数理モデル化と問題解決 42－23
（２００２．１１．２９）

長期的リスク制約の投資における株式と債券の選択問題

宮　崎　浩　一†

本稿では，長期的リスクを，運用利回り受取期間において予定利率を下回る確率と定義したうえで，長期的リスク制約下における債券と株式の選択モデルを提案する．また，実務における大規模ポートフォリオ運用へ適用する指針も合わせて示す．選択モデルでは，大偏差原理において重要な役割を果たすレート関数を用いることにより，数理計画問題としての定式化を容易にした．数値例によれば，株式リターンが年率 7〜8%程度の水準では，長期的リスクをあまり許容することの出来ない投資家にとっては債券を選択するのが良いこと，資産選択における高次モーメントの影響は大きくはないが相応にあること等がわかった．

Selection Problem Between Equity and Bond in the Investment with the Long-term Risk Constraints

Koichi Miyazaki†

In this article, I define the long-term risk as the probability that the actual investment return under-performs the guaranteed rate return and provide the selection model between equity and bond under the risk. And also I show the route how to apply the model to the actual large portfolio management. In the model, I adopt the rate function which plays the important role in the large deviation principle to formulate the mathematical programming easily. Numerical example indicates that the investor who cannot allow large long-term risk should select bond when the annual equity return stays approximately 7-8% level and that the effect of higher moments in the portfolio selection is relatively small but cannot be ignored.

1. はじめに

日本における生命保険業は，1990 年代以降の低金利による逆鞘（運用利回りの予定利率割れ）問題に悩まされている．この背景には，予定利率として長期的な負債コストが定められているにもかかわらず，運用成績がインデックスを基準にして短期的に計量されること，長期的な運用利回りが予定利率を下回る可能性について生命保険会社が正確に把握していなかったことが考えられる．

本稿では，長期的リスクを，運用利回りが，その受取期間において予定利率を下回る確率と定義する．そのようなリスクが大きければ，長期的に逆鞘問題が発生する可能性が高くなる．本稿の目的は，長期的リスクをごく僅かな水準に留めるという制約条件の下で，(1) 予定利率はどのように設定されるべきであるか？(2) 債券と株式の選択をどのように行なうべきか？(3) どのようなリターン特性を持つ株式を選択すべきか？の 3 つの問いに相応の解答を与えるような株式と債券の資産選択モデルを提案することである．これを実務の大規模ポートフォリオ運用へどのように接続すれば良いかについての指針も示す．

† 電気通信大学
The University of Electro-Communications, Department of Systems Engineering

2. 長期的リスク制約の投資の枠組みと株式リターン分布

長期的リスク制約

例えば，5 年後から 10 年後までの運用利回り受取り期間において，当初運用利回りとして設定された利率（これを基準に個人は運用契約を行なうか否かを決定するものとし，以下予定利率と呼ぶ）を下回るリスクは殆ど許容できないという制約である．一方，資金を払い込んでから 5 年間は，日々の価格変動リスクに関する制約は無い．

株式リターンのプロセス (1) 式と株式の予定利率プロセス (2) 式との関係

$$\frac{dS}{S} = \mu(\cdot)\,dt + \sigma(\cdot)\,dL_t \tag{1}$$

$$\frac{d\tilde{S}}{\tilde{S}} = \tilde{\mu}_S dt \tag{2}$$

ここで，$\mu(\cdot)$，$\sigma(\cdot)$ は，それぞれ，株式リターンプロセスのドリフト項，拡散係数である．また，dL_t はレビ運動である．通常，株価リターンプロセスとしては Black and Sholes[3] において取り上げられたようなウイナープロセスが広く用いられ，その場合 $\mu(\cdot)$，$\sigma(\cdot)$，dB_t となり，単位時間におけるリターンの分布は，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うものとなる．しかし，現実の株

