数理モデル化と問題解決 43－4
（２００３．３．３）

ハミルトニアン・アルゴリズムによる楽音合成

大矢 健一

国立長野工業高等専門学校 電子情報工学科

E-mail: ohya@ei.nagano-nct.ac.jp

本稿では、ハミルトニアン・アルゴリズム (HA) を用いた新しい楽音合成技術について紹介する。HA は、最適化問題において解を探索する新たなアルゴリズムである。「ハミルトニアン・アルゴリズムによる楽音合成」という手法においては、「従来の力学系にあるような極小解にトラップされない」という HA の特徴を用い、1 つの楽音波形から他の楽音波形へと移りゆく性質を積極的に利用する。この効果は、従来の力学系モデルからは得られないものであり、HA ならではの全く新しい波形を生じさせることができる。
さらに、HA を用いた加算合成・再合成の手法についても紹介する。

Hamiltonian Algorithm Sound Synthesis

Ken'ichi OHYA

Dept. of Electronics and Computer Science,
Nagano National College of Technology

716 Tokuma, Nagano City, Nagano 381-8550, JAPAN

E-mail: ohya@ei.nagano-nct.ac.jp

This paper introduces a new sound synthesis technique using Hamiltonian Algorithm. Hamiltonian Algorithm (HA) is a new algorithm for searching solutions in optimization problems. "Hamiltonian Algorithm Sound Synthesis" utilizes this phase transition effect in HA to produce a waveform of sound which moves from one waveform to another waveform. Because of this transition effect, totally a new waveform of a sound is obtained, compared to a waveform obtained by classic analytical dynamics.
Furthermore, additive synthesis and resynthesis technique using HA is also introduced.

1 はじめに

楽音合成という分野は、コンピュータミュージック研究の中で、常に主要なテーマであった。楽音合成の歴史は、初期のコンピュータの歴史にまでさかのぼる。コンピュータを用いた最初の楽音合成の実験は、ベル研においてローズらにより 1957 年に始まった [3]。それは、真空管による巨大な IBM 704 型コンピュータであった。

それ以来、世界中の研究者の間で、さまざまな楽音合成モデルが提案されて研究されてきた。筆者もまた、リカレントニューラルネットワークを用いた新しい楽音合成モデルを研究している [1]。楽音合成の歴史の中で、最も有名なモデルの 1 つは、「周波数変調による楽音合成」（FM 合成）であろう。これは、スタンフォード大学のジョン・チョウニング博士によるものである。このモデルは、ヤマハにより、DX7 という機種のシンセサイザーに適用された、これは大変なヒットになり、音楽シーンを変えるとともに、1980 年代初期の最も有名なシンセサ

イザーとなった。FM 合成の他には、加算合成もまた、常に重要な地位を占めてきた。

その後、1990 年代になり、PCM を用いた技術が主流になっていった。この技術はメモリーを大量に消費するが、相対的にメモリーが安価になってしまうと楽音合成の主流になっていった。

しかしながら、PCM を用いた手法にも問題がある。1 つはユーザのエディット機能であり、もう 1 つは、どこか音が単調になってしまうというものである。この単調さは、サンプリングした音をループさせて使っていることに起因している。

本稿では、ハミルトニアン・アルゴリズムを用いた楽音合成を紹介するが、この技術により、「サンプルされた単調さ」から解放されることになる。この新しい技術はハミルトニアン・アルゴリズム (HA) [4] [5]、を用いており、これは、ハミルトニアンを用いた、最適化問題のための新しいアルゴリズムである。

HA は微分方程式により表現され、これらを数値的に解くことにより、音の波形が生成される。音の生成時間には制限はないため、ループというものが存在しない。

まず最初に、HA そのものについて簡単に紹介し、そのあと、HA を用いた楽音合成技術について述べる。

2 ハミルトニアン・アルゴリズム

ハミルトニアン・アルゴリズム (HA) とは、ハミルトニアンを用いた、最適問題を解くための新しいアルゴリズムである [5] [6]。

HA は、「意味空間」と「高次元空間」という言葉で説明される [6]。意味空間における解は非常に狭い範囲であり、よって、最小値を探すのが非常に困難になってしまう。

一方、HA に特有な高次元空間は仮想的な空間であり、余分な項を付加することにより生じる空間である。

また、HA では、解析力学に登場するハミルトニアンを用いる。しかしながら、HA では、解析力学とは違い、以下の式 1に示すように、γ という項が存在している。

$$H[q_i, p_i] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^{2\gamma} + V[q_i] \tag{1}$$

$\gamma = 1$ という条件においては、解析力学のハミルトニアンと一致する。この、拡張されたハミルトニアンの式を用いることにより、ある場合において、最適化問題を解くことができることが示されている [4] [5]。

解析力学の場合と同様に、ハミルトニアンから得られる運動方程式は以下のように記述される。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2}$$

