

## 三角パッチモデルにおける部分的平滑化の一検討

稲葉 圭 村上 伸一

東京電機大学 工学部 電気通信工学科

本論文ではコンピュータ・グラフィックスにおいて、小平面パッチで近似されたモデルに部分的に滑らかな濃淡づけする方法について述べる。

本稿で提案する手法の特徴は以下のようにまとめられる。

1. 平面部と曲面部からなる3次元物体に対し、滑らかな陰影表現ができる。
2. 曲面部分に対しては任意の曲率表現が可能である。
3. 三角パッチでモデリングされた物体像に対し、曲線形状を持つ外輪郭部表現が可能である。

## Partial Smooth Shading for Triangular Patch Model

Kei INABA

Shin-ichi MURAKAMI

Department of Electrical Communication Engineering ,  
Faculty of Engineering , Tokyo Denki University

This paper describes a partial smooth shading method of 3D objects modeled by triangular patches. The main features of the proposed method are summarized as follows:

1. It can generate a smoothly shaded images of 3D objects with curved and planer surfaces.
2. Any kinds of curvatures can be adopted for a curved surface.
3. It can provide a curved contour image for 3D objects modeled by triangular patches.

## 1. まえがき

コンピュータグラフィックス（CG）における3次元物体の定義方法（モデリング法）の1つにサーフェスモデルがある[1]。この方法は対象とする物体の表面形状を面要素を用いて数式的に表現する方法で、直感的なイメージがつかみ易いこと、各種の形状を持つ物体の表現に適用できること等の特徴から多くのシステムで利用されている。

このサーフェスモデルは利用する面要素の形態により大きく分けると次の2種になる。

- (a) 小平面パッチモデル
- (b) 曲面モデル

このうち(a)の方法は、どのような3次元物体もその表面を細かく見ると小平面の集まりと見なせるという考え方によるもので、通常物体を多数の小三角形平面（三角パッチと呼ぶ）で近似表現する方法である。この方法は対象とする単位面が平面であるため、数式的な取扱いが容易であること、小平面の大きさや形状を変えることにより多様な形状を持つ物体表面の表現も容易であるといった特徴を持っている。しかし小平面の接続部は平面どうしの接続となるため、本質的に角張った形状表現になってしまう。

また(b)の方法は3次元のBezier曲面やスプライン曲面で物体表面を近似表現する方法で[2]、滑らかな表面形状を持った物体の表現には有効な方法である。しかし一般に平面に比べ曲面関数は取り扱いが煩雑であること、また対象物体の細かな形状変化を表現するには曲面を定義する曲面関数の制御点の選定が難しいという欠点がある。

一方、モデリングの対象とする3次元物体としては曲面形状の物体ばかりではなく、機械部品や装置等のように曲面部と平面部が混在している物体も対象となる場合が多い。

本稿ではこの考え方から(a)の小平面パッチによる3次元物体のモデリング法を考えるが、平面部分と曲面部分とから構成される物体の表現を対象に、平面部分の表現を保存すると共に、パッチの接続部などの必要な部分に対しては滑らかな曲面表現を行う方法について考察する。

## 2. 従来の平滑化手法とその問題点

三角パッチモデルを用いて滑らかな表面形状を持つ3次元物体像を表現する方法には、物体近似に用いた三角形を投影面に投影し、投影面上での互いに隣接する三角形上の各点での輝度値を、接続部を跨がって連続的に変化させることにより物体に滑らかな陰影づけを行って曲面のように表現する方法がある。[1]

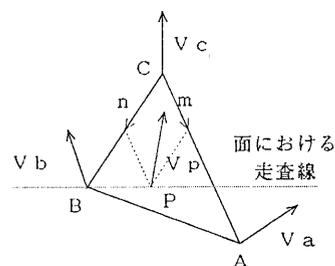
これらの代表的な手法として、次の2つの方法がある（以下投影面に投影された三角形上の各点での輝度値の求め方について説明する）。

### (a) Gouraudの平滑化手法

- (1) 着目する三角形の各頂点での法線を、その頂点を共有する隣接三角形の法線の平均値として求める。
- (2) 各頂点での輝度値を上記で求めた法線の方向、視点の方向、光源の方向、物体の反射係数等を用いて光学計算によって算出する。
- (3) 三角形の内部の各点での輝度値は、三角形の各頂点での輝度値からその点の位置を基にした線形補間によって求める。

