

物理テンソル量の補間とその応用

相澤 雄太 高橋 成雄 西田 友是

東京大学大学院 新領域創成科学研究科

有限要素法による物理シミュレーションは、コンピュータグラフィックスにおいてリアリティの高い映像を得るためによく利用される。しかしながら、シミュレーションの初期値とその結果の関係は非常に複雑であり、ユーザが欲しいシーンを得るためには長時間の試行錯誤が必要となる。本報告は、有限要素法による物理シミュレーションにおいて意図したシーンを生成するための、対象物体内のテンソル場の編集を行う手法を提案する。これは、有限要素法シミュレーションにおいて重要な物理パラメータである、応力テンソルの補間を行うことで実現される。本手法の貢献は、応力テンソルを四元数として表現するとともに、ひとつのテンソルに複数の四元数表現が対応する曖昧性を除去した、効率の良い補間手法を新たに提案することにある。本手法により、離散的に与えられたテンソルを対象領域内で補間して滑らかなテンソル場を生成することができ、これにより物理シミュレーションにおける物体の破砕等の明示的な制御を可能にすることができる。

Interpolation of Physical Tensor Quantity and Applications

Yuta Aizawa Shigeo Takahashi Tomoyuki Nishita

Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

FEM-based physical simulation has played an important role in realistic image synthesis using CG techniques. However, it is difficult to anticipate the final simulated results only from the initial parameter setting, and thus tedious trial-and-error processes are inevitably needed to produce desirable results. This report presents a method for editing tensor fields defined in target objects in order to create intended scene in FEB-based physical simulation. This is achieved by interpolating stress tensors that are important physical parameters especially in the FEM simulation. The contribution of this report lies in the use of quaternions to represent such stress tensors and the associated scheme of efficiently interpolating the given tensors while avoiding inherent ambiguities in the tensor representation. The method allows us to define the overall tensor field from its discrete samples, which leads to the explicit control of object fracture in the physical simulation.

1 はじめに

コンピューターグラフィックスにおいてリアリティの高い映像を得るために、流体や剛体の有限要素法に基づく物理シミュレーションがよく利用される。しかしながら、有限要素法を用いたシミュレーションは、計算コストの高さや柔軟性の低さから、そのリアリティ高いシーン生成にも関わらず、映像作成において利便性が低い。計算コストを下げる研究は多くなされているが、初期値として与えられる物理パラメータと得られる結果の関係が複雑であり、簡単にユーザが意図した結果が得られないなどの問題がある。更に、映画などの映像作成の現場においては、必ずしも物理的に正しいシミュレーションによるシーンのみでなく、編集側の意図した物理法則とは異なる誇張表現などが実現できる必要がある。

本報告は、このような有限要素法による物理シミュレーションにおいて、意図したシーンを生成するための対象物体内のテンソル場の編集を行う手法を提案する。これは、有限要素法シミュレーションにおいて重要な物理パラメータである、応力テンソルの補間を行うことで実現される。このような物理テンソル量の補間を実現することで、代表的なテンソルの値を指定することで対象物体内のテンソル場を記述したり、あるいは既存のシミュレーションで得られたテンソル場のデータを複数組み合わせで新たなシーンを生成することが可能となる。

このような有限要素法を用いた物体破壊の研究は、O'Brien らの物体の破碎のシミュレーション [4] 以降盛んに行われてきた。このような有限要素法による物理シミュレーションの利点は、そのリアリティの高いシーン生成にあるが、同時に計算が高コストであるという問題点が存在する。この計算コストを軽減するための手法として、粗いメッシュを用いた手法 [3] や、メッシュフリー法を用いた適応化手法 [5] 等が提案されてきたが、ユーザによるテンソル場の制御の問題は残るため、映像作成においては依然利便性は低い。

以上の観点から、テンソル量の補間の実現は、様々な映像シーンを効率よく生成するための有効な戦略と考えられる。しかし、テンソル量の補間といっても、一般のスカラー値やベクトルの補間とは大きく正確が異なる。また、特に本研究で取り扱う応力テンソルは、応力の方向のみが意味を持ち、その向きの変現に4つの曖昧性が存在する。そのため、仮に与えられた2つのテンソルの回転補間を考えると、その向きの違いにより図 2.1 のように $4 \times 4 = 16$ 通りの組み合わせの曖昧性が生じてしまう。本手法では、応力テンソル量を四元数により表現するが、その際上記のようなテンソル量における表現の曖昧性を取り除くための新たな表現形式を導入し、補間対象となるテンソル量を一意に表現する手法も提案し

