

選択グラフの性質とフローショップスケジューリング問題

榊原 静†

中森眞理雄‡

本論文は、通常のフローショップスケジューリング問題にいくつかの条件を付加した特殊な問題のためのアルゴリズムを考案するために、この問題を表現する選択グラフの性質を調べることを目的としている。

特に、いくつかの選択辺が固定されたときのクリティカルパスの長さの下界値に対する理論的見積りを従来のものより改善した。これにより、分枝限定法によるアルゴリズムの計算時間を短縮することが可能となった。また、各機械でのジョブの作業順序を表現した順番保持表を提案した。従来の手法では、ジョブの間に空けるべき時間の存在する問題や、ジョブごとの実行できない条件がある問題では余分な点や辺の追加が避けられなかったが、順番保持表を利用すると、余分な点や辺の追加を避け、選択グラフとして表現する利点を生かすことができる。

Properties of a Disjunctive Graph and flow Shop Scheduling

Shizu Sakakibara†

Mario Nakamori‡

The aim of the present paper is to investigate the properties of the disjunctive graph that represents special kinds of flow shop scheduling problems. We propose a new theoretical lower bound on the length of the critical path where only some of the disjunctive edges are fixed and show that our new bound is better than those already known. This enables us to design a new efficient branch and bound algorithm for the flow shop problems. We also propose the order presentation table, which is effective for special flow shop problems where certain pause is required between two jobs or some jobs are forbidden to execute in some specified time intervals, in order to make the disjunctive graph small and, thus, make the computational time small.

1 まえがき

選択グラフまたは離接グラフ (disjunctive graph) とは、点、および、点同士を結ぶ有向辺と無向辺から成るグラフである。有向辺を連接辺 (conjunctive arc)、無向辺を選択辺または離接辺 (disjunctive arc) という。選択グラフは、E. Balas によって、ジョブショップスケジューリング問題の分枝限定法による解法の提案と共に導入され [1]、スケジューリング問題などの順序づけ問題の記述に利用されている。

特に、いくつかの品物をそれぞれ機械で加工する問題で、どの品物においても加工する機械の順序が

同じスケジューリング問題をフローショップスケジューリング問題またはフローショップ問題という。

スケジューリング問題に対しては、分枝限定法による Balas の古典的な解法が、今日もなお、基本的価値を有している。本論文では、分枝限定法を用いて最適解を求めるアルゴリズムを対象とする。

Balas による分枝限定法は、一般のスケジューリング問題にそのままの形では用いることができない。本論文では、特殊なフローショップ問題を表す選択グラフの性質を調べ、その性質を利用して、より性能の良いアルゴリズムを導くことを試みる。また、分枝限定法によって原問題を子問題に分解していく操作を記録するのに便利なデータ構造を提案する。

2 スケジューリング問題における選択グラフ

2.1 スケジューリング問題を記述する選択グラフ

Balas [1] では、M 台の相異なる機械で、I 個の品物を加工する問題を取り上げている。機械が品物を加工する

†東京農工大学大学院工学研究科情報コミュニケーション工学専攻

Department of Computer Science, Graduate School, Tokyo A & T University

‡東京農工大学工学部情報コミュニケーション工学科
Department of Computer Science, Tokyo A & T University

ことをジョブとよぶ。各機械は一度に一つのジョブしか行なうことができず、各品物は一度に一つのジョブにおいてしか加工されることはない。したがって、 $M \times I$ 個のジョブがある。目標（目的関数）は、最初のジョブの開始から最後のジョブの終了までの経過時間を最小化することである。

Balas [1] では、スケジューリング問題を選択グラフ（離接グラフ）で記述している。選択グラフとはダミー点 “s” と “t”；

ジョブを表す点 $O_{1,1}, O_{1,2}, \dots, O_{M,I}$ ；

同じ品物に対する連続するジョブを結ぶ接続辺；

同じ機械による異なる品物のジョブを結ぶ離接辺対から成るグラフである（機械 m による品物 i のジョブを $O_{m,i}$ と記す）（図 1）。各機械は I 個の品物を 1 度ずつ加工するから、一つの機械による I 個のジョブの間には全部で $I(I-1)$ 個の離接辺が存在する。また、点 “s” から各品物における最初のジョブへ向けて接続辺を設け、各品物における最後のジョブから点 “t” へ向けて接続辺を設ける。

