

多項式による空間曲線の近似手法とそれを用いた性質分析

井上 治郎

和歌山大学大学院

原田 利宣

和歌山大学

現在、工業製品をデザインする場合、3次元CADを用いてコンピュータ上でその形状をモデリングしている。しかし、CADを用いても空間曲線が美しくなるように制御することは難しく、形状の玉成に多大な工数を必要としている。そこで、本研究では、さまざまな空間曲線がどのような視覚言語とその組み合わせであるかを解明するアルゴリズムとそのシステム開発を目的とした。具体的には、計測データから近似曲線を精度よく求めるための、多項式による空間曲線の近似手法を考案した。また、空間曲線の曲率半径と捩率半径から、その曲線の視覚言語を抽出するシステムの開発を行った。さらに、開発したシステムを用いて、実際に既存製品に用いられている空間曲線の視覚言語を同定した。

Polynomial approximation for space curve and analysis of properties of curves

Jiro Inoue

Graduate School of Wakayama University

Harada Toshinobu

Wakayama University

When designers design an industrial product, they make it's 3D model in a CAD system. However, by limitations of CAD, it is difficult for them to control space curve constituting the model in order to be an aesthetic curve. And they need a great deal of labor for getting the shape polished. Then, the aims of our study were to propose a quantitative analysis method of the characteristics of a space curve, and to clarify visual languages (VLs) and the combinations of VLs constituting aesthetic space curves with the method. First, we devised the approximation method of the space curve by a polynomial to find an optimum approximation curve from measurement data. Second, we developed the system which extracted VLs of a curve from the radii of the curvature and the radii of the torsion of a space curve. Lastly, we identified VLs of space curves in industrial products.

1. はじめに

現在、車などの工業製品をデザインする場合、3次元CADを用いてコンピュータ上で形状をモデリングし、それをもとにクレイモデルを削りだすことで最終デザインの評価を行っている。しかし、現状のCADシステムを用いても、面の接合部やコーナー部などの空間曲線が美しくなるように制御することは難しく、作成したCADデータをもとにNCマシンで削りだしたクレイモデルをさらにモデラが玉成することで理想となる曲線(面)を作り出しており、その作業は多大な工数を必要としている。なぜなら、デザイナーもモデラも作成した空間曲線や曲面がどのような性質であるのか、またどのような性質の曲線を作りたいの

か分からないまま、勘と経験のみで曲線(面)を作っているからである。

そこで、本研究では、筆者らによりすでになされている曲線における視覚言語の抽出と体系化に関する研究¹⁾をベースとして、その研究を空間曲線へ拡張し、様々な空間曲線がどのような視覚言語とその組み合わせによりできているかを解明する方法の開発を目的とした。具体的には、まず実際に工業製品等に使われている空間曲線を収集し、その空間曲線を多次多項式により近似することでその空間曲線の曲線式を求める。次に、その近似曲線の曲率半径と捩率半径を算出し、近似曲線を曲率単調曲線¹⁾と捩率単調曲線に分割する。さらに、分割された各セグメントごとに、曲率対

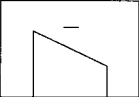
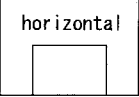
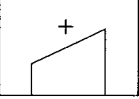
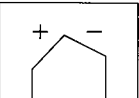
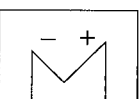
	<i>C curve</i> の '傾き'	印象
単調リズム曲線	発散型  '傾き' が「負」	「切れのある」 「勢いのある」
	定速型  '傾き' が「0」	「安定した」 「静的な」
	収束型  '傾き' が「正」	「線にたまりのある」 「求心的な」
複合リズム曲線	山型  '傾き' が「正」+「負」	発散していた曲線がある境から収束していく印象
	谷型  '傾き' が「負」+「正」	収束していた曲線がある境から発散していく印象

