グラフの点の順序づけ問題の最小費用流問題によるモデル化

中森 眞理雄
nakamori@cc.tuat.ac.jp
東京農工大学 工学部 情報工学大講座
〒184 東京都 小金井市 中町 2-24-16

グラフの点を1列に並べると, 一般には, 隣り合わない点を結ぶ枝が現れる. これらの枝の長さ(あるいは, それに対する関数)の和が最小となる列を求める問題を数理計画問題として定式化し, その性質を論ずる.

本論文の目的は, 比較的一般的な目的関数を提示し, グラフの点を1列に並べる種々の問題が, この目的関数をある種のものに限定することによって導かれることを示すこと, その目的関数の下で最適解を求める問題がネットワークフロー理論における最小費用流問題と関連が深いことを示すことにある.

分枝限定法によるアルゴリズムを述べ, 最小費用流問題のアプローチが限定操作に有効であることを示す.

Modeling of Node Sequencing Problem of a Graph by the Minimium Cost Flow Problem

Mario NAKAMORI
Department of Computer Science
Tokyo A & T University
(Tokyo University of Agriculture and Technology)
2-24-16, Nakacho, Koganei, Tokyo, 184 Japan

Suppose all nodes of a graph are arranged in a sequence. In general cases, some branches connect nodes not adjacent in this sequence. Then, what is the optimal arrangement that minimizes the sum of the length of such branches? In the present papaer we consider this problem and formulate it as a mathematical programming problem.

The aim of the present paper is to propose a general objective function and to show that our node sequencing problem is obtained as a special case by restricting the objective function to a certain kind. We also show that the problem is closely related to the minimum cost flow problem in the network flow theory.

We also describe an algorithm based on the branch and bound method and show that the approach using the minimum cost flow problem is effective in the bounding procedure.

1. はじめに

グラフの点を1列に並べる問題を考える. ただし, 列の左端と右端の点は指定されているものとする. このとき, 一般には, 隣り合わない点を結ぶ枝が現れる. この枝の長さ (あるいは, それに対する関数) の和が最小となる列を求めるのが, 本論文で扱う問題である.

この問題の難しさは, 目的関数の定め方によって異なる. ある目的関数の下では最適解は自明であり, ある目的関数 (実用的に意味のある大多数の関数) の下では最適解を求めることはNP困難である.

本論文の目的は, 比較的一般的な目的関数を提示し, グラフの点を1列に並べる種々の問題が, この目的関数をある種のものに限定することによって導かれることを示すこと, その目的関数の下で最適解を求める問題がネットワークフロー理論における**最小費用流問題**と関連が深いことを示すことにある.

2では, 本論文での用語を定義した後に, いくつかの目的関数による問題のモデルの例を示す. それらの直観的な意味を述べた後に, 数理計画問題としての定式化の例を示す.

3では, **2**で述べた数理計画問題としての記述が, ネットワークフロー理論における最小費用流問題と深い関連があることを示す. また, 力学的解釈も示す.

4では, 本論分の問題に対する一般的解法として, 分枝限定法によるアルゴリズムを示し, 限定操作に最小費用流問題が有用であることを示す.

5では, グラフの点を1列に並べる問題で, 本論文で論じたモデルでは捉えることができない問題の例を示す.

2. 問題の例

2.1 用語の定義

点$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_v$と枝$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_e$から成る有向グラフ$\mathbf{G}$を考える.

点$\mathbf{n}_i$の近傍$U(\mathbf{n}_i)$を, 点$\mathbf{n}_i$および点$\mathbf{n}_i$を始点とする枝の終点の集合と定義する.

グラフ$\mathbf{G}$の点$\mathbf{n}_1$の座標を0, 点$\mathbf{n}_v$の座標を$v-1$とし, 他の点をこの間に等間隔に並べることにする. 点はv個あるので, 各点の座標は$1, 2, \ldots, v-2$のいずれかであり, 座標値が同じ点はない. このような, ある1通りの並べ方をXで表し, 点$\mathbf{n}_i$の座標値を$X(\mathbf{n}_i)$, 集合Sに属する各点の座標値の集合を$X(S)$と記す. すなわち,

$$X(S) = \{X(\mathbf{n}_j) | \mathbf{n}_j \in S\}$$

特に, $S = U(\mathbf{n}_j)$のとき, $X(S) = X(U(\mathbf{n}_j))$を点$\mathbf{n}_i$の**勢力範囲**と呼ぶことにする (図1).

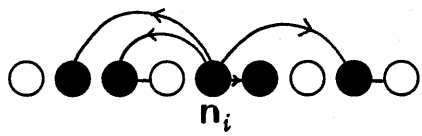

図 1: 勢力範囲

本論文で扱う問題は,

$$\sum_{i=1}^{v} f(X, \mathbf{n}_i)$$

を最小とする並べ方Xを求めることである. ただし, fは点の勢力範囲に対する関数であり, 以下に示すように, 種々の例が考えられる.