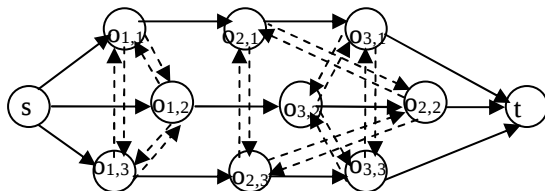


図 1 ジョブショップ問題を表す選択グラフの例

選択グラフにおいて、離接辺は必ず対で現れる。離接辺対から一つずつ選び、この選び方を F とする。

選び方 F でジョブ i から出る接続辺と離接辺にジョブ i の処理時間を長さとして与えることにすれば、有向閉路が生じない限り、実行可能なジョブの順序が定まり、すべてのジョブが終了するまでの最小時間 $d[F]$ を求めることができる（これは古典的な日程計画問題であり、 $d[F]$ は点 “s” から点 “t” への最長経路——クリティカルパスという——の長さに等しい）。

$$d[\hat{F}] = \min d[F]$$

によって定義される $d[\hat{F}]$ がスケジューリング問題

の最適解である（上式で F は、有向閉路を生じないあらゆる離接辺の選び方の範囲を動く）。

2.2 Balas の分枝限定法

ジョブショップスケジューリング問題に対する Balas のアルゴリズムは、原理的には、あらゆる離接辺の選び方を生成して、有向閉路を生じないものに対してクリティカルパスを求め、クリティカルパス長の最も小さい選び方を最適解とするというものである。

あらゆる選び方を 1 度ずつ生成するために、次の再帰的方法を用いる。

各離接辺は自由または固定の属性をもつものとし、まず、実行可能な（有向閉路のない）初期解 F_0 を何らかの方法で作出し、すべての離接辺を自由とする。

一般に解 F_r が得られているとして、 F_r における自由な離接辺が、 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_l, j_l)$ であるとき、

- 1) 離接辺 (i_1, j_1) を対の離接辺 (j_1, i_1) に固定し、離接辺 $(i_2, j_2), \dots, (i_l, j_l)$ を自由とする。
- 2) 離接辺 (i_1, j_1) を固定し、離接辺 (i_2, j_2) を対の離接辺 (j_2, i_2) に固定し、離接辺 $(i_3, j_3), \dots, (i_l, j_l)$ を自由とする。

.....

- l) $(i_1, j_1), \dots, (i_{l-1}, j_{l-1})$ を固定し、 (j_l, i_l) を固定する。

の l 個の子を作り、各子から再帰的に子を作り出す。

すべての選び方の数は極めて大きいので、各種のテストを用いて、一部の選び方だけの生成にとどめる。たとえば Balas は次の方法を提案している。

- (i) F_r の接続辺と固定された離接辺のみのグラフにおけるクリティカルパスの長さが既に得られている最良の解以上なら、 F_r の子を作り出さない。
- (ii) F_r におけるクリティカルパスに含まれない自由な離接辺は逆転しない。

この手順により次々と生成されるクリティカルパスの中で、今までより小さいものが作られる度に、それを暫定解 F^* として記録する。

以上の分枝限定法のアルゴリズムは次の再帰的関数 b_and_b によって実行できる。

$b_and_b(F_r)$

```

v(Fi)を計算;
if ( v(Fi) < v*){
    クリティカルパス d, 評価値, 分枝候補を算出;
    if( d < v*) 暫定解 F*と v*を更新;
    Fn=Fi;
    while(分枝の候補がある){
        (i, j)=最も評価値の良い分枝の候補;
        Fc=Fn;
        Fcに(j, i)を, Fnに(i, j)を追加;
        b_and_b (Fc);
    }
}

```

3 フローショップスケジューリング問題

フローショップスケジューリング問題とは、ジョブショップスケジューリング問題で、どの品物进行处理する機械の順序も同じ（簡単のために、機械 1, 2, ..., M の順とする）ものである（図 2）。

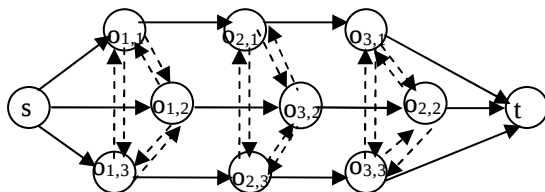


図 2 機械数 3, 品物数 3 の選択グラフの例

本論文では、本来のフローショップスケジューリング問題（これを(0)とする）に、次の(1), (2)の制約を加えた問題を取り上げる。

- (1) 問題(0)に加えて、同じ機械で行なわれるジョブの間に空けるべき時間が定められている問題。この時間を直前のジョブの時間に加えるという考え方もあり得るが、これでは、各ジョブの実行時間がジョブの順番に依存することになり、多くの先人が提案した諸手法が適用できない。
- (2) 問題(0)に加えて、各ジョブが実行できない時間帯が絶対時刻で定められている問題。

4 フローショップ問題に対する選択グラフの性質

フローショップスケジューリング問題では、次に述べる定理 1 が成立する（証明略）。

定理 1 各機械においてジョブの順序が決定済みのとき、クリティカルパスは各品物のジョブを少なくとも 1 つ含む。

Balas[1]による下界は、固定辺と選ばれた離接辺からなるグラフ D_L のクリティカルパス長である。グラフ D_L には向きが未定の離接辺が含まれていないため、ある品物のジョブをクリティカルパスが通過しない場合がある。定理 1 より、その品物のジョブの処理時間の最小値をクリティカルパス長に加えたものは下界となる。