図1 曲線の“性質”分類

数分布図¹⁾と振率対数分布図²⁾の作成を行い、その空間曲線を構成する視覚言語を同定する。本稿では、数学曲線4種、工業製品より取得した空間曲線4種の計8種の分析結果を示す。その結果、これらの手法を用いることで、空間曲線の性質を視覚言語によって同定できる可能性を示すことができた。

2. 空間曲線の分析方法

空間曲線の“性質”を分析するにあたり、分析手法として、原田ら(1992)により開発された、曲線の重要な“性質”である曲率変化の仕方とボリュームを同時に、そして直感的に理解しやすく定量化する方法³⁾を用いた。本手法は、曲線上の等間隔に設定された各構成点における曲率半径とその曲率半径が曲線上に現れる“長さ”の関係を両対数座標系上に表現するものである。この手法で扱える曲線は曲率単調曲線(曲率が曲線の端点からもう一方の端点に一樣に増加[減少]するもの)

のである。また、これより描かれる図を「曲率対数分布図」と呼ぶ。「曲率対数分布図」は横軸に曲率半径区間を、縦軸に各曲率半径区間に現れる曲線長をとり、そのヒストグラムの頂点を線で結ぶことにより、その軌跡として求められる。この軌跡を*C curve*と呼ぶ。この「曲率対数分布図」をXY直交座標系に見立てたとき、*C curve*の“傾き”が曲線の“性質(曲率変化)”を表す。加えて、本定量化手法により500本以上の工業製品、工芸品、ならびにデザイナーの描いた曲線の“性質”を分析した結果、図1のような5タイプの曲線群にほぼ分類できることが確かめられている⁴⁾。実用上、シングルRをそれらの5つの曲線に加え、曲線を創成する際の視覚言語としている。さらに、曲率対数分布図と同様に、曲線上の等間隔に設定された各構成点における振率半径とその振率半径が曲線状に現れる“長さ”の関係を両対数座標系上に表現する「振率対数分布図」を考案した²⁾。「振率対数分布図」は横軸に振率半径区間を、縦軸に各振率半径区間に現れる曲線長をとり、そのヒストグラムの頂点を線で結ぶことにより、その軌跡として求められる。この軌跡を*T curve*と呼ぶ。これらの「曲率対数分布図」と「振率対数分布図」により空間曲線の性質を表す視覚言語を同定する。

3. 数学曲線の分析

前章で提案した空間曲線の分析方法を用いて、曲線式が明らかな数学曲線を分析した。以下にそれらの分析結果を示す。

①常螺旋

常螺旋は、

$$c(t)=(a\cos(t), a\sin(t), bt) \quad (\text{式1})$$

で定義される曲線である⁵⁾。この曲線の曲率半径と振率半径をそれぞれ求め、曲率対数分布図と振率対数分布図を作成した。その結果、曲率対数分布図と振率対数分布図は共にシングルR型を示した(図2)。