### (b) Phongの平滑化手法（図1）

- (1) Gouraudの手法と同様にして着目する三角形の各頂点での法線を求める。
- (2) 三角形内部の各点での法線を上記で求めた各頂点での法線から、その点の位置を基にした線形補間によって求める。
- (3) 三角形内部の各点での輝度値を上で求めた法線の方向、視点の方向、光源の方向等により光学計算によって求める。



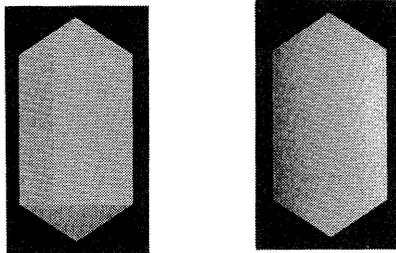
$$\vec{V}_p = m\vec{V}_a + n\vec{V}_b + (1 - m - n)\vec{V}_c$$

但し、 $0 \leq m, n \leq 1, m + n \leq 1$

図1：法線ベクトルの補間

一般にGouraudの手法よりPhongの手法の方が陰影を忠実に表現できると言われている。

これらの手法によって、形状の定義は小平面でありながら、小平面の内部全域および隣接する小平面間の接続部分の輝度値も連続的に変化するので、結果として物体像はあたかも曲面のように表現される。図2に三角パッチで表現された非平滑化画像(a)とそれに対するPhongの手法による平滑化物体像(b)の例を示す。



(a)三角パッチ像 (b)Phongの平滑化像  
図2：3次元物体の平滑化例

しかし図2からもわかるように、これらの平滑化手法では形状の定義は平面でなされているので内部点は平滑化陰影表現されるが、外輪郭形状は定義に用いた三角形形状の外輪郭である直線で表現される。

従ってこれらの平滑化手法には次の問題点があることがわかる。

- (1) 常に物体表面の全域が平滑化される。
- (2) 物体像の外輪郭は折れ線近似図形となり、平滑化されない。

そこで、対象物体に曲面部分と平面部分を混在して持つ場合に上記平滑化方式を適用すると、物体像全面が曲面表現となり平面部分が消滅してしまう。また輪郭線は角張ったまま残ることとなる。

本稿ではこれら小平面パッチモデル表現におけるこれらの欠点を解決する手法について提案する。

### 3. 部分的な平滑化

ここでは対象とする小平面パッチモデルにおける部分的平滑化を次のように定義する。

**定義1**：部分的平滑化とは、3次元物体を表現する小平面の表面領域のうち、周辺領域の一定部分だけを平滑化の対象とし、中央部分は平面として

残し平滑化しない方法を言う。

図3は接続しているパッチの断面の輝度値の変化を概念的に示したもので、接続部(平滑化領域)の断面は曲線になっている。

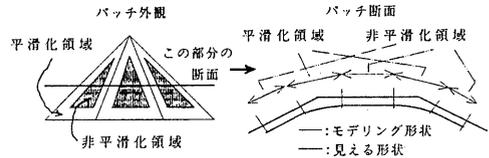


図3：部分的平滑化

このようにすると、非平滑化領域の大きさを制御することにより、平面部分と曲面部分からなる3次元物体像を自由に表現することが可能となる。

この小平面モデルにおける部分的平滑化は次の2つの段階に分けて考えることができる。

- (a) 内部小平面パッチの部分的平滑化
- (b) 外輪郭形状の部分的平滑化

ここで(a)の内部小平面パッチの部分的平滑化は、表示対象とする3次元物体像を投影面に投影した際、投影図形の内部に完全に含まれてしまうようなパッチにおける輝度値の部分的平滑化を行う段階である。

また(b)の外輪郭形状の部分的平滑化は、やはり3次元物体像を投影面に投影した際生じる外輪郭形状のうち、隣接するパッチの接続部の外輪郭形状を部分的に平滑化する段階である。

そこで、次に対象物体像の部分的平滑化をこの2つの段階に分けて考えることにする。

#### 4. 内部小平面パッチの部分的平滑化

##### 4.1 内部小平面パッチの部分的平滑化の種類

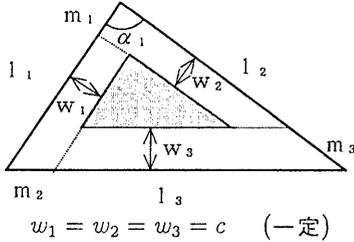
内部小平面の部分的平滑化に関し、ここでは固定幅平滑化と比例幅平滑化の2つの平滑化法を考える。

