完全二部グラフの同型因子分解ＩＩ：分解

荒木徹　木暮政幸*　柴田幸夫

群馬大学工学部情報工学科

要旨

グラフの同型因子分解に関して多くの結果が発表されているが，それらは，存在定理であるか，またはいくつかの単純な構想を持つグラフによる同型因子分解を取り扱っているものがほとんどであった．それに対して柴田，関は木という一般的なクラスに属するグラフによる分解を研究した．本研究では，整数の整除性による結果をより拡張し，それを完全二部グラフの同型因子分解へ適用し，$am + bn + c$ が mn を割り切るときの同型因子分解について述べる．

abstract

Isomorphic factorization of graphs have been studied by many authors. Most of those results were the existence theorem, or dealt with factorization into some particular structure. Shibata, Seki investigated isomorphic factorization of complete bipartite graphs into trees[6]. In [6], a divisibility condition was first studied, then the results was applied to foctorizations. In this session, methos of isomorphic factorizations of complete bipartite graphs using the results of the dibisibility of mn by $am + bn + c$ are discussed.

1 序論

グラフ G の全域部分グラフを G の因子と呼び，G を辺素な因子の和に分解することを G の因子分解という．特に，因子分解における各因子が互いに同型であるとき，それを同型因子分解と呼ぶ．同型因子分解を考えるときには，そこに因子の持つ構造が大きく反映される．因子の構造がパス，スター等の比較的単純な構造を持つグラフについては，主にデザイン論の研究者によって研究されてきた (デザイン論と同型因子分解の関係についての論文として代表的なものに [1, 8] がある)．これに対して，各因子のサイズが比較的大きくなるような場合の同型因子分解では，因子の構造を特定することは比較的困難であり，これまでは存在論の立場が中心的であった．

グラフの同型因子分解と整数の整除性の間には次のような関係がある．グラフ G の辺の数を G のサイズと呼ぶことにすると，サイズ t のグラフがサイズ s の因子によって同型因子分解可能であるならば，明らかに s は t を割り切る．この条件は divisibility condition と呼ばれており，同型因子分解が可能であるための自明な必要条件である．この条件の十分性に関して Harary 他の論文 [3, 4] により，divisibility condition が完全グラフおよび完全二部グラフに対して，十分条件となることが証明された．ところがこれらの研究は，“divisibility condition が成り立つときに同型因子分解が可能であるようなサイズの部分グラフが存在する” という存在論に中心がおかれており，因子の構造はあまり問題とされていなかった．

*現在，(株) 富士通

それに対して，柴田，関は因子の持つ構造を木と限定して，完全二部グラフの木による同型因子分解を考えた [6]．そして完全二部グラフにおいては，因子の構造を木に限定しても divisibility condition が同型因子分解可能であるための十分条件となることを証明した．完全二部グラフの二部分割の頂点数をそれぞれ m, n とし，グラフの辺の数をサイズと呼ぶことにすると，完全二部グラフのサイズは mn，その全域木のサイズは $m+n-1$ であるから，この場合の divisibility condition は $m+n-1$ が mn を割り切ることと同値になる．そこで [6] では，まず mn の $m+n-1$ による整除性について調べ，その結果を同型因子分解に応用することで完全二部グラフの木による同型因子分解が存在するための必要十分条件は $m+n-1$ が mn を割り切ることであることを証明した．

本発表では，整数の整除性と完全二部グラフの同型因子分解との関連について述べ，完全二部グラフの林による分解について述べる．また同型因子と整数対の順序と関係について述べる．

2 完全二部グラフの同型因子分解

2.1 置換用いた完全二部グラフの同型因子分解

完全二部グラフ $K(m,n)$ の同型因子分解について，F. Harary 他による次の定理が知られている．

Theorem 2.1 完全二部グラフ $K(m,n)$ を同型因子分解する，サイズ e のグラフが存在するための必要十分条件は，e が mn を割り切ることである．

e が mn を割り切るとすると，$e = m_1 n_1$，$m_1|m$，$n_1|n$，$m_1, n_1 > 0$ とかける．このとき，明らかに $K(m_1,n_1)$ は $K(m,n)$ を分解する．これより，$K(m,n)$ の同型因子が存在することは確かめられる．