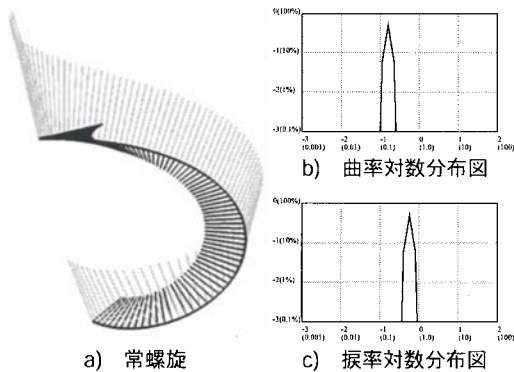


図2 常螺旋の分析

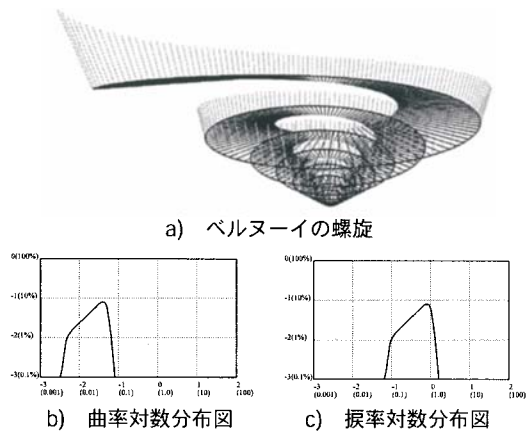


図4 ベルヌーイの螺旋の分析

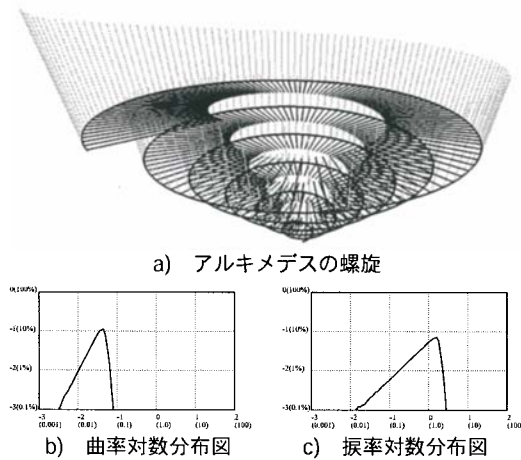


図3 アルキメデスの螺旋の分析

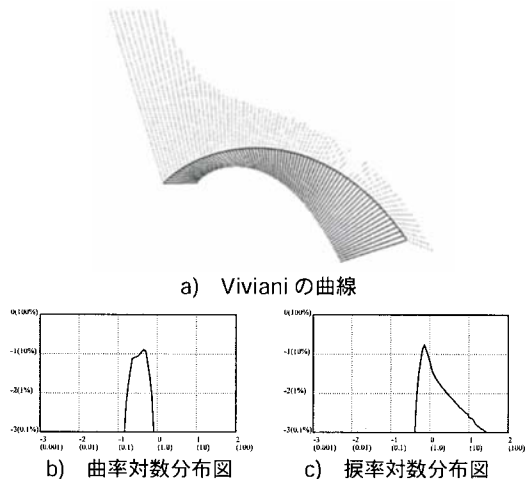


図5 Viviani の曲線の分析

②アルキメデスの螺旋

アルキメデスの螺旋は、

$$c(t)=(at\cos(t), at\sin(t), bt) \quad (\text{式 } 2)$$

で定義される曲線である。この曲線の曲率半径と捩率半径をそれぞれ求め、曲率対数分布図と捩率対数分布図を作成した。その結果、曲率対数分布図と捩率対数分布図は共に収束型を示した(図3)。

③ベルヌーイの螺旋

ベルヌーイの螺旋は、

$$c(t)=(e^{at}\cos(t), e^{at}\sin(t), bt) \quad (\text{式 } 3)$$

で定義される曲線である。この曲線の曲率半径と

捩率半径をそれぞれ求め、曲率対数分布図と捩率対数分布図を作成した。その結果、曲率対数分布図と捩率対数分布図は共に収束型を示した(図4)。

④Viviani の曲線

Viviani の曲線は、

$$c(t)=(a+a\cos(t), a\sin(t), 2a\sin\frac{t}{2}) \quad (\text{式 } 4)$$

で定義される曲線である⁵⁾。この曲線は、原点を中心とし半径 $2a$ の球面と、Z 軸を含み半径 a の円柱の共通部分として現れる曲線である。この曲線の曲率半径と捩率半径をそれぞれ求め、曲率対数分布図と捩率対数分布図を作成した。その結果、

曲率対数分布図は収束型を示し、振率対数分布図は発散型を示した（図5）。

数学曲線の分析を行った結果、曲率変化と振率変化のある数学曲線は曲率対数分布図の *C curve* や振率対数分布図の *T curve* がある傾きを持った直線となっていた。これにより、これら数学曲線は曲率、振率変化において自己アフィン性を有することが明らかになった。また、アルキメデスの螺旋やベルヌーイの螺旋のような空間曲線は曲率単調曲線の曲率半径増加方向と振率半径増加方向が同方向のタイプ（これを曲率振率同方向曲線と呼ぶ）となったが、Viviani の曲線のような曲率単調曲線の曲率半径増加方向と振率単調曲線の振率半径増加方向が逆方向のタイプ（これを曲率振率異方向曲線と呼ぶ）もあることが確認された。