##### 4.1.1 固定幅平滑化

**定義2**：固定幅平滑化とは、各小平面パッチの周辺部に予め与えられた一定幅の枠を設け、その枠内だけを平滑化する方法を言う(図4)。

すなわち、固定幅平滑化は隣接する小平面間の接続部を一定の曲率半径で滑らかに接続し、それ

以外の所は平面として残す方法である。この場合、平滑化の幅  $c$  の値を変化させることにより、2つの小平面の接続部分での曲率半径の大きさを変えることが可能となる。



$$w_1 = w_2 = w_3 = c \quad (\text{一定})$$

図4：固定幅平滑化の概念

ここで上記固定幅平滑化の範囲を示す平滑化係数  $Sc_i$  を次のように定義する。

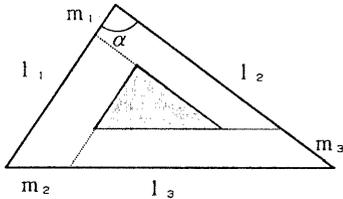
**定義3**：三角形の辺  $l_i$  に対する固定幅平滑化係数を  $Sc_i$  とすると

$$Sc_i = \frac{m_i}{l_i} = \frac{w_i}{l_i \times \sin \alpha_i} \quad i = 1, 2, 3$$

で与えられる。

#### 4. 1. 2 比例幅平滑化

**定義4**：比例幅平滑化とは、小平面の各辺長に比例した幅の枠を設け、その枠内だけを平滑化する方法を言う(図5)。



$$\frac{m_1}{l_1} = \frac{m_2}{l_2} = \frac{m_3}{l_3} = c' \quad (\text{一定})$$

図5：比例幅平滑化の概念

比例幅平滑化は隣接する面の大きさに比例して接続部の曲率半径が変わる曲面で2つの平面を接続し、それ以外の部分は平面として残す平滑化法を表している。この場合も  $c'$  の値を変えることにより、平滑化される部分と平面として残される部分の割合を変えることができる。

ここでも比例幅平滑化の範囲を示す平滑化係数  $Sp$  を次のように定義する。

**定義5**：比例幅平滑化係数  $Sp_i$  は各辺共通で

$$Sp = \frac{m_i}{l_i} = c' \quad i = 1, 2, 3$$

で与えられる。

また別の見方をすれば、固定幅平滑化はパッチ接続部での平滑化の曲率半径が互いに接続しているパッチの大小に拘らず一定であるのに対し、比例幅平滑化はパッチ接続部の平滑化の曲率半径が、大きなパッチ部分側では大きく、小さいパッチ側では小さくなるような平滑化を表すといえる。図6はパッチの断面の平滑化の範囲を表した概念で、固定幅と比例幅では接続部の曲率半径の変化の違いが現れている。

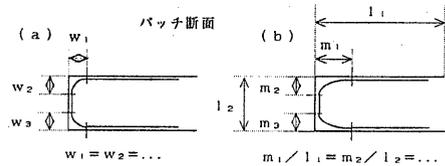


図6：固定幅平滑化と比例幅平滑化

これらの平面部分を残した平滑化法を用いることによって、平面部分と曲面部分で構成された物体像を表現することが可能となる。

#### 4. 2 内部パッチの部分的平滑化法

4. 1 で述べた2つの平滑化は具体的には次の手順によって実現することができる。ここでの平滑化は、三角パッチの各頂点での法線ベクトルの補間によるPhongの手法と同様の手法を用いる。

(A) 固定幅平滑化の手順(図7)

- (1)パッチの各境界線に平行で、パッチの内部に一定幅入った平滑化境界線を設定する。
- (2)パッチ境界線どうしの交点を求め、その交点での法線はそのパッチ本来の法線とする。
- (3)平滑化境界線とパッチ境界線との交点を求め、その交点での法線は対応するパッチ境界線の両端点での法線を着目する交点位置に基づき線形補間したものとする。
- (4)パッチの各頂点での法線は、その頂点を共有

る。

- (6)平滑化四辺形内の各点での法線は四辺形各頂点での法線を比例配分して求める。
- (7)非平滑化領域内の各点での法線は処理するパッチ自身の法線とする。
- (8)平滑化四辺形及び非平滑化領域の各内部点での輝度値をPhongの方法と同様の手法で求める。

