$EP^{(o)} = r^{(o)2} E r^{(o)} + t^{(o)2} E t^{(o)}$$

但し、 $E r^{(o)}$ 、 $E t^{(o)}$ は光線a、bのs偏光成分エネルギー

すると全エネルギーEPは、

$$\begin{aligned} EP &= EP^{(s)} + EP^{(o)} \\ &= (r^{(s)2} E r^{(s)} + r^{(o)2} E r^{(o)}) + (t^{(s)2} E t^{(s)} + t^{(o)2} E t^{(o)}) \end{aligned}$$

ここで、p 偏光と s 偏光の光のエネルギーは全体のそれぞれ半分ずつであると仮定し（この仮定は、しゃぼん玉に外から入射する光線についてはほぼ成り立つと考えられる。しゃぼん玉内部では厳密には両者は等しくならないが、計算の簡略化のためこの近似を用いた）、

$$E_{r^{(s)}} = E_{r^{(p)}} = \frac{E_r}{2}$$

$$E_{t^{(s)}} = E_{t^{(p)}} = \frac{E_t}{2}$$

と近似すると、

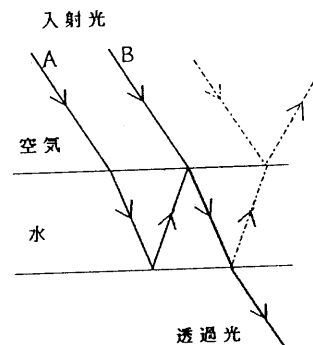
$$E_P = \frac{r^{(s)2} + r^{(p)2}}{2} E_r + \frac{t^{(s)2} + t^{(p)2}}{2} E_t$$

となり、入射光 R_i 、 T_i のエネルギー E_r 、 E_t から光線 P のエネルギー E_p が波長毎に求められる。

なお、光の干渉はこれ以外にも透過光及び 2 次反射光に関して考えられるが、以下の理由で無視できると考えられる。

3-4. 透過光の干渉について

光が膜を透過する場合にも、理論的には干渉は起こる。しかし、図 6 で A、B 2 つの光が干渉するとした場合 A は B に比べ、2 回多く反射することになる。媒質が水の場合、反射係数は入射角 = 0（垂直入射）の時、 $r = 0.14$ で $r^2 = 0.02$ となり、 $A : B = 2 : 100$ で干渉はほとんど無視できる、としている。



3-5. 2 次干渉光について

膜の中で 2 回以上反射して出てきた光の干渉光への影響も、3-4. の透過光干渉の場合以上に無視できると考えられる。

図 6 透過光の干渉

3-6. しやぼん玉の表示アルゴリズム

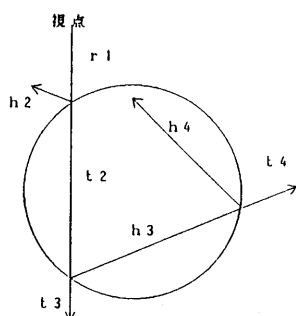


図7 干渉効果を含んだ光線追跡

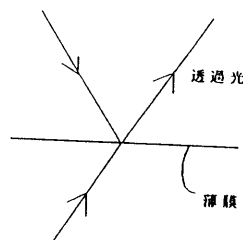


図8 透過光の扱い

しやぼん膜を非常に薄い球殻として考える。前節で考えたモデルに基づき光線追跡法に干渉効果を含めて考え、視点に入射する光のスペクトル分布を求める。

視点への入射光線 r_1 は、反射光 h_2 と透過光 t_2 の合成されたものである (図7)。干渉効果は、反射光とそれが膜に入射して裏の面で反射して戻ってくるものと干渉だけを考えるため、光線の反射の時にだけこの効果を計算すればよい。これと、透過して来る光線が合成されて膜から出て来る。

ここで、反射方向は (媒質が水なので) 鏡面反射 (正反射) 方向で、またしやぼん膜の厚みは非常に小さいため、膜の厚みは考えずに光線を追跡し (図8)、光線が膜に当たる毎に反射光、透過光に分岐し各々が3-3. で示した反射率、透過率に応じて減衰するとして計算すればよい。