ていく。

2 提案手法

本手法では、以下の手順によって物理テンソル量の補間を行っていく。

1. 補間対象の応力 σ (3×3 行列) テンソルの定義
2. 各応力テンソルに対応する行列の固有値解析
3. 固有ベクトルによる回転行列の作成
4. 回転行列からの四元数計算 [6]
5. テンソル量を一意に表す四元数への変換
6. 四元数の補間による四元数場の作成
7. 四元数場からのテンソル場の復元

以下、それぞれの手順について説明を行う。

2.1 応力テンソル

応力テンソル σ とは物体内部に生じる力の大きさや作用方向を表現するために用いられる物理量である。 σ 各軸に直交する微小面積に作用する単位面積あたりの各軸方向の力の集合であり、 3×3 の行列として表される (手順 1.)。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

応力テンソルの各要素の概念を図 1 に表す。 σ は対称テンソル ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) である事から、固有ベクトルを求める (手順 2.) と、互いに直交することが知られている。今回取り上げる応力テンソルの他にも、ひずみテンソルや慣性モーメントテンソルと呼ばれる物理量も、応力テンソル同様対称テンソルであり、固有ベクトルが直交する。それゆえ、同様に他のテンソル量を本手法を用いて補間することができることに注意する。

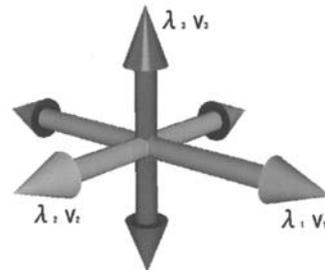


図 1: 応力テンソル概念図。固有値分解すると直交した軸とその長さによって応力を表現できる

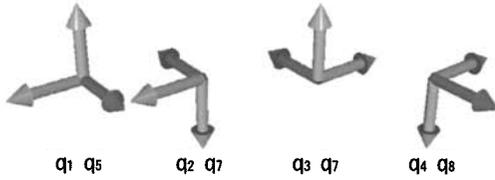


図 2: 同じ状態のテンソルを表す四元数 (各変数は式 (1) に対応する). どの四元数も直交するベクトルの方向は同じである.

固有値入と対応する固有ベクトル e の物理的意味は, 物体を引っ張る方向に作用する力の大きさと, その方向である (図 1). 特に, 最大固有値とその固有ベクトルで表される応力成分は最大主応力と呼ばれる. 塑性物体において, 最大主応力が最も大きな値をとる点から破断がおきることが知られており, 物体破壊において重要な物理量である [4].

2.2 テンソル量の四元数表現

固有ベクトルを並べた行列を回転行列として定義することができ (手順 3.), さらにこの回転行列を四元数表現に変換することができる (手順 4.). このように, 物理テンソル量を四元数を用いて表現することができるが, テンソルそのものは直交するベクトルが方向しか意味を持たず, その向きが正反対でも同じテンソルを表すために, 結果として 4 つの四元数が同じひとつの物理テンソル量を表すことになる. さらに, 四元数の性質より, q と $-q$ が同じ回転を表す. まとめると, 今考えている物理テンソル量では

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_w + q_x i + q_y j + q_z k \\
 q_2 &= q_1 i = -q_x + q_w i + q_z j - q_y k \\
 q_3 &= q_1 j = -q_y - q_z i + q_w j + q_x k \\
 q_4 &= q_1 k = -q_z + q_y i - q_x j + q_w k \\
 q_5 &= -q_1 = -q_w - q_x i - q_y j - q_z k \\
 q_6 &= -q_1 i = q_x - q_w i - q_z j + q_y k \\
 q_7 &= -q_1 j = q_y + q_z i - q_w j - q_x k \\
 q_8 &= -q_1 k = q_z - q_y i + q_x j - q_w k
 \end{aligned} \quad (1)$$

の合計 8 個の四元数は同等な状態である (図 2). このように, ひとつのテンソル量に 8 つの表現が対応する状況では, 図 2.1 のように与えられたテンソル量をどの表記にに対応させるかで, 補間結果が変わってしまう. 次節では, ひとつのテンソル量を唯一の四元数に対応させる写像を新しく定義すること (手順 5.) で, この問題を解決する方法を示す.

