

離散的なバネモデルを用いた滑らかな曲線、曲面の点群へのあてはめ

山田敦¹, 古畑智武², 伊藤貴之¹, 嶋田憲司³

¹日本アイ・ビー・エム (株)
東京基礎研究所
神奈川県大和市下鶴 1623-14,
{ayamada, itot}@jp.ibm.com

²日本アイ・ビー・エム (株)
AP ソリューション開発
神奈川県大和市下鶴 1623-14,
furuhashi@jp.ibm.com

³カーネギーメロン大学
機械工学科
Pittsburgh, PA 15213 USA
shimada@cmu.edu,

本報告では、ポリゴン曲線、曲面として離散的に表現された曲線、曲面を、与えられた点群に対して最小二乗的に当てはめる手法を提案する。著者らは以前に、滑らかな曲線、曲面形状を生成するための離散的なバネモデルを提案している。本報告では、そのバネモデルによる力に対して点群からの力を足し合わせるにより、点群への最小二乗的なあてはめを実現する。本手法は、3 角形面からなるポリゴン曲面、4 角形面からなるポリゴン曲面に対して適用可能であり、さらに 5 角形面、6 角形面が混在している場合でも適用可能である。

Curve and Surface Fitting to Scattered Points Based on a Discrete Spring Model

Atsushi Yamada¹, Tomotake Furuhashi², Takayuki Itoh¹, and Kenji Shimada³

¹IBM Japan Ltd.,
Tokyo Research Lab.
1623-14, Shimotsuruma,
Yamato, Kanagawa,
{ayamada, itot}@jp.ibm.com

²IBM Japan Ltd.,
AP Solution Development
1623-14, Shimotsuruma,
Yamato, Kanagawa,
furuhashi@jp.ibm.com

³Carnegie Mellon University
Mechanical Engineering,
Pittsburgh, PA 15213 USA
shimada@cmu.edu,

This paper describe an algorithm to fit polygonal curves and surfaces to scattered points in the least-square sense. Authors have proposed an discrete spring model to generate smooth curves and surfaces. In this paper, additional forces exerted from scattered points are used in combination with the forces of the discrete spring model. The algorithm can be applied to polygonal surfaces composed of triangle faces and those of quadrilateral faces. Pentagonal and hexagonal faces can be included in the polygonal surfaces.

1. はじめに

本報告では、入力データとして、1)ポリゴン曲線(折れ線)あるいはポリゴン曲面(メッシュ)として離散的に表された曲線、曲面と、2)点群とが与えられたとき、その曲線、曲面を構成するノード(頂点)を反復的に移動させることにより、与えられた点群に対して最小二乗的に当てはめられた滑らかな曲線、曲面形状を生成する手法について述べる。著者らはある拘束条件の基で滑らかな曲線、曲面形状を生成するための離散的なバネモデルを提案している[3][4]。このバネモデルは、近傍における曲率の変化を最小化するように作用するバネモデルであり、このバネモデルによる力を反復的に作用させることにより、大域的に滑らかに変化する曲線、曲面形状を生成することができる。本報告では、著者らが提案しているバネモデルに対して、点群からの力の作用を足し合わせることにより、点群への最小二乗的なあてはめを実現する。

点群を近似する曲線、曲面を求める問題に関しては数多くの研究が既に発表されている。その多くは、面内部の関数式の存在を仮定し、その関数の係数を求めるという問題を解いている。多くの研究が、文献[1]に代表されるように、Bezier 曲面や B-Spline 曲面などの4角形の構造を持った曲面パッチを面内部の関数式として点群を近似している。これらの研究では、近似の誤差を一定値以下に押さえることや、曲面のうねりを除去することなどが関心事である。