4. 多項式による空間曲線の近似

実際にさまざまな工業製品に使われている空間曲線を分析するには、計測データ（点データ）から近似曲線を求める必要がある。そこで、本稿では最小二乗法による多項式近似を行い、近似曲線を求める。しかし、多項式近似は次数によってその近似関数が変化するため、何次の多項式近似によって得られた曲線がもっともよい近似結果となっているのか分からない。そこで、多項式近似の評価関数として式5に示すようなベイズ情報量基準（BIC）を設定した^{6,7)}。つまり、各次数での近似関数のBICを求め、その値が最小になる近似関数を選択することで、次数の決定を行った。

$$BIC = n \log(RSS) + (k + p + q) \log(n) \quad (\text{式5})$$

n : 計測点数 RSS : 残差二乗和

k : 近似次数 + 1

p : 曲率単調曲線数 q : 振率単調曲線数

5. 工業製品を計測して得られた曲線の分析

工業製品に使われている空間曲線のサンプルとして、自動車のボンネット部の曲線とコンピュー

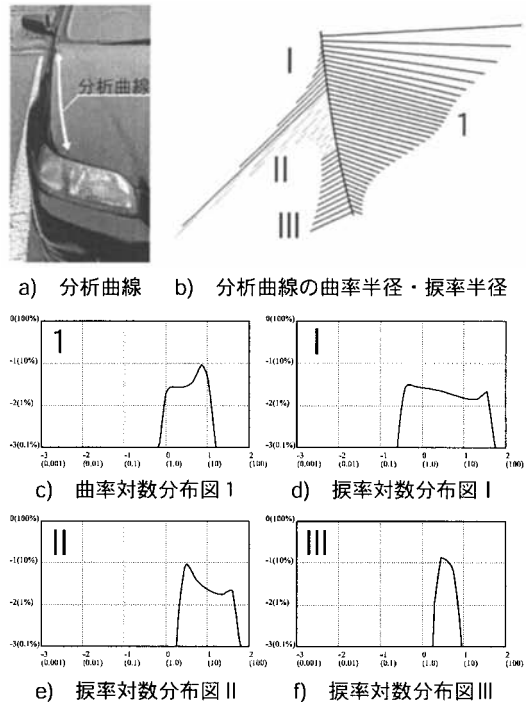


図6 自動車 (Domani, ホンダ) のボンネット部の分析

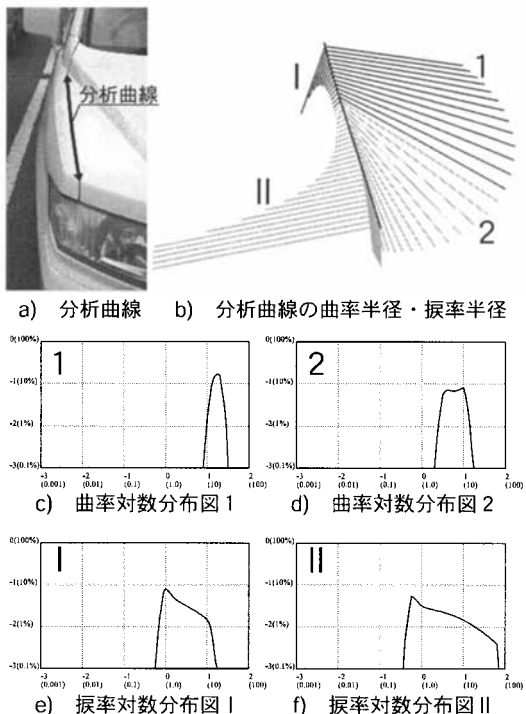


図7 自動車 (Grandis, 三菱) のボンネット部の分析

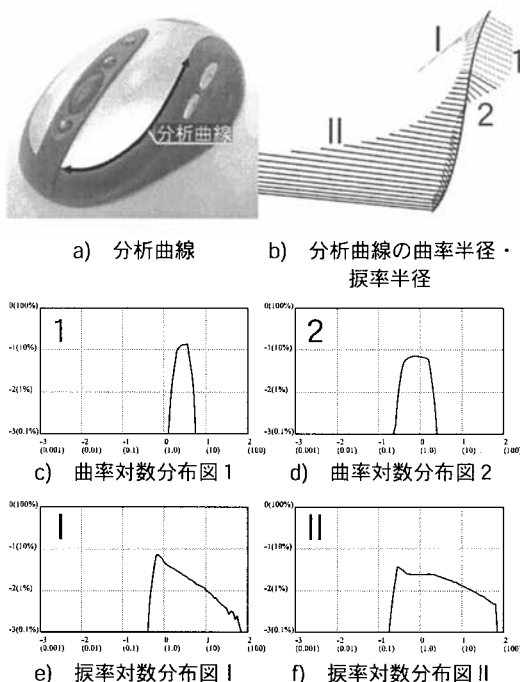


図 8 コンピュータマウス (MX700 Optical Mouse, Logitech) のパーティングラインの分析

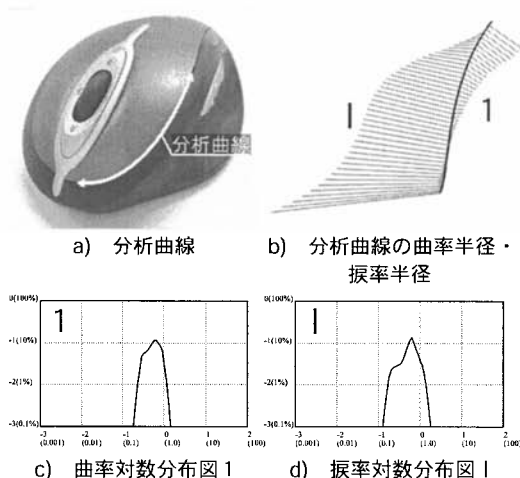


図 9 コンピュータマウス (MX1000 Laser Cordless Mouse, Logitech) のパーティングラインの分析