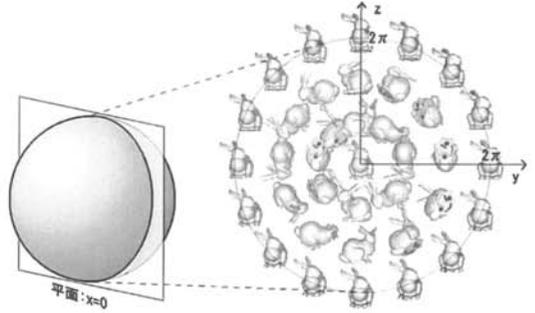


図 3: log 空間 ($x=0$ 平面) 上の表す回転

2.3 テンソル表現の曖昧性の除去

式 (1) の q_1 から q_8 までの 8 個の四元数のうち, まず与えられたテンソル量に対し, 実数成分の値が最も大きいものを選ぶことで, 一意な表現を決める. 例えば, 四元数 $q = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{3}{5}j + \frac{1}{5}k$ の場合, 式 (1) の 8 個の式のうち実数成分が最も大きな値を取る q_7 を選ぶ. このような操作を行うことは四元数の表す 4 次元球面の一部を切り取る操作に相当する.

しかし, このように得られた値はテンソル量の回転を表す四元数集合の部分集合内で定義されるため, 不連続な境界が存在し, 結果本来四元数に備わるべき周期性が損なわれている. そこで, 四元数の指数写像を考えることで, この四元数の部分領域をもう一度四元数表現全体に写像し, 必要な周期性を復元していく.

まず, 正規化された回転軸 $v = (v_x, v_y, v_z)$ とし, さらに $\bar{v} = v_x i + v_y j + v_z k$ を考える. このとき, $\bar{v}^2 = -1$ であるため, 複素数の場合と同様に回転角 θ を用いて, 指数表現 $\exp(\theta \bar{v})$ をテイラー展開で求めることができる.

$$\begin{aligned}
 \exp(\theta \bar{v}) &= 1 + \theta \bar{v} + \frac{(\theta \bar{v})^2}{2!} + \frac{(\theta \bar{v})^3}{3!} + \frac{(\theta \bar{v})^4}{4!} + \dots \\
 &= 1 + \bar{v} \theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3 \bar{v}}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5 \bar{v}}{5!} - \dots \\
 &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots) + \bar{v} (\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots) \\
 &= \cos \theta + \bar{v} \sin \theta
 \end{aligned}$$

これより, 回転軸 v 中心に θ 回転させる四元数 $q(\theta, v)$ の対数を,

$$\begin{aligned}
 \log(q(\theta, v)) &= \log(\cos \frac{\theta}{2} + \bar{v} \sin \frac{\theta}{2}) \\
 &= \log(\exp(\bar{v} \frac{\theta}{2})) \\
 &= i \frac{\theta}{2} v_x + j \frac{\theta}{2} v_y + k \frac{\theta}{2} v_z
 \end{aligned} \quad (2)$$

と書くことができる [2].

ここでもし, 対数をとる四元数が任意であるとすれば, θ が 0 から 4π までの範囲を考えれば, 式 (2) の右辺の \cos と \sin の値が一周させることができる. このとき, 各成分を並べたベクトル $(\frac{\theta}{2} v_x, \frac{\theta}{2} v_y, \frac{\theta}{2} v_z)$ の表す空間を考えると, まず v が正規化されている

から (v_x, v_y, v_z) は半径 1 の球面を表し、さらに各成分の係数 $\frac{\theta}{2}$ は 0 から 2π の値を取るから、最終的には半径 2π の中身の詰まった三次元球を表すことになる。ここで注意したいのは、球中心は $\theta = 0$ の回転、球表面では $\theta = 2\pi$ の回転を表すから、結果としてこの 3 次元球は、図 3 で示されている様に中心と表面では同じ回転を表すことである。

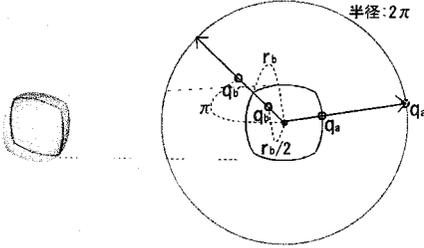


図 4: 一意に選んだ四元数から得られる図形(左). その図形を球形への変形断面図で図示したもの(右). 図形の半径の比率に 2π をかけた値が変形後の半径となる (q_b), 特に図形の表面上にある点は球形へ変形した際にも表面へ移る (q_a).