本報告では大まかに点群を近似するような曲線、曲面形状を比較的短時間で生成することを目的としている。そのため陽に面内部の曲面関数式の存在を仮定することなく、差分法的にノードにおける値のみを評価して目的とする曲線、曲面形状を求める。本手法は厳密に最小二乗問題を解くわけではないが、もっともらしい解を短時間で求めることができる。また本手法は、陽に曲面関数式を用いないため、理論的には面が何角形であっても適用可能である。全て3角形面により構成される3角形ポリゴン曲面に対しても、全て4角形面

より構成される4角形ポリゴン曲面に対しても適用できるし、また5角形面や6角形面が混在しているメッシュに対しても適用可能である。

以下第2章では、文献[3][4]で提案された曲率分布を一様化するバネモデルについて復習する。第3章では、このバネモデルを使って、点群を最小二乗近似しかつ滑らかな曲線、曲面を生成するアルゴリズムについて説明する。第4章では、アルゴリズムの適用例を示し、第5章で結論を述べる。

2. 曲率分布を一様化するバネモデルの定義

図1に平面曲線と、それ上の幾つかの点での法線を示している。いま2つの異なる点 P_i, P_j とその点での法線を考える。曲率が連続な曲線の場合、点 P_i を P_j に限りなく近づけた時、法線の交点 H は点 P_j における曲率中心に限りなく近づくという性質がある[1]。次に空間曲線の場合を考える。空間曲線上の2つの点 P_i, P_j とその点での法線を考える。2つの法線の最短距離の足をそれぞれ、 H_i, H_j とする。点 P_i を P_j に限りなく近づけた時、 H_i, H_j は共に点 P_j における曲率中心に限りなく近づく。以上の事から、曲線上の十分に近い2点 P_i, P_j が与えられた場合、点 P_j における曲率半径は $\|P_j - H\|$ あるいは $\|P_j - H_j\|$ によって近似できるといえる。我々のバネモデルはこの性質を利用している。

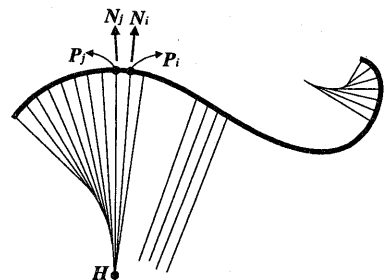


図1: 曲率連続な平面曲線とその曲線上の点での法線。

我々の手法では、ポリゴン曲線、曲面を構成するノード P_i, P_j の法線に対して図2(A)に示すように線形バネを取り付けたバネモデルを用いる。この

バネモデルは、2つのバネの長さ $\|P_i - H\|$, $\|P_j - H\|$ を同じ長さに保つように作用する。このバネの長さは近似的に曲率半径を表わしていると考えられる。よってこのバネモデルの作用は辺 $P_i P_j$ を円弧にする作用であり、辺 $P_i P_j$ 上の曲率を一定値にする作用であると言える。

いま拘束条件によりノード P_j が固定されていると仮定する。この時、バネモデルの作用により、ノード P_i は法線ベクトル N_i に沿って $\|P_i - H\|$ が $\|P_j - H\|$ と同じ長さになる位置まで dP_i だけ移動する (図2(A)参照)。この状態において、ノード P_i と P_j とは H を曲率中心とし曲率半径が $\|P_j - H\|$ ($=\|P_i + dP_i - H\|$) である円弧上にあると考えられる。

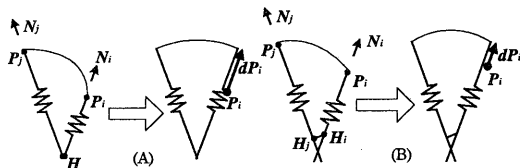


図2: 曲率分布を一様化するバネモデルの定義。
(A) 平面曲線に対するノード変位 dP_i 。(B) 空間曲線、曲面に対する変位 dP_i 。

与えられた問題が空間曲線や曲面である場合には、隣り合うノードの法線は空間的に交差するために交点を持たない (図2 (B)参照)。その場合には法線の交点 H の代わりに、図2 (B)に示すように2つの法線の最短距離の足 H_i, H_j を用いる。