さて、ここで、期待値 τ についてもふれておくと、τ は、位相空間内の点が位相空間内の体積 $\prod$ に存在する確率であり、τ は以下のような式で得られる [4]。

$$\begin{aligned} \tau &\propto \delta(E - H[q_i, p_i]) \prod_{i=1}^{N} \Delta q_i \prod_{i=1}^{N} \Delta p_i \\ &= M(N)(E - V[q_i])^{N/2\gamma - 1} \prod_{i=1}^{N} \Delta q_i \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、$M(N)$ は Nに依存する正の定数である (N: 変数 q_i の数)。

HA におけるハミルトニアンを使った力学系においては、変数 q_i が系を動くのにつれて、τ は自然に増大していく。これが意味しているのは、位相空間内の点は、最小値を探索しているということである。N が 2 よりかなり大きいか、あるいは、γ が非常に小さいとき、解の場所へいく確率は非常に高くなるが、これは γ を用いている利点である。

3 ハミルトニアン・アルゴリズムによる楽音合成

HA による楽音合成とは、HA を用いて楽音を生成するための全く新しいアルゴリズムである。

以下、HA を用いた楽音合成について、2 つの方法を紹介する。

3.1 二重リングポテンシャルを用いた楽音合成の例

まず、最初の例では、ポテンシャルの曲線として以下のようにしてみる。

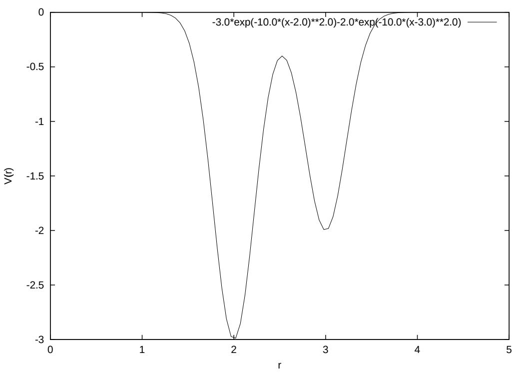

図 1: $V(r)$ のポテンシャル曲線。2 つの谷がある.

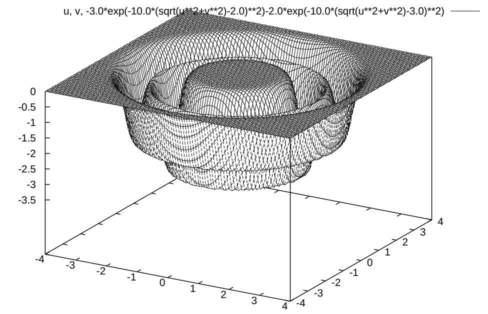

図 2: 図 1 のポテンシャル曲線を 3 次元表示したもの

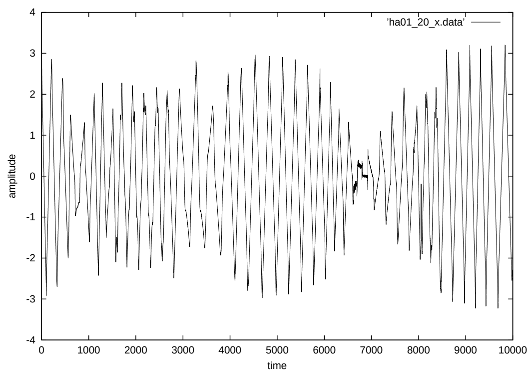

図 3: ハミルトニアン・アルゴリズムによって生成された波形の例

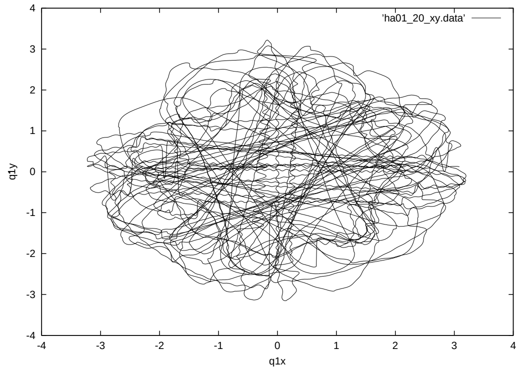

図 4: 図 3 の位相空間の軌跡

$$\begin{aligned} V(q_{ix}, q_{iy}) \quad &= -3e^{-10(\sqrt{(q_{ix}^2+q_{iy}^2)}-2)^2} \\ &\quad -2e^{-10(\sqrt{(q_{ix}^2+q_{iy}^2)}-3)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

これは、図 1に示されるように、r軸方向において 2 つの極小を持っており、横軸は原点からの距離をあらわす。図 2は、図 1を 3D 表示したものであり、2 つの谷状のリングがよくわかる。内側のリングは外側のリングより深くなっている。

ここで、2 体からなる系を考える。すなわち、この位相空間上において、2 つの点が動きまわる。初期値を与えられることにより、2 つの点の動きは決定される。

もし、古典力学系であれば、エネルギーが充分小さいときには、1 つの谷から別の谷への遷移は考えられない。しかし、HA においては、混合作用により、この遷移が起きる。