タマウスに使われているパーティションラインを各 2 種ずつ、計 4 種の分析を行った。以下にそれらの分析結果を示す。

①自動車のボンネット部の曲線 I

自動車 (Domani, ホンダ) のボンネット部の曲線を計測し、分析システムで分析を行った。BIC

の最小値を示したのは 5 次多項式で、残差平均は約 0.3 mm となり、曲率単調曲線に分割すると 1 セグメントで、振率単調曲線に分割すると 3 セグメントに分割された。各セグメントを分析した結果、曲率単調曲線の 1 セグメントは収束型を示し、振率単調曲線の 3 つのセグメントはすべて発散型を示した (図 6)。

②自動車のボンネット部の曲線 II

自動車 (Grandis, 三菱) のボンネット部の曲線を計測し、分析システムで分析を行った。BIC の最小値を示したのは 4 次多項式で、残差平均は約 0.2mm となり、曲率単調曲線に分割すると 2 セグメントに分割され、振率単調曲線に分割してもほぼ同じ位置において 2 セグメントに分割された。各セグメントを分析した結果、曲率単調曲線の曲率半径大側から 1 セグメント目はシングル R 型を示し、2 セグメント目は定速型を示した。また、振率単調曲線の 2 つのセグメントはすべて発散型を示した (図 7)。

③コンピュータマウスのパーティングライン I

コンピュータマウス (MX700 Optical Mouse, Logitech) のパーティングラインを計測し、分析システムで分析を行った。BIC の最小値を示したのは 5 次多項式で、残差平均は約 0.1mm となり、曲率単調曲線に分割すると 2 セグメントに分割され、振率単調曲線に分割してもほぼ同じ位置において 2 セグメントに分割された。各セグメントを分析した結果、曲率単調曲線の 2 つのセグメントすべて定速型を示し、振率単調曲線の 2 つのセグメントはすべて発散型を示した (図 8)。