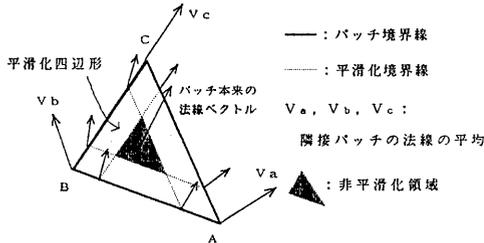


図7：部分的平滑化の概念

### (B) 比例幅平滑化の手順

比例幅平滑化法も上記(A)の固定幅平滑化法とほぼ同様の手順で実現できる。すなわち上記手順(A)において、手順(1)の「一定幅」を「辺の長さに比例した距離」に置き換えた手順で実現できる。

これらの手順が4.1で述べた内部パッチの部分平滑化を実現していることはあきらかであろう。

## 5. 外輪郭形状の部分的平滑化

外輪郭形状の平滑化では、投影面上における物体像を表す小平面のうち、物体像の外輪郭部を構成するパッチが対象となる。

そのためここで外輪郭を構成するパッチを次のように定義する。

**定義6**：外輪郭パッチとは、投影面に投影された物体像を表す小平面パッチの内、そのパッチを定義する1つ以上の頂点が物体像の外輪郭部に含まれているパッチを表す。

このようにした場合、外輪郭形状の部分的平滑化は次の2段階で行われることになる。

- (a) 外輪郭パッチの抽出
- (b) 外輪郭形状の部分的平滑化

### 5.1 外輪郭パッチの抽出

外輪郭パッチの抽出は、投影面上に投影された物体像を表す三角パッチの各頂点の座標値を用いて行う。そこで、ここでは投影面およびそでの座標系を次のように定義する(図8)。

**定義7**：投影面での座標系

- (1)対象物体及び視点方向が定義される3次元空間内に投影中心を採り、その点を原点とする。
- (2)原点を通り視点方向を示す直線をz軸とする。
- (3)原点を通り、z軸に垂直な平面をx y平面とする。
- (4)x y平面上で原点を通り、視点方向からみて水平な軸をx軸とする。
- (5)x y平面上で原点を通り、x軸に垂直な軸をy軸とする。
- (6)上記で定義されたx y平面を投影面とする。なお物体像の投影面への投影は平行投影とする。

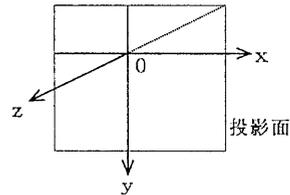


図8：投影面での座標系

ここで定義された投影面に投影された物体像を表すパッチのうち、外輪郭を構成するパッチは次の性質を持っている。

- (a) 視点から見えるパッチ(表の面)である。
- (b) そのパッチを定義する3つの頂点の内どれか1つの頂点のxあるいはy座標が、同一のyあるいはx座標を持つ他のパッチに比べ最大値または最小値をとる。

この性質を用いると外輪郭パッチの抽出は次の手順で行える。

### (C) 外輪郭パッチの抽出法

- (1)パッチの各頂点のうち抽出開始点となるx座標の最小点、y座標の最大点、xとy座標が同じときには、上記性質からz座標最大の点を探す。

- (2) 上記開始点からそれに接続しているパッチ頂点全てを検索し、その頂点の中から開始点より右上 (x 最大、y 最大)、左上 (x 最小、y 最大)、左下 (x 最小、y 最小)、右下 (x 最大、y 最小) の頂点を求める。
- (3) 反時計回りに外輪郭頂点を探すため、右下→左下→左上→右上の順に重みを付け、その重みに基づいて上位の点を次の端点とする。
- (4) (2)から(3)を順次開始点に戻るまで繰り返す。

## 5. 2 外輪郭の部分的平滑化

外輪郭の部分的平滑化は4で述べた内部パッチの部分的平滑化に対応し、外輪郭パッチの辺の一部を仮想の輪郭(平滑化曲線)に置き換える操作となる(図9)。

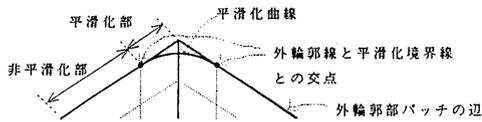


図9：外輪郭の部分的平滑化

平滑化のための曲線としては次式で定義される5つの制御点を持つ4次のBezier曲線を用いる。

$$P(t) = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (1-t)^{4-i} t^i Q_i \quad 0 \leq t \leq 1$$

この場合、平滑化曲線の開始点および終了点で挟まれた区間が外輪郭の平滑化区間である。この平滑化の開始点及び終了点は内部パッチの部分平滑化区間に合わせ、外輪郭パッチの平滑化境界線と外輪郭線との交点とするのが適当と考えられる。