HA 楽音合成の最初の例は、この遷移を利用したものあり、ある波形から別の波形へと遷移する。この効果により、1 つのポテンシャルのみをもつ古典力学系では得られない波形を生成することが可能となる。というのは、1 つのリングのみの古典力学系の場合では、初期値をうまく選ぶことにより、サイン波に似た波形しか生じないからである。

この系のハミルトニアンは以下のように示される。

$$H = \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{2}(p_{ix}^2+p_{iy}^2)^{\gamma}+V(q_{ix}, q_{iy}) \right\}+V_{12}, \tag{5}$$

$$V_{12} = a\left\{ p_{1x}^{\gamma}p_{2x}^{\gamma} + p_{1y}^{\gamma}p_{2y}^{\gamma} \right\}, \tag{6}$$

ここで、V_{12} は混合効果のための項である。

さて、座標と運動量との初期値をいろいろと与えることにより、2 つの点は位相空間上を動きまわる。

図 4 は、1 つの位相点の軌跡の例である。この図からわかるように、1 つのポテンシャルに束縛されずに動いていることがわかるが、これが混合項の効果であり、これを利用して複雑な波形を得ている。

さて、具体的に波形を得るには、射影を用いる。図 3 は、図 4 の、横軸への射影である。単調とはほど遠い波形が得られることもわかるし、また、方程式を解きさえすればいいので、時間的な制約もない。

3.2 HA を用いた加算合成と再合成の例

以下、HA を用いての加算合成および再合成について紹介する。

加算合成もまた楽音合成技術の 1 つである。歴史は古いが、原理は非常に簡単で、いまだに電子楽器では広く使われている。

加算合成は、フーリエ級数の原理からきている。定常状態における楽器の音（たとえば、フルートの音のロングトーンなど）は、整数次倍音からなるフーリエ級数で近似される。また、たとえば、古いアナログシンセなどで用いられていたのこぎり波は、以下の式で記述される。

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\ &= 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \cdots) \end{aligned} \tag{7}$$

この式をみるとわかるように、基本波の上に整数次の倍音が積み重なっているのがわかる。

さて、以下の簡単な例について考えてみることにする。

$$f(t) = \sin t \tag{8}$$

これが解となるようなハミルトニアンを構成するのは簡単であり、よく知られているように以下のようにすればよい。

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 \tag{9}$$

さて、さきほどとはちょっと違う以下の例について考えてみる。

$$f(t) = \sin t + \sin 3t \tag{10}$$

項が 2 つになったことにより、これを得るためのハミルトニアンはたちまち用意ではなくなる。すなわち、HA を使うことができないように思えるが、ここで発想を転換し、以下のような 2 体からなる系を考える。すなわち、$\sin t$ と $\sin 3t$ とを、重ね合わせとして解釈する。

$$H = \frac{1}{2}(p_0^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}(q_0^2 + 9q_1^2) \tag{11}$$

これを解くことにより、ただちに以下が得られる。

$$q_0(t) = \sin t \tag{12}$$

$$q_1(t) = \sin 3t \tag{13}$$

HA においては、式 1 における N が大きな数である必要があるが、この系を用いることにより、自動的に満たされていることもわかる。

さて、式 12 と式 13 が得られたところで、それを合成し、式 10を得ることができる。

このように、2 つの倍音からなる加算合成を HA を用いて再合成するには、2 体の系を考えればよい。同じようにして、複数の倍音からなるときには、N 体の系を考えていけばよいのである。

また、上記の数式には記していないが、適度に混合項を用いることにより、ある特定の倍音同士を結合させることが可能であり、たとえば、高調波の倍音のみに効果を深くかけることも可能である。

4 まとめ

HA を用いた新しい楽音合成技術を紹介した。これにより、非単調な波形が生成されることがわかった。また、HA を用いた加算合成と再合成についても紹介し、倍音の数が多くても対応できることを示した。

参考文献

[1] Ohya, K.: Sound Variations by Recurrent Neural Network Synthesis, *Proceedings of the 1998 International Computer Music Conference*, pp. 280–283 (1998).

[2] Ohya, K. and Shinjo, K.: Mathematical Models used for Sound Synthesis, *Proc. of the Second ISAAC Congress*, pp. 367-373 (2000).

[3] Roads, C.: *The Computer Music Tutorial*, MIT Press (1996).

[4] Shinjo, K. and Sasada, T.: Hamiltonian Systems with Many Degrees of Freedom: Asymmetric Motion and Intensity of Motion in Phase Space, *Phys. Rev.*, Vol. E54, p.4686 (1996).

[5] Shinjo, K., Shimogawa, S., Yamada, J. and Oida, K.: Strategy of Designing Routing Algorithms Based on Ideal Routings, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 10, pp. 1–32 (1999).

[6] 新上和正: 「高次元アルゴリズム」, 月刊誌 *bit*, 6 月号. pp. 2–8 (1999).