図2におけるノード P_i の変位 dP_i は、図(A), (B) の場合共に、以下の式により計算できる[3][4]。

$$dP_i = \left(\frac{\text{dot}((P_j - P_i), (N_i + N_j))}{1 + \text{dot}(N_i, N_j)} \right) N_i \quad (1)$$

ここで $\text{dot}(V_0, V_1)$ はベクトル V_0, V_1 の内積を表す。図2(A)を見ると、2つの法線が平行のときそれらの交点 H が存在しないことにより計算が不安定になると考えるかもしれないが、実際の変位の計算式(1)には H は陽に含まれないため、このような場合でも計算は安定に行うことができる。

3. 曲線、曲面の点群への当てはめ

3.1 アルゴリズムの概要

アルゴリズムの概要を図3にプログラム風に示す。本アルゴリズムは Gauss-Seidel タイプの反復法に分類される。ノードの位置 P_i および法線ベクトル N_i を一回の反復ごとに更新するという処理をノードの変位が十分小さくなるまで繰り返す。

```

Let  $P_i$  be the position of the  $i$ -th node
Let  $n$  be the number of nodes
Let  $V_i$  be the  $i$ -th scattered point
Let  $l$  be the number of scattered points
While( termination condition is not satisfied ){
  For( all nodes  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ){
    Step 1: Calculate pseudo-normal  $N_i$ 
  }
  For( all scattered points  $V_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) ){
    Step 2: Make connection of each scattered
            point to its nearest node
  }
  For( all nodes  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ){
    Step 3: Calculate displacement  $dP_i$  caused
            by the force exerted by V-Spring
    Step 4: Calculate displacement  $dP_{u,i}$ 
            caused by the force for regularizing
            node distribution
    Step 5: Calculate displacement  $dP_{c,i}$ 
            caused by the force
            exerted by scattered points
    Step 6:  $P_i = P_i + (dP_i + dP_{u,i} + dP_{c,i})$ 
  }
}

```

図3: アルゴリズムの概要

まず図3中の Step 1 において、各反復ごとに各ノードにおける単位法線ベクトルを計算する。この計算は、ノードに隣接している要素 (線分あるいは面) の法線の平均などの手法により求めればよい。図3中の Step 2 において、点群を構成する各点に対して、その最近傍に位置するノードを関連付ける。図3中の Step 3, 4, 5 においてそれぞれ3種類のノード変位: 1) 曲率分布を一様化するための変位(式(2))、2) ノード分布を一様化するための変位(式(3))、3) 点群にあてはめるための変位(式(5))、を計算し、Step 6 においてその変位の和をノード座標値に加えることによりノード座標値を更新する。

拘束条件により位置が固定されているノードに

対してはノード座標値の更新を行わない。また拘束条件によりノードにおける単位法線が指定されている場合には、そのノードに対しては反復過程における法線計算(Step 1)を省略し、指定された単位法線をそのノードにおける単位法線とする。

以下 3.2 節で点群の関連付け方法 (Step 2) について述べた後、3.3, 3.4, 3.5 節でそれぞれ、Step 3, 4, 5 の各変位の計算方法について述べる。

3.2 点群の最近傍ノードへの関連付け

図3中の Step 2 において、点群を構成する各点 V_i に対して、その最近傍に位置するノード P_i を関連付ける。ここで関連づけたノードに対して、図3中の Step 5 において点に引き寄せる力が計算される。

このノードの関連付けは、反復1回目のみ、点とノードとの距離を総当りの計算することにより行う。2回目以降の反復においては、既に関連付けられているノードの近傍のみを探索して最近傍ノードの関連付けを更新する。