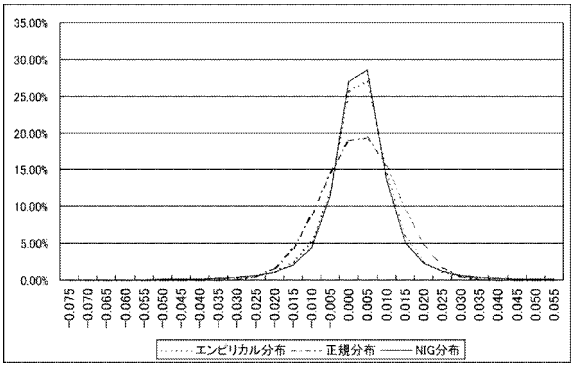

図 1　TOPIX 日次リターンの分布
Fig. 1　Distribution of Daily TOPIX Return

価リターンには，歪みや尖りが正規分布とはことなったものであるという報告が古くから数多くなされ，近年，Barndorff-Nielsen[1)2)] によって NIG プロセスが導入され，単位時間における株式リターンの分布は，$\mu, \alpha, \beta, \delta$ の 4 つのパラメータを用いて表現される次の確率密度関数に従う．

$$f(x;\mu,\alpha,\beta,\delta) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)\right)\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}$$

ここで，パラメータの範囲は，$\delta > 0$，$|\beta| \leq \alpha$.

現実に日次株式リターンがどのような分布に従っているかを確認する．1949 年 5 月 23 日から 2002 年 7 月 16 日までの日次 TOPIX データから日次リターンを求めた．このエンピリカルな日次リターン分布，それを正規分布でフィットした分布，NIG 分布でフィットした分布を **図 1** に示した．正規分布はエンピリカルな分布からかけ離れており，NIG 分布と比較して相当フィッテイングの精度が劣ることが見て取れる．

株式の予定利率 $\tilde{\mu}_S$ は，長期的リスクとして許容できる僅かなリスク水準 $\bar{\alpha}$ に基づいて決定される．5 年後から 10 年後までの各時点 t において株価リターンのサンプルパスが $\tilde{\mu}t$ を下回る可能性を $\bar{\alpha}_t$ とするときに，(3) の制約の下で，$\tilde{\mu}_S$ を最大にするように株式予定利率は決定される．

$$\frac{1}{5}\int_5^{10}\bar{\alpha}_t dt \leq \bar{\alpha} \tag{3}$$

(3) の不等式は，簡単に見えるが実際に数理計画問題として定式化しようとすると大変である．5 年後から 10 年後までの間に十分多くの時点を取り，各時点において $\tilde{\mu}_S$ の関数として与えられる $\bar{\alpha}_t$ を求めなければならないからである．株式リターンプロセスがウイナープロセスに従う場合には各時点における分布が正規分布に従うため，この手続きは多少の労力を払えば可能だが，NIG 分布に従う場合には直接的に数理計画問題として定式化するのは困難であり何らかの工夫が必要になる．

3.　資産選択モデル

定理 長期的リスク制約の投資における資産選択モデル

時刻 0 時点で投資を行ない，運用利回り受取り期間 T_S から T_E において，長期的リスクを平均的に $\bar{\alpha}$ まで許容可能な場合には，株式予定利率 $\tilde{\mu}_S$ が債券リターン μ_B を上回る場合に株式を選択，下回る場合に債券を選択すればよい．

正規分布：

$$\tilde{\mu}_S = \mu_S - \sqrt{2\tilde{\alpha}}\sigma_S$$

NIG 分布：

$$\tilde{\mu}_S = \mu + \frac{\beta\left(\tilde{\alpha}+\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)-\alpha\sqrt{\tilde{\alpha}\left(\tilde{\alpha}+2\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}}{\alpha^2-\beta^2}$$

ここで，$\tilde{\alpha}$ は，

$$\frac{1}{T_E-T_S}\int_{T_S}^{T_E} e^{-I(\tilde{z})t}dt = \bar{\alpha}$$

を満たす $I(\hat{z})$ の値である．

補題

株式及び債券への投資額の割合がそれぞれ，w_S，w_B であり，株式リターンが正規分布，NIG 分布に従うとき，ポートフォリオリターンのレート関数は，それぞれ次で与えられる．

正規分布:

$$I(z) = \frac{(z-(\mu_B w_B+\mu_S w_S))^2}{2w_S^2\sigma_S^2}$$

NIG 分布：

$$I(z) = \frac{\beta}{w_S}((\mu_B w_B+\mu w_S)-z) - \delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2} + \alpha\sqrt{(\delta w_S)^2+((\mu_B w_B+\mu w_S)-z)^2}$$