Balas[1]による下界値を、定理 1 を用いて改善し、比較実験を行なった。データは[3]のものをを用い、品物数が 3, ..., 7 と機械数が 3, 4, 5 の組み合わせで実験した。実験環境 CPU 266MHz, メモリ 64MB である。結果を表 1, 2 に示す。

表 1 各下界値による分枝数

	本手法	Balas[1]	改善比
平均	8303.02	20652.68	2.66
最大	112877	273773	21.41
最小	16	19	1

表 2 各下界値による実行時間（秒）

	本手法	Balas[1]	改善比
平均	8.98	21.78	2.43
最大	137	311	2.27
最小	0.5	0.5	1

5 特殊なフローショップ問題の選択グラフの性質

筆者らは問題(1), (2)を目標としているが、Balas の解法[1]は選択グラフの 1 つの点から出るすべての辺の長さが同じである場合にしか使えない。問題(1)を解くために、選択グラフの各辺を作業時間に作業間の時間に加えた長さにとすると、グラフ D^* のクリティカルパスの長さはシステムの最大完了時間と、一般には、異なる

(図 3). そのために、離接辺の選び方を記述する別の方法を考えることにする.

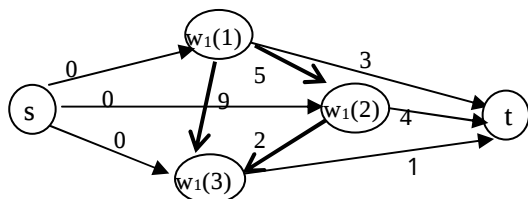


図 1 クリティカルパスとジョブの実行順序

図中の数字は離接辺の一方である太線の辺と接続辺の長さで、各ジョブの作業時間とジョブ間の時間の和を表す. 実行順序は $w_1(1), w_1(2), w_1(3)$ であるが、クリティカルパスは、 $w_1(1), w_1(3)$ を通過し、実際の処理時間が 8 であるのに 10 となる.

5.1 順番保持表

前述のとおり、フローショップ問題に対する選択グラフ D では、離接辺の選び方は、各機械における品物の順列によって完全に記述できる. そこで、選ばれた離接辺を記述する代わりに機械ごとに品物の順列を記述した表を用いることにし、これを順番表とよぶことにする. また、検索の便宜のために、各品物が各機械で何番目に実行されるジョブであるかを記述した番号表を併用することにする. この順番表と番号表の対を順番保持表とよぶ (図 4).

	機械 1	機械 2	機械 3		機械 1	機械 2	機械 3
1 番目のジョブ	1	2	3	品物 1	1	2	2
2 番目のジョブ	2	1	1	品物 2	2	1	3
3 番目のジョブ	3	3	2	品物 3	3	3	1
	順番表				番号表		

図 3 順番保持表の例 (機械数 3, 品物数 3)

順番保持表を用いることにより、問題(1)や問題(2)を Balas 流の選択グラフを用いる方法に比べ、離接辺を逆転したり、クリティカルパスとその長さを求めたりする手間が軽減される (図 5).

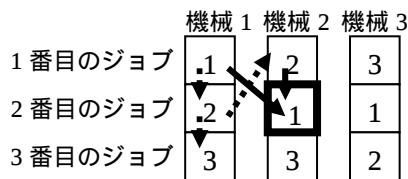


図 2 ジョブ $w_2(2)$ における実行時間の計算方法

機械 2 の 2 番目の作業は、品物 1 のジョブであり、機械 1 では 1 番目に実行される. 機械 1 で 1 番目のジョブと機械 2 で 1 番目のジョブの実行終了の遅いほうが、機械 2 で 2 番目のジョブの実行開始時間になる.

6 あとがき

フローショップスケジューリング問題を表現した選択グラフの性質から、Balas[1]の下界値の改善を試み、分枝限定法の効率を改善することができた.

また、特殊なフローショップスケジューリング問題を考えるために、選択グラフを、各機械での品物のジョブ順序による順番保持表で表現することを提案し、計算の効率が改善されることを示した.

参考文献

- [1] E.Balas, Machine sequencing via disjunctive graphs : an implicit enumeration algorithm, J. ORSA, 17, 941-957 (1969).
- [2] 中川: 鉄鋼業における離散事象システムの最適化, 室田 (編): 離散構造とアルゴリズム III, 近代科学社, 1994.
- [3] E.Demirkjol, S.Mehta, R.Uzsoy : Benchmarks for shop scheduling problem, European J. Operational Research, 109, 137-141 (1998).
- [4] 伊理: 線形計画法, 共立出版, 1986.
- [5] 田村, 村松: 最適化法, 共立出版, 2002.
- [6] 日本 OR 学会(編): OR 辞典 2000.
- [7] J.Btadewicz, E.Pesch, M.Sterna : The disjunctive graph machine representation of the job shop scheduling problem, European J. Operational Research, 127, 317-331 (2000)