Theorem 2.1は，$K(m,n)$ の同型因子の存在を示しているが，ある特定の構造を持つグラフによる同型因子分解については考慮されていなかった．そこでここでは $am+bn+c$ という加法形式で表された数の edge を持つ，$K(m,n)$ の同型因子を構成するための方法について述べる．

mn の $am+bn+c$ による整除性に関して，次の命題が成り立つ．整数 x, y に対して，x, y の最大公約数を (x,y) で表す．

Theorem 2.2 a, b, c を任意の整数とする．整数 m, n が，$am+bn+c \neq 0$ あるいは $mn \neq 0$ を満たすならば，

$$(am+bn+c, mn) = \frac{(m, bn+c)(am+c, n)}{\theta}. \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，

$$\theta = \frac{(d_m, d_n)}{(d_m, d_n, a\alpha+\alpha', b\beta+\beta')},$$

$$d_m = (m, bn+c),\ m = d_m\alpha,\ bn+c = d_m\alpha',$$

$$d_n = (am+c, n),\ n = d_n\beta,\ am+c = d_n\beta'.$$

ここで新しい記号 ϑ を導入する．これは

$$\vartheta = \mathrm{sign}(am+bn+c)\theta,$$

によって定義される. ここで, 関数 sign(x) は

$$\mathrm{sign}(x)=\begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

と定義される関数である.

整数 x が y を割り切るとき $x|y$ と表す.

Theorem 2.3 a,b,c を任意の整数とする. $am+bn+c \neq 0$ を満たす整数 m,n に対し, $(am+bn+c)|mn$ であるための必要十分条件は

$$\frac{(m,bn+c)(am+c,n)}{\vartheta}=am+bn+c,$$

が成り立つことである.

定理 2.3より, 整除性が成立するための必要十分条件をさらに得ることが出来る.

Theorem 2.4 $am+bn+c \neq 0$ を満たす整数 m,n に対し,

1. $(am+bn+c)|mn$ であるための必要十分条件は $d_m=\vartheta(b\beta+\beta')$ が成り立つことである.
2. $(am+bn+c)|mn$ であるための必要十分条件は $d_n=\vartheta(a\alpha+\alpha')$ が成り立つことである.

Theorem 2.5 $c \neq 0$ のとき, $am+bn+c \neq 0$ を満たす整数 m,n に対し, $(am+bn+c)|mn$ であるための必要十分条件は $ab\alpha\beta-\alpha'\beta'=-c/\vartheta$ が成り立つことである.

これらの整除性に関する命題をもとに, 完全二部グラフの同型因子分解を考える.

整数 $a>0, b>0$ および c に対し, m,n を $am+bn+c|mn$ を満たす正整数とする. $K(m,n)$ の二部分割を $U \cup V$ とし, $U=\{u_0,u_1,\ldots,u_{m-1}\}$, $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ とする. このとき $m=d_m\alpha$, $d_m=(m,bn+c)$ および $n=d_n\beta=\theta(a\alpha+\alpha')\beta$ である. U,V 上に permutation σ,τ を次のように定義する.

$$\sigma=\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{d_m-1},\quad \tau=\phi_0\phi_1\cdots\phi_{(a\alpha+\alpha')-1}.$$

ここで各 γ_i, ϕ_j はそれぞれ長さが α, $\theta\beta$ の disjoint cyclic permutation である. その vertex を $\gamma_i=(u_i^0,u_i^1,\ldots,u_i^{\alpha-1})$, $\phi_j=(v_j^0,v_j^1,\ldots,v_j^{\theta\beta-1})$ とラベル付けし,

$$\Gamma_i=\{u_i^0,u_i^1,\ldots,u_i^{\alpha-1}\},\ (0\leq i<d_m),\quad \Phi_j=\{v_j^0,v_j^1,\ldots,v_j^{\theta\beta-1}\},\ (0\leq j<a\alpha+\alpha'),$$

とする.

G を U,V を二部分割とする二部グラフとし, G_{ij} を vertex set が U,V, edge set が

$$E(G_{ij})=\left\{\sigma^i(u)\tau^j(v)|uv\in E(G),\ u\in U,\ v\in V\right\},$$

であるグラフとする. このとき $G\cong G_{ij}$, $(0\leq i<\alpha,\ 0\leq j<\theta\beta)$ かつ $G_{00}=G$ である. もし $\cup_{ij}E(G_{ij})$ が $E(K(m,n))$ の分割になるなら, G は σ と τ のもとで $K(m,n)$ を同型因子分解する. ここで $E_{ij}=\{uv|u\in\Gamma_i,\ u\in\Phi_j\}$, $(0\leq i<d_m,\ 0\leq j<a\alpha+\alpha')$, とする. $\cup_{i,j}E_{ij}$ は $E(K(m,n))$ の分割になる.