そこで、平滑化曲線の5つの制御点のうち両端の制御点は部分平滑化の開始点及び終了点とし、中央の制御点は外輪郭パッチの頂点とする。

上記考察より、ここでは平滑化曲線を次のように定義する。

はじめに輪郭の部分平滑化の範囲を表す平滑化係数Ccを次のように定義する。

**定義8**：外輪郭の部分平滑化係数Ccは

$$C_c = \frac{Q_1 Q_2}{Q_0 Q_2} = \frac{Q_3 Q_2}{Q_4 Q_2}$$

で与えられる。

**定義9**：平滑化曲線は以下の5つの制御点 $Q_0 \sim Q_4$ を持つ4次のBezier曲線とする。

$Q_0$ ：部分平滑化の開始点

$Q_1$ ：外輪郭線上で平滑化係数Ccで規定される点

$Q_2$ ：外輪郭端点

$Q_3$ ：外輪郭線上で平滑化係数Ccで規定される点

$Q_4$ ：部分平滑化の終了点

これより外輪郭線の部分的平滑化手法として次の手順を得る。

### (D) 外輪郭線の部分的平滑化法(図10)

ここでは平滑化すべき輪郭が2枚のパッチにまたがっている場合について述べる。

- (1) 可視面において輪郭を構成するすべての頂点を求める。
- (2) 輪郭を構成する頂点 $Q_2$ において、パッチAにおける平滑化境界線と輪郭との交点 $Q_0$ 、パッチBにおける平滑化境界線と輪郭との交点 $Q_4$ を求める。
- (3) 与えられた平滑化係数Ccで $Q_0 Q_2$ 間を内分する点 $Q_1$ 、及び $Q_2 Q_4$ 間の内分点 $Q_3$ を求める。
- (4) (2)と(3)を輪郭を構成するすべての頂点について繰り返し、制御点を求める。
- (5) 上記各制御点を用いて平滑化曲線を構成する。
- (6) 各パッチに対する表示用走査線と平滑化曲線との交点を求め、それを基に各走査線の描くべき範囲を算出する。

上記手順により平滑化係数Ccを変化させることにより様々な輪郭形状を持つ平滑化曲線を設定できる。

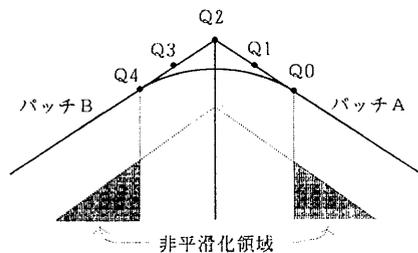


図10：平滑化曲線とその制御点

## 6. 部分的平滑化手順及び実験

### 6. 1 部分的平滑化手順

部分的平滑化手順はこれまでに述べた手順(A)～(D)をまとめることによって次のようになる(図11)。

- (1)可視面を求める。
- (2)対象とする小平面パッチが外輪郭パッチか否か調べる(手順C)。外輪郭パッチの場合(3)へ、外輪郭パッチでない場合(4)へ進む。
- (3)外輪郭形状の部分平滑化を行う(手順D)。
- (4)小平面パッチの部分平滑化を行う(手順Aまたは手順B)。