実際には、先に述べた通り 8 通りの四元数の表現のうち、実数成分 (= $\cos(\frac{\theta}{2})$) の値が大きい四元数表現を選択して用いることになる。この四元数表現を \log を用いて変換すると、先ほどの 3 次元球内部において、図 4 左のように、 θ が比較的小さい領域に変換される。このままでは、先に述べた四元数表現の周期性を失ってしまうため、図 4 のようにこの小さな領域を、放射方向ごとに適切なスケール変換を施して、半径 2π の中身の詰まった 3 次元球に変換し、さらにその指数を取ることでテンソル量を一意で周期的な四元数表現へと置き換えることができる。図 5 は、テンソルの四元数表現における曖昧性を取り除くための一連の変換の様子を表している。

2.4 テンソル場の作成

テンソルの一意な表現を用いてテンソル場を定義する方法を述べる。複数の回転を入力にとる回転補間手法は大きく分けて 3 つある。

- QLERP(Quaternion Liner intERPolation)
- QIB(Quaternion Interective Blending)[1]
- ExpMap(Exponential Map)[2]

ただし、いずれの手法も各回転量に対して適切な重みが与えられている場合にその重みに応じた補間回転量を求める手法である、先に述べた通り、回転としての表現に曖昧性のあるテンソルにそのまま用いることができない。

本研究では、空間的かつ時間的に離散的に与えられているテンソル量を補間するため、まず Turk によって提案された陰関数表現 [7] を用いて、テンソルが定義されている時空間座標から対応する重みを計算する。その後、まず図 5(d) において四元数と対応する固有値を補間し(手順 6.), さらにその後得られた四元数を逆写像で図 5(a) まで戻すことで、最終的な補間テンソル量を計算していく(手順 7.)。

具体的には、四元数の各成分と、固有値 ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) を並べた 7 次元のベクトルを $\mathbf{x} = (q_w, q_x, q_y, q_z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ と表すとする。ここで、 \mathbf{x} は列ベクトルを表す。 k 個の制御点、つまり、点 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_k$ において $\mathbf{x}_{c1}, \mathbf{x}_{c2}, \mathbf{x}_{c3}, \dots, \mathbf{x}_{ck}$ が与えられた時に、それらを満たし、かつ滑らかな関数 $f(\mathbf{x})$ を得ることが出来る。この $f(\mathbf{x})$ が放射基底関数 ϕ の和で表されるとすれば以下のように書き表すことができる。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n d_j \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{c_j}) + P(\mathbf{x})$$

ここで d_j は重みを表し、 $P(\mathbf{x})$ は $f(\mathbf{x})$ の線形項を表す。 $f(\mathbf{x}_{c1}) = \mathbf{c}_1, f(\mathbf{x}_{c2}) = \mathbf{c}_2, f(\mathbf{x}_{c3}) = \mathbf{c}_3, \dots, f(\mathbf{x}_{ck}) = \mathbf{c}_k$ であるから、以下のような k 個の式が与えられる。

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j=1}^k d_j \phi(\mathbf{x}_{c_i} - \mathbf{x}_{c_j}) + P(\mathbf{x}_{c_i})$$

これら k 個の式の未定数は d_j と $P(\mathbf{x})$ の係数 p であるから、これらについて連立方程式を立てると以下のような行列式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1k} & 1 & \mathbf{c}_1^T \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2k} & 1 & \mathbf{c}_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{k1} & \phi_{k2} & \dots & \phi_{kk} & 1 & \mathbf{c}_k^T \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_k & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^T \\ d_2^T \\ \vdots \\ d_k^T \\ p_0^T \\ p^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c1}^T \\ \mathbf{x}_{c2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ck}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

この連立方程式を解くことで適切な重み d_j が求まり、結果 $f(\mathbf{x})$ を求めることが出来る。また、この式は対称 LU 分解によって直接求めることが出来る。この手法の利点は、制御点を完全に満たす場を得られる事である。本論文では、全体が滑らかな補間関数になるために $\phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 \log(\mathbf{x})$ を用いている。