Theorem 2.6 U と V を二部分割とする二部グラフ G が σ, τ のもとで $K(m,n)$ を同型因子分解するための必要十分条件は $|E(G) \cap E_{ij}| = 1$, $(0 \leq i < d_m,\ 0 \leq j < a\alpha + \alpha')$ であることである. G が σ, τ のもとで $K(m,n)$ を同型因子分解するなら $|E(G)| = am + bn + c$ である.

Proof G が σ, τ のもとで $K(m,n)$ の同型因子分解すると G は E_{ij} とちょうど一本の edge を共有する. 逆も明らかに成り立つ. Γ_iは d_m 個, Φ_jは $a\alpha+\alpha'$ 個あるから $|E(G)| = d_m(a\alpha+\alpha') = am+bn+c$ である. ∎

Lemma 2.6にもとづいて, 完全二部グラフ $K(m,n)$ のサイズ $am+bn+c$ の同型因子を構成することができる. すなわち, vertex set U, V 上に permutation σ, τ が定義されたとき, 各サイクル γ_i, ϕ_j の間を 1 本の edge で結ぶことにより, $K(m,n)$ の同型因子が構成できる. このような同型因子全体からなる集合を $IF_A(K(m,n))$ とする.

また同様にして, 頂点集合上の permutation を次のように定義することもできる.

$$\sigma_1 = \gamma'_0\gamma'_1 \cdots \gamma'_{(b\beta+\beta')-1},\ |\gamma'_i| = \theta\alpha,\quad \tau_1 = \phi'_0\phi'_1 \cdots \phi'_{d_n-1},\ |\phi'_j| = \beta.$$

この permutation にもとづいて構成される $K(m,n)$ の同型因子の集合を $IF_B(K(m,n))$ で表す.

$|c| = 1$ ならば, 任意の $[m,n] \in S(a,b,c)$ に対して $\theta = 1$ であるので, 明らかに任意の $[m,n] \in S(a,b,c)$ に対して $IF_A(m,n) = IF_B(m,n)$ である.

例. $a = b = 1$, $c = -1$ に対し, $[1,n] \in S(1,1,-1)$, $n > 0$ である. この対においては, $d_m = 1$, $d_n = n$, $\alpha = \beta = 1$, $\theta = 1$ であるので, permutation σ, τ は共に identity function である. したがって,

$$IF_A(K(1,n)) = \{K(1,n)\}.$$

また, $IF_A(K(m,n))$ に属する同型因子の次数に関して, 次の corollary が成り立つことが Theorem 2.6よりすぐにわかる.

Corollary 2.7 G が σ, τ のもとで $K(m,n)$ を同型因子分解するならば,

$$\sum_{u \in \Gamma_i} \deg_G(u) = a\alpha + \alpha', \quad (0 \leq i < d_m),$$

$$\sum_{v \in \Phi_j} \deg_G(v) = d_m, \quad (0 \leq j < a\alpha + \alpha'),$$

が成り立つ.

2.2 完全二部グラフの林による分解

Shibata, Seki[6] により, 完全二部グラフの木による分解が可能であるための必要十分条件が求められた. この結果と, 整数の整除性の問題を一般化することにより, 完全二部グラフの林による分解に関する同様の結果を得ることができる.

$|U| = m$, $|V| = n$ なる頂点集合 (U,V) を二部分割とする二部グラフ G が c 個の連結成分を持つ林であるなら, その辺の数は $m+n-c$ となる. ゆえに, $K(m,n)$ の林による同型因子分解が可能であるなら $m+n-c$ は mn を割り切る. この必要条件は同時に十分条件になることが証明できる.

Theorem 2.8 完全二部グラフ $K(m,n)$ の c 個の成分を持つ林による分解が存在するための必要十分条件は $m \geq c$, $n \geq c$ かつ $m+n-c$ が mn を割り切ることである.

この定理は interlaced graph という, 同型因子のクラスを定義し, $K(m,n)$ を同型因子分解する林を構成することによって証明することができる.

2.3 順序集合との関係について

Lemma 2.6によって構成される, 完全二部グラフ $K(m,n)$ の同型因子の集合 $IF_A(K(m,n))$, $IF_B(K(m,n))$ と, 整数対の集合 $S(a,b,c)$ における順序関係との関係について考える.

整数 a,b,c に対して, $[m,n]$ を $am+bn+c|mn$ かつ m,n が共に正である対とする. また, $[m,n] \in S_{a,b,c}(\alpha,\alpha')$ とする.