4.　数　値　例

1949 年 5 月 23 日から 2002 年 7 月 16 日までの日次 TOPIX データから日次リターンを求めた．この日次リターンの分布を $f(x;\mu,\alpha,\beta,\delta)$ が最も良くフィットするようにパラメータ $\mu, \alpha, \beta, \delta$ をモーメント法により推定する．

NIG 分布に基づく 4 次までのモーメント

$$\bar{\mu} = \mu + \delta\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-1/2},$$

$$\sigma^2 = \alpha^2\delta\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-3/2},$$

$$s = \frac{3\beta}{\sigma(\alpha^2-\beta^2)},$$

$$\kappa = \frac{3\left(\alpha^2+4\beta^2\right)}{\sigma^2(\alpha^2-\beta^2)^2}+3$$

表 1　NIG 分布を仮定した予定利率（年率表示）
Table 1　Estimated Guaranteed Rate Based on NIG Distribution

受取期間	0.10%	0.25%	0.50%	1%	5%	10%
2-3Y	-30.0%	-27.2%	-25.0%	-22.6%	-16.3%	-13.2%
3-5Y	-22.2%	-19.9%	-18.1%	-16.2%	-11.2%	-8.7%
5-10Y	-14.5%	-12.7%	-11.3%	-9.9%	-6.1%	-4.2%

ここで，$\bar{\mu}, \sigma^2, s, \kappa$ は，それぞれ NIG 分布に基づく平均，分散，歪度，尖度である．上記の期間における日次 TOPIX リターンのエンピリカルな平均，分散，歪度，尖度は，それぞれ，0.000341，0.000100，-0.106089，14.530633 である．これらの値に一致するような 4 つのパラメータ $\mu, \alpha, \beta, \delta$ の値は，それぞれ，0.0004332，51.094153，-0.922229，0.0050996 となった．

TOPIX に投資する場合のリスクリターンに関する数値例を紹介する．長期的リスクの水準としては，0.1%，0.25%，0.5%，1%，5%，10%とし，運用契約としては，資金払込後，2 年後から 3 年後，3 年後から 5 年後，5 年後から 10 年後，にかけて運用利回りを受取るような 3 つの運用契約を取り上げる．

表 1 には，TOPIX リターンの分布として NIG 分布を仮定した場合の予定利率（年率表示）を示した．つまり，この水準よりも債券の確定的なリターンが低ければ株式に投資することになる．表 1 をみると，全ての部分がマイナスのリターンとなっており，長期的リスクが 10%以下しか許容することが出来ない場合には，債券の確定的なリターンがマイナスでなければ債券へ投資するのが良いことになる．この結果が示唆することは，長期的リスクが 10%以下しかとれない場合には，5 年後から 10 年後にかけて運用利回りを受取るような長期の投資においても株式には魅力が無いということである．

次に，ある長期的リスク水準の下で，投資におけるリターンを最大にするような株式ポートフォリオはどのような特性を持つものであるかを明らかにする．Konno and Suzuki[4] では，平均，分散をそれぞれ一定水準に制約した上で，歪度を最大にする平均・分散・歪度モデルを提案し，具体的な最適化のアルゴリズムを与えている．平均・分散が一定であれば歪度は大きいほど良いが，分散が小さく歪度も小さい場合と分散が大きく歪度も大きい場合とでどちらがよい投資となるかの判断は難しい．ここでは，リターンの平均と尖度，予定利率を一定に保ち，標準偏差と歪度のトレードオフの関係を横軸に標準偏差，縦軸に歪度を取り**図 2** に示した．標準偏差の変化に対して歪度は大きく変化し，予定利率決定においては，標準偏差の方が歪度よりも大きく影響していることがわかる．