3 結果

有限要素法で求めた応力の補間例を示す。粗く計算した結果を補間して詳細な応力を求めている(図 6)。左の列は、頂点数 193、要素数 490 の物体を叩

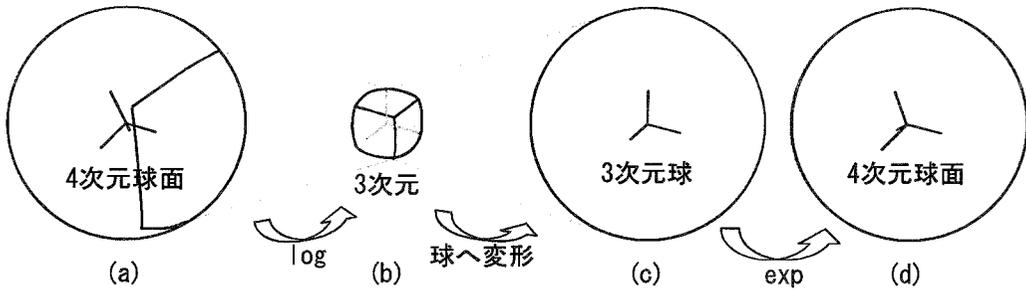


図 5: テンソル量の一意で周期的な四元数表現計算の概念図

いた際の物理シミュレーション結果から得られた応力分布を図示したものである。同様に右の列は、頂点数 823、要素数 3294 の物体を同様条件で叩いた際の物理シミュレーション結果から得られた応力分布を図示したものである。中央の列が、左の粗いシミュレーション結果から本手法を用いて、詳細な応力分布を求めた結果である。棒の長さが固有値の大きさ、方向がその力の加わっている方向を表している。固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とした時のおのおのに対応する応力を図 6 下部に図示した。大きく間違った結果はなく、大局的には良い結果が得られた。

4 まとめと今後

物理テンソル量を四元数で表現することでシミュレーション結果を補間する手法を提案した。具体的には、テンソル量の多義性を新たな表現形式に置き換え、一意に表現することで実現した。しかしながら図 5 で示されている通り、四元数を作る 4 次元球の一部を無理やり引き伸ばしている。それ故、四元数表現ではあるが、SLERP(球面線形補間)を用いて 2 つのテンソルを補間しても等間隔な変化は得られない。なぜなら、四元数が表す球面上での距離と、応力間角度が線形に対応していないからである。の特に $q = -1$ の点は特異点となっているのでこのような値を取る時は、補間経路を変えるか、座標系をずらして補間するなどの対策が必要であるまた、 λ_1 と λ_2 の大きさが入れ替わった場合、本手法では回転によって二つの状態を補間してしまうが、実際には軸は回転せず、 λ_1 と λ_2 の値だけが入れ替わる場合もある。その場合不自然な回転が生まれてしまう。また、この手法では塑性物体の破断で重要である、最大主応力の最も大きくなる位置はうまく補間されない。この位置がうまく補間されれば、破断の起こる位置が補間されるため、視覚的に良い結果が得られると考えられる。

本研究では、テンソル量の直交性を保存する補間

手法を考えたが、上に挙げた通りまだ多くの問題を残している。今後、実際の物理シミュレーションへの応用を踏まえた補間手法の提案が必要である。

参考文献

- [1] Samuel R. Buss and Jay P. Fillmore. Spherical averages and applications to spherical splines and interpolation. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 20, No. 2, pp. 95–126, 2001.
- [2] F. S. Grassia. Practical parameterization of rotations using the exponential map. *journal of graphics tools*, Vol. 3, No. 3, pp. 29–48, 1998.
- [3] M. Müller and M. Gross. Interactive virtual materials. In *GI '04*, pp. 239–246. Canadian Human-Computer Communications Society, 2004.
- [4] J. F. O'Brien and J. K. Hodgins. Graphical modeling and animation of brittle fracture. In *SIGGRAPH '99*, pp. 137–146. ACM, 1999.
- [5] M. Pauly, R. Keiser, B. Adams, P. Dutré, M. Gross, and L. J. Guibas. Meshless animation of fracturing solids. pp. 957–964. ACM, 2005.
- [6] K. Shoemake. Animating rotation with quaternion curves. In *SIGGRAPH '85*, pp. 245–254. ACM, 1985.
- [7] G. Turk and J. F. O'Brien. Shape transformation using variational implicit functions. In *SIGGRAPH '99*, pp. 335–342. ACM, Aug 1999.