$[m_1,n_1]$ を $S_{a,b,c}(\alpha,\alpha')$ において, $[m,n]$ よりも後の要素とする. すなわち,

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_1' = \alpha,$$
$$\theta_1\beta_1 = \theta\beta + k\frac{\alpha'}{(ab,\alpha')}, \quad \theta_1\beta_1' = \theta\beta' + k\frac{ab\alpha}{(ab,\alpha')},$$

となる正整数 k が存在する. これより明らかに,

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_1' = \alpha,$$
$$\theta_1\beta_1 = \theta\beta + k\frac{\alpha'}{(ab,\alpha')} \geq \theta\beta,$$
$$d_{m_1} = \theta_1(b\beta_1+\beta_1') = \theta(b\beta+\beta') + k\frac{b(a\alpha+\alpha')}{(ab,\alpha')} > d_m,$$
$$a\alpha_1 + \alpha_1' = a\alpha + \alpha',$$

である.

Theorem 2.9 G を $IF_A(K(m,n))$ の任意の要素とする. また, $[m_1,n_1]$ を $S_{a,b,c}(\alpha,\alpha')$ において, $[m,n]$ よりも後の要素で, かつ $m_1 > 0$, $n_1 > 0$ であるとする. このとき, $G \subset G_1$ かつ $G_1 \in IF_A(m_1,n_1)$ なる G_1 が存在する.

Example. $a=b=1$, $c=-1$ に対して, [4,3], [10,6] は $S_{1,1,-1}(2,1)$ の要素であり, [10,6] は [4,3] の次の要素である. このとき, $IF_A(K(4,3))$ の要素 G と $IF_A(K(10,6))$ の要素で G を含むグラフ G_1 を Figure 1に示す.

同様の方法で, $IF_B(K(m,n))$ と整数対の関係を証明できる.

Theorem 2.10 G を $IF_B(K(m,n))$ の任意の要素とする. また, $[m_2,n_2]$ を $S'_{a,b,c}(\beta,\beta')$ において, $[m,n]$ よりも後の要素で, かつ $m_2 > 0$, $n_2 > 0$ であるとする. このとき, $G \subset G_2$ かつ $G_2 \in IF_B(m_2,n_2)$ なる G_2 が存在する.

もし $|c| = 1$ ならば, 任意の $[m,n] \in S(a,b,c)$ に対して常に $\theta = 1$ なので, $IF_A(K(m,n)) = IF_B(K(m,n))$ である. 特に $a=b=1$, $c=-1$ のときは, $m+n-1|mn$ をみたす正整数対の集合によって, 二分木構造が構成できることが証明されている. このととと Theorem 2.9, 2.10より, その二分木における整数対に対応する同型因子を, 親の対に対応する同型因子を含むように構成することができる.

m	n
α	β
α'	β'
θ	

4	3
2	1
1	1
1	

10	6
2	2
1	3
1	

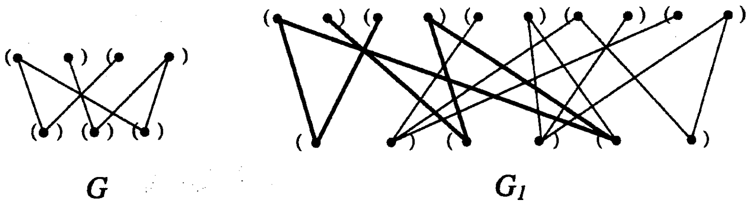

図 1: $a = b = 1$, $c = -1$ に対する同型因子

参考文献

[1] J-C. Bermond and D. Sotteau, Graph decomposition and G-designs, *Congr. Numer.* 15, pp. 53–72, 1976.

[2] F. Harary and R. W. Robinson, Isomorphic factorizations X: Unsolved problems, *J. Graph Theory*, 9, pp. 67–86, 1985.

[3] F. Harary, R. W. Robinson, and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations I: complete graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 242, pp. 243–260, 1978.

[4] F. Harary, R. W. Robinson, and N. C. Wormald. Isomorphic factorisations III: complete multipartite graphs. In *Combinatorial Mathematics, Springer Lecture Notes in Math.*, volume 686, pp. 47–54. Springer, Berlin, 1978.

[5] S. J. Quinn, Isomorphic factorizations of complete equipartite graphs, *J. Graph Theory*, 7, pp. 285–310, 1983.

[6] Y. Shibata and Y. Seki, The isomorphic factorizations of complete bipartite graphs into trees, *Ars Combin.* 33, pp. 3–25, 1992.

[7] H. F. Wang, Isomorphic factorization of complete equipartite graphs – the proof of the Harary - Robinson - Wormald conjecture, *Scientia Sinica, Ser. A*, 25, pp. 1152–1164, 1982.

[8] R. M. Wilson, Decompositions of complete graphs into subgraphs isomorphic to a given graph, *Proc. 5th British Combinatorial Conf.*, pp. 647–659, 1975.