2.2 自明なモデル

最も自明なモデルとして, $f(X, \mathbf{n}_i) = 0$である関数fを考える. この場合, いかなる並べ方も最適な並べ方である.

2.3 枝の長さの和に基づくモデル

関数fとして,

$$f(X, \mathbf{n}_i) = \sum_{i=1}^{v} \sum |X(\mathbf{n}_j) - X(\mathbf{n}_i)|$$

を用いるものである. ただし, 上式で右辺の2番目の和は$\mathbf{n}_j \in U(\mathbf{n}_i)$についてとる. このモデルは, すべての枝の長さの和が目的関数になる.

2.4 勢力範囲に基づくモデル

関数fとして,

$$f(X,\mathbf{n}_i)=\max_{\mathbf{n}_j\in U(\mathbf{n}_i)} X(\mathbf{n}_j)-\min_{\mathbf{n}_j\in U(\mathbf{n}_i)} X(\mathbf{n}_j)$$

を用いるものである. すなわち, 各点$\mathbf{n}_i$に対して, それから出て行く枝の終点で最も右に置かれたものと最も左に置かれたものの間の距離である.

以下で詳しく論ずるために, このモデルによる問題を数理計画問題として定式化してみる.

miminize

$$f=\sum_{i=1}^{v}(t_i-s_i) \tag{1}$$

subject to

$$s_i\le x_i\le t_i \quad (i=1,\ldots,v), \tag{2}$$

$$s_i\le x_j\le t_i \quad (\forall \mathbf{n}_j\in U(\mathbf{n}_i);\ i=1,\ldots,v), \tag{3}$$

$$x_1=0,\quad x_v=v-1, \tag{4}$$

$$x_i=1,2,\ldots,v-2, \tag{5}$$

$$x_i\ne x_j \quad (i\ne j) \tag{6}$$

ただし, s_i, t_iは点$\mathbf{n}_i$の勢力範囲の左端, 右端の位置を表す変数である. また, 式(2)は点$\mathbf{n}_i$がその勢力範囲内にあることを, 式(3)は点$\mathbf{n}_i$に隣接する点が点$\mathbf{n}_i$の勢力範囲内にあることを, 式(4)は点$\mathbf{n}_1$と$\mathbf{n}_v$の位置が指定されていることを, 式(5)は点が等間隔に並んでいることを, それぞれ表す.

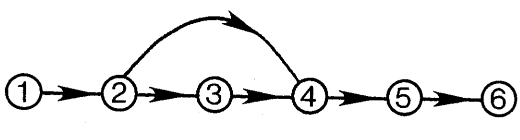

図 2:

図2のグラフで, 点$\mathbf{n}_1$と$\mathbf{n}_6$の位置がそれぞれ0と5に指定されているときに他の点の最適配置を求める問題は, 次の通りに記述される.

miminize

$$f=\sum_{i=1}^{5}(t_i-s_i)$$

subject to

$$s_i\le x_i\le t_i \quad (i=1,\ldots,5),$$

$$s_1\le x_2\le t_1,$$

$$s_2\le x_3\le t_2,$$

$$s_2\le x_4\le t_2,$$

$$s_3\le x_4\le t_3,$$

$$s_4\le x_5\le t_4,$$

$$s_5\le x_6\le t_5,$$

$$x_1=0,\quad x_6=5,$$

$$x_2=1,2,3,4,$$

$$x_3=1,2,3,4,$$

$$x_4=1,2,3,4,$$

$$x_5=1,2,3,4,$$

$$x_i\ne x_j(i\ne j)$$

3. 最小費用流問題との関係

2.4のモデルは力学的に次のように解釈することができる.

各点$\mathbf{n}_i$には左端, 右端の“押さえ”があり, $\mathbf{n}_i$の点はこの押さえの外に出ることはできない(図3). 各点の左右の押さえは“ばね”で結ばれている. この“ばね”は, 長さ1までは力を加えなくても伸び, それ以上は伸びによらず一定の力が働く(図4). 図4において斜線部は双対エネルギーであり, もし式(5), (6)の制約条件を無視するならば, この和が最小のところで系は安定する. この安定解を求めることは容易である.