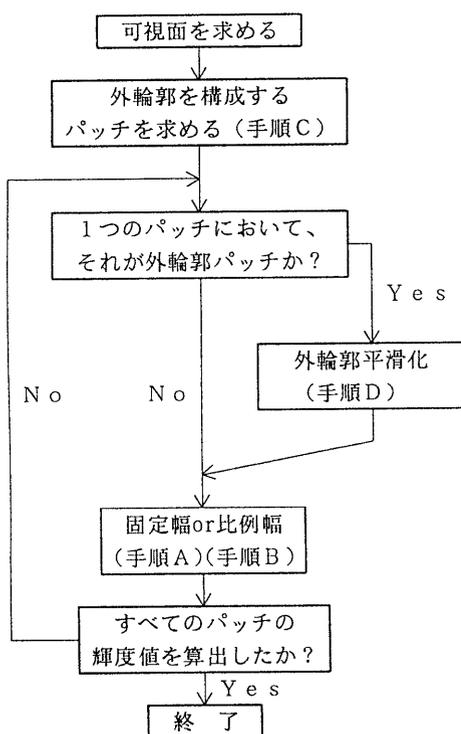


図11：部分平滑化の手順

### 6. 2 実験及び考察

6. 1で述べた手順を実行するプログラムを作成して3次元物体像の表示実験を行った。

三角パッチモデルで表現された3次元物体の部分平滑化の効果を検証するため、ここでは次の

物体像に対して4、5で定義された平滑化係数の種々の値に対する画像の生成を行った。

(1)六角錐柱

(2)立方体

表1に生成画像(図12(a)～(j))における平滑化の種類、係数の一覧を示す。

図	物体	種類	係数(内部)	係数(輪郭)
a	1	固定	0.05	なし
b	1	比例	0.05	なし
c	1	固定	0.15	なし
d	1	比例	0.15	なし
e	1	比例	0.15	0.5
f	1	全体	なし	1.0
g	2	全体	なし	0.5
h	2	全体	なし	1.0
i	2	全体	なし	0.0
j	2	比例	0.15	0.5

表1：生成画像の各種係数等一覧

図12(a)～(d)は図2(a)で表される物体に部分的平滑化を施したもので、固定幅、比例幅及びその係数を変えたものである。(e)、(f)はそれぞれ(d)及び図2(b)に輪郭部の平滑化を加えたものである。

また(g)～(i)は各面2枚の三角パッチで構成された立方体に全面平滑化を施し、輪郭平滑化係数による外輪郭の曲率の違いを表したものである。(j)は比例幅平滑化で右に45度回転させたものである。

なお本実験はC言語によりプログラミングを行った。また物体像の生成表示はNEC製PC-9801FA(数値演算プロセッサ内蔵)を用いて行い、1画面の生成時間は表示物体の大きさや平滑化係数により様々であるが、120\*240画素の(e)で約1分であった。

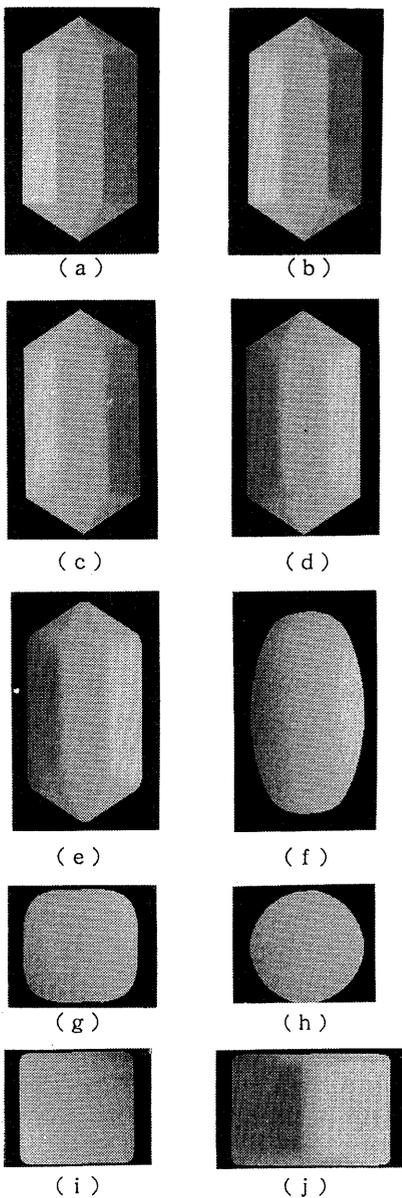


図12：生成画像

図12からわかるように三角パッチで構成されたモデルが輪郭を含めた部分的平滑化を行うことにより、角のとれた丸みのある物体像の生成が行えている。

上記のことから、本手法の特徴は次のようにまとめられる。

- (a) 三角パッチによるモデリングで、平面部と曲面部の両方を含む物体像の表現ができる。
- (b) 外輪郭も平滑化した物体像が得られる。
- (c) 平滑化の範囲を自由に選択できる。
- (d) 輪郭及び内部の平滑化の割合を独立して変化させることができる。

## 7. あとがき

三角パッチでモデリングされた、平面部分と曲面部分を持つ3次元物体像を表示する部分的平滑化手法について考察した。

その結果、本手法により平面部と曲面部の両方で構成される物体像の生成が行えると共に、従来のパッチモデルの陰影表現の欠陥であった輪郭部のゴツゴツ感をなくすことが可能となった。

今後は部分的平滑化におけるマッハ効果の除去、輪郭における平滑化曲線部のエイリアシングの除去、輪郭平滑化の凹物体への対応が挙げられる。

## 参考文献：

- [1] 中前、西田：「3次元コンピュータグラフィックス」、昭晃堂
- [2] 山口：「コンピュータディスプレイによる形状処理工学Ⅱ」、日刊工業新聞社