④コンピュータマウスのパーティングライン II

コンピュータマウス (MX1000 Laser Cordless Mouse, Logitech) のパーティングラインを計測し、分析システムで分析を行った。BIC の最小値を示したのは 4 次多項式で、残差平均は約 0.2mm となり、曲率単調曲線に分割すると 1 セグメントで、振率単調曲線に分割しても 1 セグメントとなった。各セグメントを分析した結果、曲率単調曲線も振率単調曲線も共に収束型を示した。(図 9)。

実際に工業製品に使われている空間曲線を分析した結果、Domani のボンネット部の曲線のように、その空間曲線が曲率単調曲線であってもその中に複数の振率単調曲線が含まれる場合があることが分かった。また、工業製品に使われる空間曲線には曲率振率異方向型の曲線が多く見られたが、これは多くの製品が直方体を基本とした面構成をしているため、曲線の接続性から必然的になるものと考えられる。

6. まとめ

本研究では以下に示す成果が得られた。

- 1) 空間曲線の各曲率半径と振率半径から、曲率対数分布図と振率対数分布図を作成することにより、その空間曲線の性質を定量的に表現する可能性を示すことができた。
- 2) 空間曲線の分析手法を用いて、数学曲線4種の曲率対数分布図と振率対数分布図を求め、それらが自己アフィン性を有することが確認された。
- 3) 計測データ（点列データ）から多項式近似を行う際、BIC を評価関数として次数決定を行うことにより、もっとも尤もらしい近似結果を求めることができた。
- 4) BIC による近似次数決定から多項式近似を行い、空間曲線の曲率半径と振率半径を求め、曲率単調曲線・振率単調曲線に分割し、それぞれのセグメントの分析を行うための、空間曲線の性質分析システムを開発した。
- 5) 空間曲線の分析システムを用いて、工業製品に使われている曲線4種の曲率対数分布図と振率対数分布図をそれぞれ求め、それらが自己アフィン性を有することが確認された。

今後の課題として、以下のようなものが考えられる。

- 1) 平面曲線においてすでに曲率対数分布図の *C curve* の傾きによる印象の違いは明らかになっているが、振率対数分布図の性質による印象の違いは分かっていない。よって、さま

ざまな性質のサンプル空間曲線を創成し、実験を用いて印象の違いを明らかにする必要がある。

- 3) 今後、キャラクターラインとなる空間曲線（パーティングライン等）だけでなく、曲面上の複数の曲率線^{5,8)}に対してこの空間曲線の分析手法を用いることで、曲面の性質を定量的に表現できる可能性がある。また、その定量的に現された性質を用いて、新しい曲面創成手法の提案も実現できると考えられる。

注および参考文献

- 1) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光: 魅力的な曲線とその創成アルゴリズム, 形の科学学会誌, 第13巻第3号, pp.149-158(1998).
- 2) 原田利宣, 井上治郎, 河野正之: 美しい空間曲線の性質とそれを応用した曲線創成, 日本精密工学会全国大会シンポジウム資料集, pp.96-97(2007)
- 3) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄: 曲線の性質に関する定量化研究, デザイン学研究, 第40巻第6号, pp.9-16(1994).
- 4) T, Harada, F, Yoshimoto: An aesthetic curve in the field of industrial design, proc. of IEEE symposium on visual language '99, pp.38-47(1999).
- 5) 田澤義彦: 曲線論・曲面論 -Mathematica で探索する古典微分幾何学-, ピアソン (1999).
- 6) Schwarz, G.: Estimating the dimension of a model, *The annals of statistics*, Vol.6, No.2, pp.461-464 (1978).
- 7) 吉本, 原田他: 実数を遺伝子とした遺伝的アルゴリズムによるデータあてはめ, 情報処理学会論文誌, Vol.41, No.1, pp.70-82(2000)
- 8) 井上治郎, 原田利宣, 今井敏行: 自然造形物・工芸品における曲面の曲率線抽出とその性質分析, デザイン学研究, accepted (2007)