2.4のモデルはネットワークフロー(あるいは, 一般化された電気回路)理論による解釈をすることもできる. 図5はそのネットワークであり, s_i, t_iは圧

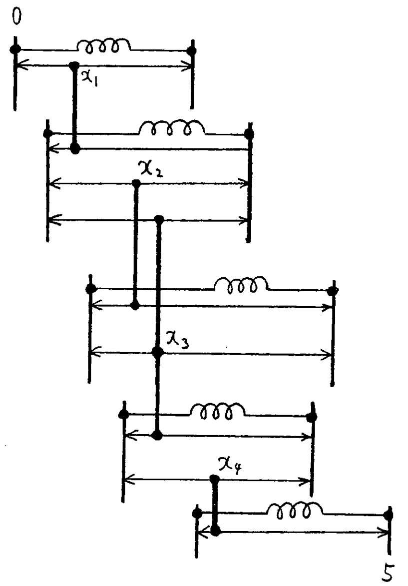

図 3: 力学モデル

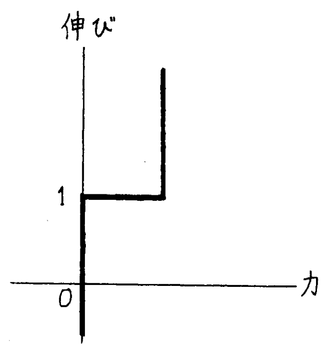

図 4: “ばね” の特性

に対するポテンシャルとして扱われる. ただし, 抵抗は, 圧が1までは流れが0で, 圧が1を越えると流れが1となるようなものである.

ネットワークフロー理論によれば, 一般に, 素子の流れ・圧の関係が図6のような場合, 次の3つの問題は同等であることが知られている.

(P1) 保存則 (一般化されたキルヒホッフの電流法則) をみたす流れで, 総エネルギーが最小のものを求める問題

(P2) 可積分性 (一般化されたキルヒホッフの電圧法則) をみたす圧で, 総双対エネルギーが最小のものを求める問題

(P3) 各素子において流れ・圧の関係が成り立っている流れと圧を求める問題

このことから, **2.4** の問題から制約条件 (5), (6) を除いた問題は最小費用流問題のアルゴリズムを用いて解くことができる. なお、本論文では変数が整数値をとることを想定しているので、図6のような特性は、適当な折れ線で近似することができる。

4. 分枝限定法への応用

2.4 の問題は制約条件 (5), (6) のために, 解くのが困難な問題である. ほとんど唯一の解法は分枝限定法によるものである.

分枝限定法は, 原理的には, すべての可能解を作りだし, それぞれについて目的関数の値を求め, それらの中で最良の可能解を最適解として得るアルゴリズムである. ただし, 可能解を作り出す過程で種々の限定操作を施し, 悪いことが明らかな解を作り出すことを避けることによって, 能率向上を図っている.

グラフの点を1列に並べる問題では, 一部の点の位置が固定されたときに制約条件 (5), (6) を無視して最小費用流問題のアルゴリズムによって残りの点の位置を仮に求めてみる. この方法で得られた点の

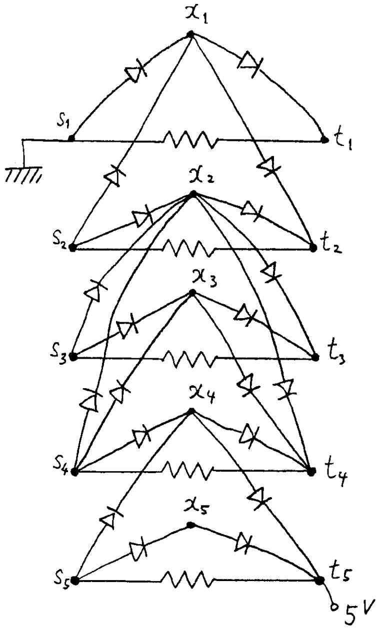

図 5: ネットワークフローモデル

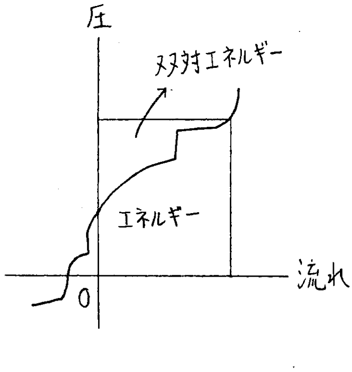

図 6:

位置は, 一般には, 制約条件を満たすものではないが, それに対する目的関数の値が, 既に得られている最良の可能解より悪いならば, 残りの点を固定することによって場合を尽くす必要はない.

5. ネットワークフローモデルでは捉えられない問題

本論文のモデルはきわめて一般的であるが、万能ではない。

例えば、グラフの点を1列に並べるとき、この列において隣り合わない点同士をつなぐ枝の本数を最小にする問題は、本論文のモデルでは捉えることができない。その理由は、その問題では、図4あるいは図6の双対エネルギー値が定数でなければならないからである。

6. おわりに

グラフの点を1列に並, 隣り合わない点を結ぶ枝の長さの和が最小となる列を求める問題を数理計画問題として定式化し, その性質を論じた.

比較的一般的な目的関数を提示し, グラフの点を1列に並べる種々の問題が, この目的関数をある種のものに限定することによって導かれることを示した。その目的関数の下で最適解を求める問題がネットワークフロー理論における最小費用流問題と関連が深いことを示した.

分枝限定法によるアルゴリズムを述べ, 最小費用流問題のアプローチが限定操作に有効であることを示した.

参考文献

[1] M. Iri, *Network Flow, Transportation and Scheduling: Theory and Algorithms*, Academic

Press, New York, 1969.