またこの関連付けは本来は反復の度に実行すべきであるが、実用的には数回に1回の実行だけでも十分である。我々の実装では反復5回に一回関連付けの更新を行っている。

3.3 曲率分布を一様化するためのノード変位

各ノード P_i に対して単位法線ベクトル N_i が既に計算されているものとする。ノード P_i はその隣接ノード P_j ($j = 1, \dots, m$) 全てから力を受ける。ここでいう隣接ノードとは、対象ノードと1つの辺により結ばれているノードのことである。1つの隣接ノード P_j からの力による変位 dP_{ij} は、式(1)を使って以下のように計算する。

$$dP_{ij} = \left(\frac{\text{dot}((P_j - P_i), (N_i + N_j))}{1 + \text{dot}(N_i, N_j)} \right) N_i.$$

このように各隣接ノードからの力による変位 $dP_{i1}, \dots, dP_{im}$ を計算した後、それらの重み付き平均として次式のようにノード P_i の変位 dP_i を計算する (図4参照)。

$$dP_i = \sum_{j=1}^m w_j dP_{ij} / \sum_{j=1}^m w_j, \quad (2)$$

ここで w_j ($j = 1, \dots, m$) は重みを表わす。我々の実装では、重み w_j を隣接エッジの長さの逆数として以下のように計算している。

$$w_j = 1 / \|P_i - P_j\|, \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

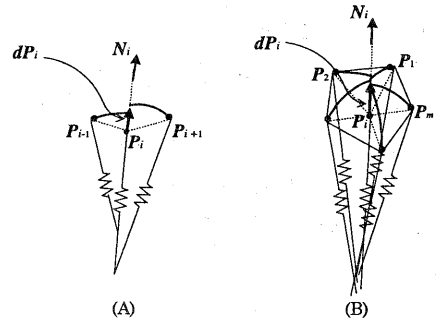


図4: 隣接ノードからの力によるノード変位 dP_i 。(A) 平面曲線の場合。(B) 空間曲線、曲面の場合。

3.4 ノード分布を一様化するためのノード変位

ノードの分布があまりにも不均一な場合、曲率の見積もりが不正確になる可能性がある。この問題をいち早く取り除いて、ノードの分布を均一化するために、2種類目の力を導入する。

我々が導入した力による変位はラプラシアンオペレータによる変位の一成分である。ラプラシアンオペレータとは、あるノードをその隣接ノードの重心に移動させる操作のことである。この操作による変位をそのまま用いると、3.3 節で述べた法線方向への変位を打ち消してしまうことになる。そこで、ラプラシアンオペレータによる変位のうち、法線に直交する成分だけを取り出し、それを本節で述べるノード分布を一様化するためのノード変位とする。この変位は次式の $dP_{u,i}$ によって表現される。

$$dP_{u,i} = dP_{u0,i} - dP_{u1,i}, \quad (3)$$

$$dP_{u0,i} = \left(\sum_{j=1}^m P_j / m \right) - P_i, \quad dP_{u1,i} = \text{dot}(dP_{u0,i}, N_i) N_i.$$

3.3 節で述べた変位は面外方向への変位であり、本節で述べた変位は面に沿った方向への変位であ

り、それらは直交しているため、お互いの成分を打ち消すことはない。よって本節の変位は、曲率に関係する面外方向への変位を妨げることなく、ノード分布を可能な限り一様化する。

3.5 点群にあてはめるためのノード変位

3種類目の力は、ノードが点群にうまくあてはまるように、点群からノードに対して作用する力である。図3中の Step 2 において、点群の1つの点に対して1つの最近傍ノードが関連付けた。よって1つノードに対しては複数の点が関連付けられている可能性がある。いまノード P_i に関連付けられている点を $V_j (j=1, \dots, m)$ とする。この時、1つの点 V_j からの力によるノード P_i の変位 $dP_{c,ij}$ を次の式により計算する。

$$dP_{c,ij} = k_j \text{dot}(V_j - P_i, N_i) N_i, \quad (4)$$

ここで k_j は V_j に対して割り当てられた重み係数である。ここで計算した変位 $dP_{c,ij}$ は、ベクトル $V_j - P_i$ の法線ベクトル N_i 方向の成分と解釈できる (図5(B)参照)。同様にして各点 $V_j (j=1, \dots, m)$ に対する変位 $dP_{c,i1}, \dots, dP_{c,im}$ を計算する。これらからノード P_i の点 $V_j (j=1, \dots, m)$ からの力による変位 $dP_{c,i}$ は、 $dP_{c,ij} (j=1, \dots, m)$ の重み付き平均として次式により計算する。