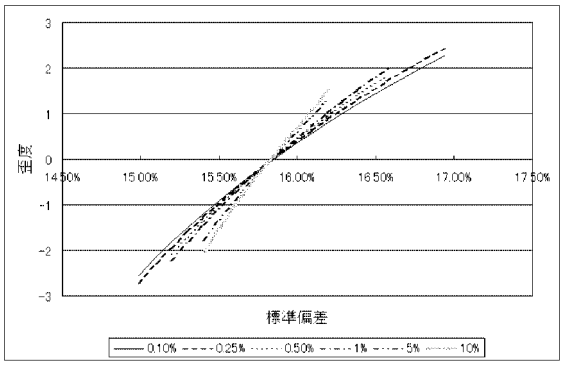

図 2　標準偏差と歪度のトレードオフ
Fig. 2　Trade Off Between Standard Deviation and Skewness

5.　モデルの実務への適用法

5.1　最適ポートフォリオが株式又は債券から構成される場合

(1) 株式リターンが正規分布に従う場合

実務上のモデルとして大規模な平均分散モデルを想定する．まず，この平均分散モデルを用いて，x 軸，y 軸にそれぞれ，株式ポートフォリオリターンの標準偏差，平均をとり，有効的フロンティアを描く．次に，長期的リスク制約の投資における資産選択モデルを適用する．$\mu_S = y$，$\sigma_S = x$ とおくと，$y = \sqrt{2\tilde{\alpha}}x + \tilde{\mu}_S$（$\tilde{\mu}_S$ は未定）であるから，この直線と有効的フロンティアが接するところが最適な株式ポートフォリオ（以下，長期的リスク接点ポートフォリオと呼ぶ）となり，そのときの $\tilde{\mu}_S$ がターゲットレートとなる．もし，このターゲットレートが債券リターン μ_B より低いなら，全額債券へ投資することになる．

(2) 株式リターンが NIG 分布に従う場合

厳密に最適ポートフォリオを構築するためには，多変量 NIG 分布からスタートして議論していかなければならないが，対象株式数が 3 つを超える程度でも多変量 NIG 分布に基づく最適化は極めて困難になるため，ここでは，2 章で示した 1 変数 NIG 分布を用いて，実務上問題無いと思われる程度の最適ポートフォリオを構築する方法を提案する．数値例において確認した高次モーメントが予定利率に与える影響が小さかったことから判断して，株式リターンが NIG 分布に従う場合でも長期的リスク接点ポートフォリオは，(1) で求めたものから大きくは乖離しないことを利用する．

最適ポートフォリオ構築の手順

手続 1 (1) における長期的リスク接点ポートフォリオを与えるポートフォリオの各資産ウエートを用いて各株式のヒストリカルリターンからポートフォリオのヒストリカルリターンを求める．それが，NIG 分布に従うと仮定して $\mu, \alpha, \beta, \delta$ を推定し，NIG 分布に基づき $\tilde{\mu}_S$ を求める．

手続 2 次に各資産のウエートを (1) における長期的リスク接点ポートフォリオからごく僅かずらし（総和が 1 となるようなウエートに関するメッシュを作る），手続 1 と同様 $\tilde{\mu}_S$ を求める．

手続 3 (1) における長期的リスク接点ポートフォリオよりも僅かに小さい，又は大きい標準偏差をもつところの有効的フロンティア上のポートフォリオウエイトを用いて手続 1，2 と同様に $\tilde{\mu}_S$ を求める．

手続 4 手続 1〜手続 3 までで得られた $\tilde{\mu}_S$ のなかで最大となるものを与える各資産ウエートが NIG 分布を仮定した場合の長期的リスク接点ポートフォリオとなる．

5.2 最適ポートフォリオを株式と債券から構成する場合

本稿のアプローチに基づけは，基本的に最適ポートフォリオは株式又は債券から構築される．現実的には，将来の株式リターンの水準は未知であるから，これまで議論していたように株式リターンのモーメントを確定的に与えることは出来ない．ここでは，実務上の利便性を考慮した構成法として，将来の株式リターンの平均値を確率的に与え，他のモーメントに関してはヒストリカルリターンから求めたものを利用するものを提案する．説明を明確にするため，構成法を債券と TOPIX の 2 資産の場合に示すが，上記の手続きを経れば，多数株式から成るポートフォリオ構築へも拡張可能である．

