数理モデル化と問題解決　39－8
（２００２．５．１０）

２－ストリング・タングルの分解木について

落合豊行、森村則子
奈良女子大学大学院人間文化研究科

概要

スケイン関係式から派生する２－ストリング・タングルの分解木を計算するシステムを構築した。このシステムでは、タングルをマウス・トラッキングで入力すると分解木を自動的に計算し、基底となる２つの基本タングルの係数多項式を出力するように設計されている。係数多項式は HOMFLY－不変量に一致するものを採用した。このシステムにより、これまで計算不能であった９０交点前後の交点を持つ結び目の HOMFLY－不変量がタングル分解を利用することにより計算できるようになった。

Resolution Trees of 2-string tangles

Mitsuyuki Ochiai and Noriko Morimura
Graduate school of Human Culture
Nara Women's University

Abstract

We developed a software system which computes 2-string tangle's decomposition tree derived from a skein's relation. This system will calculate a decomposition tree automatically, if a tangle is inputted of a mouse tracking, and it is designed so that the coefficient polynomials of two basic tangles which become a base may be outputted. The coefficient polynomial adopted what is in agreement with a HOMFLY-invariant. It could calculate, when the HOMFLY-invariant of a knot with about 90 crossings which were impossible for calculation until now used tangle decomposition by this system.

1. はじめに

本報告では結び目のタングル分解から得られるタングルにスケイン関係式を適用したときに生じる分解木を直接計算し、２つの基本的なタングルに関する基底多項式を出力するシステムについて報告する。スケイン関係式から派生する結び目の多項式不変量はタングル分解から得られる２つの異なるミュータント結び目を判別できないことが数学的に証明されている。従って、この分野の研究にはタングルの基底多項式を直接計算することが不可欠であるがそのようなシステムはこれまで無かった。

２．スケイン関係式

向き付けられた結び目の交点は正と負の交点を持つ。１つの交点に着目して以下の漸化式により結び目Ｋの多項式不変量が定まる。

（１）Vk(x、y；K)＝１　、もしＫが自明な結び目である。

（２）xVk(x、y；K+)＋yVk(x,y；K—)=Vk（x、y；K∞)、ただし、K+、K-、K∞は結び目 K の１つの交点の３つの状態を表し、それぞれ正、負、平滑化を意味する。この関係式で定まる結び目の不変量をHOMFLY－不変量と呼ぶ。

結び目の HOMFLY－不変量を計算するには K の最短なループに着目し、このループ上の交点をすべて上方または下方交点に関係式（２）を用いて単純化することにより帰納的に計算する。平滑化操作では交点が減少するのでこの帰納的操作は意味を持つ。

T を１つのタングルとするとき、スケイン関係式を T に適用すると以下のような式が得られる。

$$Vk(x, y; T) = \alpha Vk(x, y; T0) + \beta Vk(x, y; T1)$$

ここで、Ｔ０、Ｔ１は１交点以下の交点のみをもつ自明なタングルで、１交点のときには正の交点を持つ。α、βはｘ、ｙの単項式の倍数を除いて計算の順序によらず一意に定まる。

本システムでは、結び目の場合とは異なり、簡単化操作は最短なループではなく、１つのストリング上の交点を上方または下方交点に変更する方法を採用し、結び目の連結和が生じたときに連結和成分となる結び目の HOMFLY－不変量を計算し乗算する方法を採用した。従って部分的には結び目の HOMFLY－不変量計算方式に依存している。この部分の計算量の増加は交点数が十分に減少している場合に生じるので全体にはあまり影響することはないものと推察される。

本システムの結び目の場合に対する計算の優位性は実は以下の２つの部分にある。

（１）　１つのストリング上の交点を上方または下方交点に変更する方法。

（２）　結び目の連結和が生じたときに連結和成分となる結び目の HOMFLY－不変量を計算し乗算する方法。

３．本システムを用いた計算

本システムの入力部分はＯｐｅｎＧＬを用いたマウス・トラックキングで行われる。ＯｐｅｎＧＬを用いた理由はタングルの３次元表示を行うためであるが現在の版では２－次元表示のみである。タングルＴを入力したときに、Ｃ言語で作成されたプログラム部分でα、βを計算し、それをＭａｔｈＬｉｎｋを通じてＭａｔｈｅｍａｔｉｃａに渡すように設計されている。このようにすることで２つのタングルから結び目の HOMFLY－不変量を簡単に計算できる利点が得られる。

以下に寺坂―樹下結び目をＭａｔｈＬｉｎｋのもとで計算した結果を示す。

```
TangleResolution[type_] := Block[{ret},
  Install["kicktangle"];
  ret = kicktangleknot[type];
  Uninstall["kicktangle"];
  If[First[ret] == 1,
   Return[{{ret[[2]], ToExpression[ret[[4]]]},
     {ret[[3]], ToExpression[ret[[5]]]}}],
   Print[ret[[4]]]]
 ]
pdata={{13}, {-8, 20, -12, 14, -4, 2, 10, -24, -26, 6, 1, -16, -18}}
SkeinPolynomial[1, pdata]
Two variable Jones Polynomial for [{{13},
  {-8, 20, -12, 14, -4, 2, 10, -24, -26, 6, 1, -16, -18}}]
```

$$-x+x^3-y+6x^2y-3x^4y+6xy^2-11x^3y^2+2x^5y^2+y^3-11x^2y^3+6x^4y^3-3xy^4+7x^3y^4+2x^2y^5$$

```
TangleResolution[0]
```

$$\left\{\left\{0,\ 2+\frac{1}{x\,y^3}-\frac{2}{y^2}-\frac{1}{x\,y}+\frac{x}{y}\right\},\ \left\{4,\ -\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y^2}\right\}\right\}$$

```
TangleResolution[0]
```

$$\left\{\left\{4,\ \frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{x\,y}-\frac{x}{y}\right\},\ \left\{0,\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x\,y^2}+\frac{2}{y}-\frac{1}{x^2y}\right\}\right\}$$

```
VK = f1 g1 (x + y) + f1 g2 + f2 g1 + f2 g2 (1 / x - y (x + y) / x);
Expand[VK]
```

$$7-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{y^4}-\frac{1}{x^2y^4}-\frac{1}{x^3y^3}+\frac{6}{x\,y^3}-\frac{3x}{y^3}-\frac{11}{y^2}+\frac{6}{x^2y^2}+\frac{2x^2}{y^2}+\frac{1}{x^3y}-\frac{11}{x\,y}+\frac{6x}{y}+\frac{2y}{x}$$

上の結果が示すように、寺坂―樹下結び目を結び目とタングル分解で求めた結果が一致していることが示されている。

参考文献

「１」「コンピュータによる結び目理論入門」、落合―山田―豊田、牧野書店、１９９６
「２」ソフトウェア公開サイト、http://amadeus.ics.nara-wu.ac.jp/~ochiai/download.html