$$dP_{c,i} = \sum_{j=1}^m w_j dP_{c,ij} / \sum_{j=1}^m w_j, \quad (5)$$

ここで $w_j (j=1, \dots, m)$ は重み係数である。我々の実装ではこの重み係数は、点 V_j からノードにおける接線 (接平面) に下ろした足を Q_j と表記した時、次式により計算する (図5(B)参照)。

$$w_j = 1 / \|P_i - Q_j\|, \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

式(4)中の係数 k_j は、形状の滑らかさと点群の近似の度合いとのトレードオフとして使われる。係数 k_j が大きいとき、形状は点 V_j をよりよく近似する。

一般的な最小二乗近似の問題は、幾何的には図5(A)のように解釈できる。すなわち2次元平面内の点群を平面曲線で近似する場合、点群を構成する各点から曲線上の最近傍点に対して線形パネを取り付け、そのパネの内部エネルギーの和が最小になるような状態を求めていると解釈できる。一

方我々の手法は、図5(B)に示すように、点から最近傍ノードにおける接平面への足に対して線形パネを取り付けたものと解釈できる。

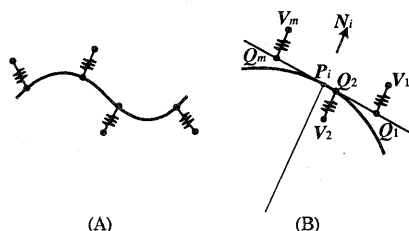


図5 平面曲線の点群へのあてはめ。(A)一般的な最小二乗当てはめ問題の幾何的解釈。(B)我々の手法の幾何的解釈。

4. 結果

本手法を用いて点群に対して曲線、曲面をあてはめた例を図6から図9に示す。いずれの例においても点群を近似する滑らかな形状が生成されている様子がわかる。

5. まとめ

本研究では、ポリゴン曲線、曲面を点群にあてはめる手法について述べた。著者らが提案している滑らかな曲線、曲面を生成するためのパネモデルの力に対して、点群からの力を足し合わせるにより、点群へのあてはめを実現している。本手法の実装結果で、本手法を使うと、点群を近似する十分に滑らかな形状が生成されることを実装結果として示した。また3角形面、4角形面だけでなく、5角形面が混在している場合に対しても適用できることを実装結果として示した。

参考文献

- [1] M. P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, 1976.
- [2] D. F. Rogers, and N. G. Fog, Constrained B-Spline Curve and Surface Fitting, Computer Aided Design, Vol. 21, No. 10, pp. 641-648, 1989.
- [3] A. Yamada, K. Shimada, T. Furuhashi, and K. H. Hou, A Discrete Spring Model to Generate Fair Curves and Surfaces, Pacific Graphics'99, to appear, 1999.
- [4] 山田敦, 嶋田憲司, 古畑智武, Ko-Hsiu Hou, 離散的なパネモデルを用いた滑らかな曲線、曲面生成手法, Visual Computing グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, 情報処理学会, pp. 43-48, 1999.