最適ポートフォリオ構築の手順

手続 1 各金融機関やシンクタンクが発表する TOPIX の長期予想などから，長期的な TOPIX リターンの分布を作成する．例えば TOPIX リターン予想を大きい順に $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_n$ とし，そのような予想をした金融機関やシンクタンクの割合を $p_1, \ldots, p_n$ とする．

手続 2 各 TOPIX リターン $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_n$ に基づき，$\tilde{\mu}_{S,1}, \ldots, \tilde{\mu}_{S,n}$ を求める．これらと債券リターン μ_B との大小関係を比べる．例えば，$\tilde{\mu}_{S,i} \geq \mu_B$，$\tilde{\mu}_{S,i+1} < \mu_B$ であるなら，株式のウエートは，$\sum_{k=1}^{i} p_k$，債券のウエートは，$1 - \sum_{k=1}^{i} p_k$ となる．また，この場合の予定利率は，$\sum_{k=1}^{i} p_k \tilde{\mu}_{S,k} + \left(1 - \sum_{k=1}^{i} p_k\right) \mu_B$ となる．

6. まとめと結語

日本における生命保険業が逆鞘問題に悩まされていることや個人投資家の資金が株式市場に流入してこない昨今の状況を踏まえ，本稿では，長期的リスク制約の投資における資産選択モデルを提案した．モデルに基づく数値例によれば，株式リターンが年率 7〜8%程度の水準では長期的リスクをあまり許容することの出来ない投資家にとっては，債券を選択するのが良いことがわかった．また，長期的リスクの水準が小さく，運用利回りを受取り時期が早い契約では，歪度などの高次モーメントの影響を見過ごすわけにはいかず，株式リターンの分布として NIG 分布等の指数型分布族を採用することの意義が確認された．これらの分析を踏まえて，このモデルを実務に適用する指針も示した．

本稿で提案した長期的リスク制約の投資が実務で採用され，各投資家が各自の負債にマッチしたリスクリターン特性をもつポートフォリオを構築するうえで，少しでも役にたつことを願う．

付録　レート関数の導出

株式リターンが NIG 分布に従う場合

債券と株式をそれぞれウエート w_B、w_S（但し、$w_B + w_S = 1$）で保有した場合のポートフォリオリターンの積率母関数 $\varphi_P(t)$ は, 次で表される．

$$\varphi(t) = \exp\left(\left(\mu_B w_B + \mu w_S\right) t + \delta\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + w_S t)^2}\right)\right)$$

よって，

$$I(z) = \underset{t}{Sup}\left(\left(z - (\mu_B w_B + \mu w_S)\right) t - \delta\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + w_S t)^2}\right)\right)$$

ここで，$\psi(t) = zt - \log\varphi(t)$ とおくと，

$$\psi'(t) = z - (\mu_B w_B + \mu w_S) - \frac{\delta(\beta + w_S t) w_S}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + w_S t)^2}}$$

$\psi'(t) = 0$ を解いて，

$$t^* = -\frac{\beta}{w_S} - \frac{\alpha/w_S\left((\mu_B w_B + \mu w_S) - z\right)}{\sqrt{(\delta w_S)^2 + \left((\mu_B w_B + \mu w_S) - z\right)^2}}$$

よって，レート関数は，

$$I(z) = \psi(t^*) = \frac{\beta}{w_S}\left((\mu_B w_B + \mu w_S) - z\right) - \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha\sqrt{(\delta w_S)^2 + \left((\mu_B w_B + \mu w_S) - z\right)^2}$$

となる．

参　考　文　献

1) Barndorff-Nielsen, O.E. [1998], “Processes of normal inverse Gaussian type” Finance & Stochastics 2, pp. 41-68.
2) Barndorff-Nielsen, O.E., T. Mikosch, and S.I. Resnick. [2001], “Levy Processes Theory and Applications” Birkhauser.
3) Black, F., and M. Sholes. [1973], “The Pricing of Options and Corporate Liabilities.” Journal of Poltical Economy, 81 (May), pp. 637-654.
4) Konno, H. and K. Suzuki. [1995], “A Mean-variance-skewness portfolio optimization model.” Journal of the Operations Research Society of Japan, 38, No2, pp. 173-187.