ここで、ある波長の光線がしやぼん膜に当たったときのエネルギー変化を、入射角とその膜の厚みの関数として定義すると以下のように書ける。

$f_t(\theta, d)$: 入射角 θ で厚み d の膜に入射した光線が透過する場合のエネルギー変化の割合

$$f_t(\theta, d) = \frac{(t^{(s)})^2 + t^{(o)^2}}{2} \quad (t: \text{②式参照})$$

$f_h(\theta, d)$: 入射角 θ で厚み d の膜に入射した光線が反射する場合の干渉効果を含むエネルギー変化の割合

$$f_h(\theta, d) = \frac{(r^{(s)})^2 + r^{(o)^2}}{2} \quad (r: \text{①式参照})$$

$E_{..}$: 光線 ** のエネルギー; θ_n : 点 n への入射角
 d_n : 点 n での膜の厚み

$$\begin{array}{l} \vdots \\ E_{h3} \Leftarrow f_t(\theta_4, d_4) \cdot E_{t4} + f_h(\theta_4, d_4) \cdot E_{h4} \\ E_{t2} \Leftarrow f_t(\theta_3, d_3) \cdot E_{t3} + f_h(\theta_3, d_3) \cdot E_{h3} \\ E_{r1} \Leftarrow f_t(\theta_2, d_2) \cdot E_{t2} + f_h(\theta_2, d_2) \cdot E_{h2} \end{array}$$

最後に視点への入射光スペクトルエネルギー E_{r1} が求められたら、文献(4)、文献(5)に基づく色計算を用いて、ディスプレイに与える(R, G, B)値が計算される。

なお、しゃぼん膜の厚み d は重力のため、下の方ほど厚くなる。ここでは、しゃぼん膜の厚みが下にいくほど、線形に大きくなるというモデルで、表示を行った。表示例を図9に示す。

(しゃぼん膜の厚みに応じて)

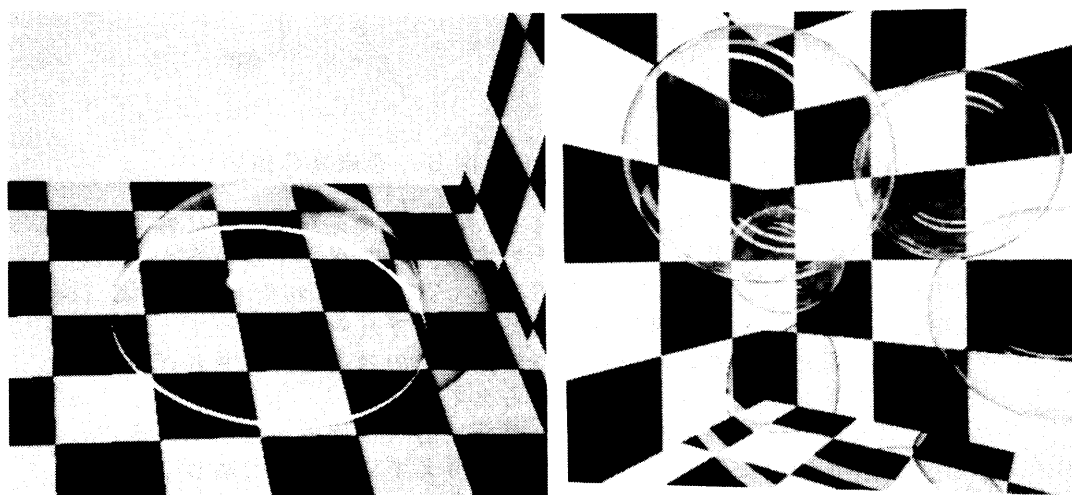


図9 表示例

4. むすび

光の干渉効果をコンピュータグラフィックスにより表示するアルゴリズムを検討し、しゃぼん膜の表示試み、良好な結果を得た。しゃぼん膜の表示については、膜の厚さのゆらぎを与えて複雑な色模様を表現することも、一つの課題である。

<参考文献>

- (1) Perlin, K. : "An Image Synthesizer" ,Proc. SIGGRAPH '85, pp.287-296 (1985).
- (2) ボイズ: "しゃぼん玉の世界", 東京図書(株), (1975)
- (3) 山口重雄: "屈折率", 共立出版, (1981)
- (4) 田島譲二: "第4節 カラー画像処理アルゴリズム", 横井編: 画像処理アルゴリズム, pp105~150, トリケップス(1988).
- (5) 鈴木, 横井, 烏脇 "コンピュータ・グラフィックスにおける色計算法の検討と干渉色表示への応用", 電子情報通信学会 パターン認識・理解研究会, PRU88-130 ,(1989-2)