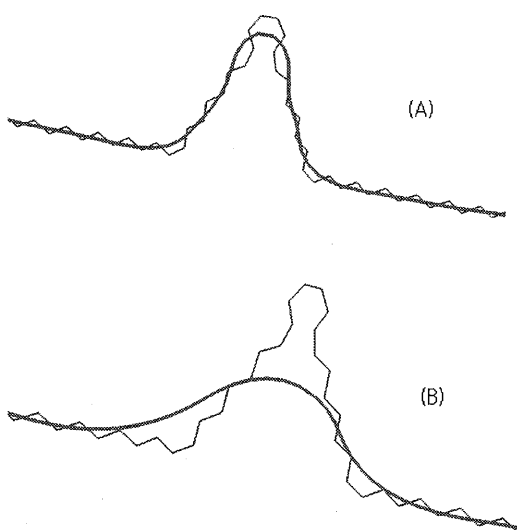


図6 ポリゴン曲線の生成。ノイズの乗った折れ線は初期曲線。初期曲線のノードを点群として設定。(A) 式(4)の係数 k_i を全ての点で0.001に設定した場合。(B) 式(4)の係数 k_i を全ての点で0.00001に設定した場合。

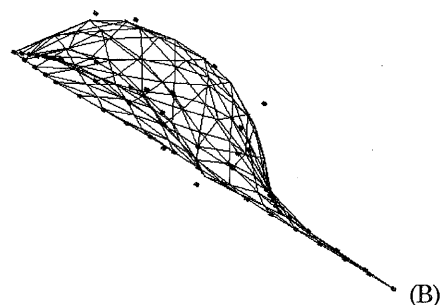
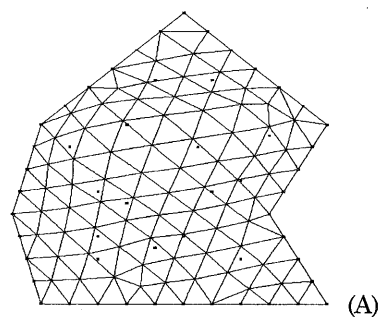


図8 点群にばらつきがある例。図(A), (B)は同じ曲面を異なる視点から見た図。

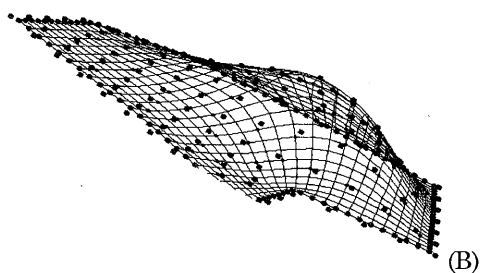
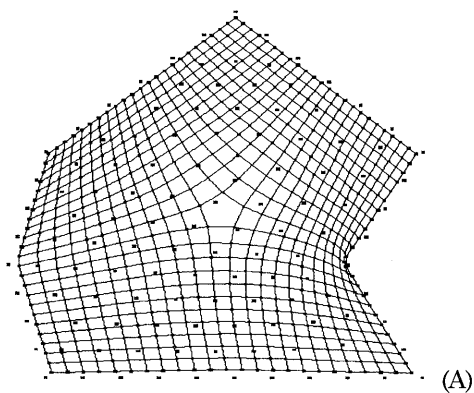


図7 領域中心部分に5角形面が混在する例。図(A), (B)は同じ曲面を異なる視点から見た図。

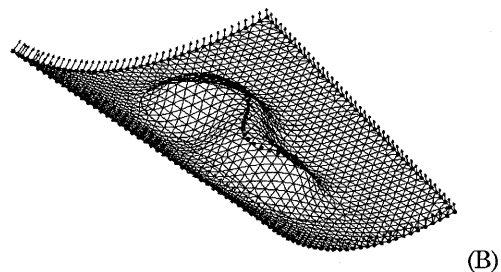
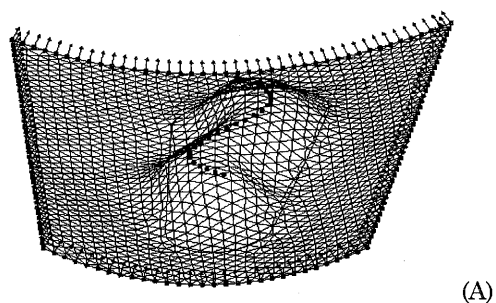


図9 領域中心部分にS字状に点群を配置。領域境界では法線方向を拘束。図(A), (B)は同じ曲面を異なる視点から見た図。