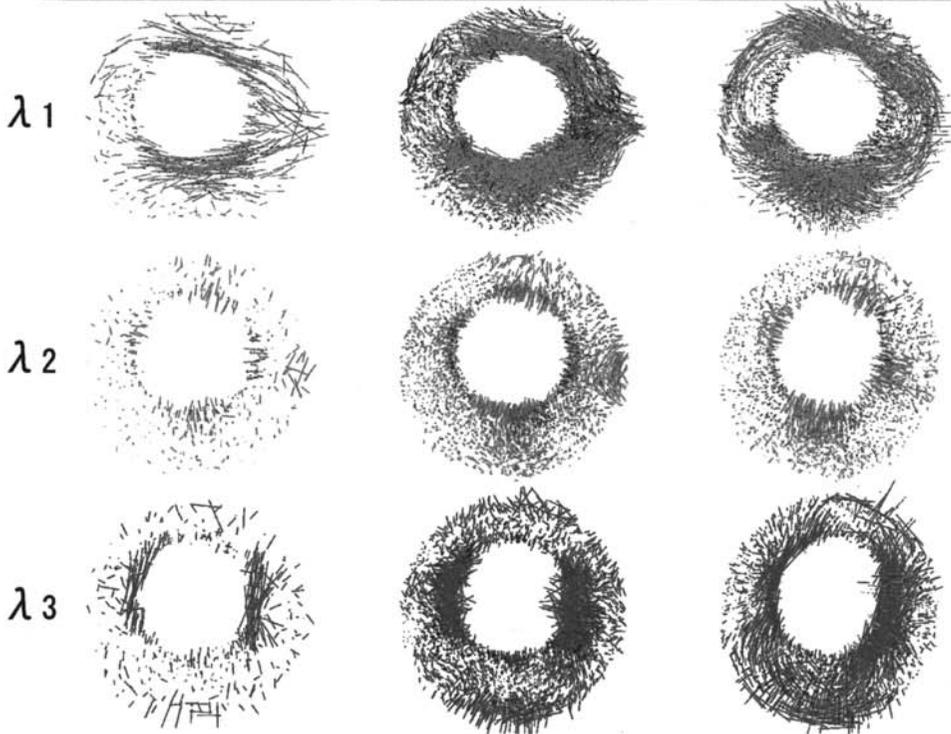
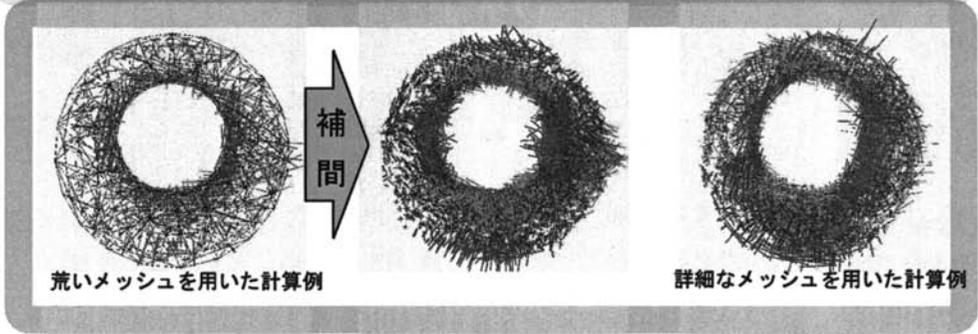
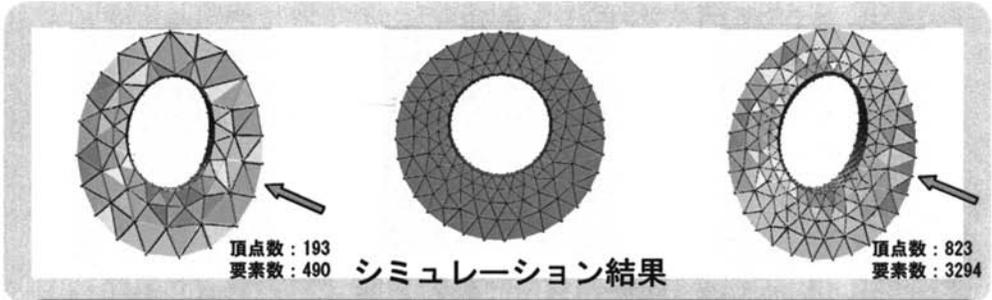


図 6: 計算結果:一番上の段は左から粗いメッシュを用いたシミュレーション計算結果, 元の形状, 詳細なメッシュを用いて計算した結果. 2段目の左から, 粗いメッシュのシミュレーション計算によって得られた応力分布を図示したもの, その結果を用いて詳細な結果を補完した結果, 詳細なメッシュのシミュレーション計算から得られた応力分布. 下の3段は2段目の結果を固有値毎に成分表示した図