

ウェーブレット解析と GARCH を用いた EVT による VaR 推定

藤原 賢一* 藤本 康孝

横浜国立大学

金融工学における従来の EVT(極値論)を用いた VaR(Value at Risk) 推定法では、観測期間の標本標準偏差を超えるヒストリカルデータを裾野分布とみなし、裾野分布を推定した後に VaR を推定している。従来の EVT モデルでは、裾野分布の開始点、つまり閾値に対してあまり言及していない。しかし、閾値を正しく推定することは、EVT における重要な 1 つの課題である。本研究では、収益率時系列にウェーブレット解析を適用し、解析後の時系列に GARCH を用いてボラティリティの推定を行う。推定したボラティリティを閾値として EVT による VaR 推定を行う。提案モデルは従来モデルに比べ VaR が小さく、また、二項検定をクリアする結果を示す。

Estimating VaR based on EVT used with GARCH and Wavelet analysis

Kenichi Fujiwara*, Yasutaka Fujimoto
Yokohama National University

Estimating VaR(Value at Risk) that is used with conventional EVT(Extreme Value Theory), historical data that exceeds the sample standard deviation at the observation period is considered to be the tail distribution. After the tail distribution is estimated, VaR is Estimated. For conventional EVT model, the beginning point of the tail distribution, in a word, the threshold is not so referred. However, it is one of important problem in EVT to estimate the threshold correctly. In this paper, the volatility is estimated by wavelet analysis applying to the profit margin time series, and using GARCH for the time series after wavelet analysis. The estimated volatility is assumed to be a threshold and VaR is estimated with EVT. VaR used with proposing EVT model is smaller than VaR used with conventional EVT, and showed the result of passing statistical binomial test so far.

1. はじめに

現在、金融市場におけるリスクのメジャーとして最も利用されているのは、VaR(Value at Risk)である。この VaR を正確に推定することは、マーケットリスク分析の研究における大きな課題の 1 つである。従来の VaR 推定法は、収益率分布を正規分布で近似し、値の推定を行っていた⁽¹⁾。

しかし、実際の収益率分布には fat-tail が存在し、裾野分布を重要とする VaR にとって正規分布近似を用いることは、リスク値の評価損に繋がる重大な欠陥である。そこで近年、裾野分布をモデル化する EVT を用いた VaR 推定に注目が集まっている⁽²⁾。

従来的一般パレート分布を用いた EVT では、閾値を観測したデータの標本標準偏差としていた。EVT における閾値決定は、重大な課題の 1 つであり、正確に推定する必要がある。本研究では、ウェーブレット解析を用いて時系列を分解し、GARCH を用いて分解後の時系列毎のボラティ

リティを推定する。推定したボラティリティを閾値とする。

2. ウェーブレット解析による時系列分解と GARCH への適用

この節では、ウェーブレット解析について説明し、例として TOPIX の収益率時系列に適用した結果について述べる。また、ウェーブレット解析後の時系列を GARCH に適用し、ボラティリティを推定した結果について説明する。

〈2・1〉 ウェーブレット解析

〈2・1・1〉 フィルタ ウェーブレット変換は、一種の線形フィルタリングである。ウェーブレット変換に用いるフィルタには、スケーリングフィルタとウェーブレットフィルタの 2 種類のフィルタが存在する。

本研究では、サポートが 2 の Haar ウェーブレットを用いた。Haar ウェーブレットフィルタは $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、Haar スケーリングフィルタ $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

〈2・1・2〉 離散ウェーブレット変換 (DWT) 離散ウェーブレット変換により、ウェーブレット係数とスケーリング係数が求まる。本研究では、離散ウェーブレット変換のアルゴリズムとして、ピラミッドアルゴリズムを用いた。以下に、ピラミッドアルゴリズムの説明をする。

原系列を $x = (x_1, \dots, x_N)$ とする。ただし、 N は 2 のべき乗の倍数である。ピラミッドアルゴリズムの第一段階では、ウェーブレットフィルタに通して、レベル 1 のウェーブレット係数 w_1 を得る。

$$w_{1,t} = \sum_{k=1}^L h_k x_{((2t-k) \bmod N)+1} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 N は原系列の長さ、 t は 1 から $N/2$ までの整数である。

同様に、レベル 1 のスケーリング係数は以下の式で求まる。

$$v_{1,t} = \sum_{k=1}^L g_k x_{((2t-k) \bmod N)+1} \dots \dots \dots (2)$$

フィルタを通す際に、データが 2 個ずつ進んでいくため、 w_1 と v_1 の長さは半分になる。つまり、ダウンサンプリングが生じる。

レベル i ($i \geq 2$) のウェーブレット係数とスケーリング係数は、レベル $i-1$ のスケーリング係数 v_{i-1} を用いて次式で求まる。

$$w_{i,t} = \sum_{k=1}^L h_k v_{i-1,((2t-k) \bmod N/2^{i-1})+1} \dots \dots \dots (3)$$

$$v_{i,t} = \sum_{k=1}^L g_k v_{i-1,((2t-k) \bmod N/2^{i-1})+1} \dots \dots \dots (4)$$

レベル i の w_i , v_i の長さは、ダウンサンプリングにより、 $N/2^i$ に減少している⁽⁵⁾。

〈2・1・3〉 ウェーブレット逆変換と多重解像度解析 レベル $i+1$ のウェーブレット係数 w_{i+1} とスケーリング係数 v_{i+1} から、レベル i のスケーリング係数 v_i を再構成する方法を説明する。まず、ダウンサンプリングにより減少したデータを水増しするために、0 を w_{i+1} と v_{i+1} のデータの間に織り込む。つまり、 $w_{i+1}^0 = (0, w_{i+1,1}, 0, w_{i+1,2}, \dots)$ と $v_{i+1}^0 = (0, v_{i+1,1}, 0, v_{i+1,2}, \dots)$ というデータを作る。これは、アップサンプリングと呼ばれる⁽⁵⁾。

$i+1$ レベルのアップサンプリングされたウェーブレット係数 w_{i+1}^0 をウェーブレットフィルタ h に通し、レベル $i+1$ のアップサンプリングされたスケーリング係数 v_{i+1}^0 をスケーリングフィルタ g に通し、2 つのアウトプットを足すと、レベル i のスケーリング係数 v_i を得る⁽⁵⁾。

$$v_{i,t} = \sum_{k=1}^L h_k w_{i+1,((t+k-2) \bmod N/2^i)+1}^0 + \sum_{k=1}^L g_k v_{i+1,((t+k-2) \bmod N/2^i)+1}^0 \dots \dots \dots (5)$$

次に、多重解像度解析について説明する。多重解像度解析によれば、ウェーブレットスムースとウェーブレットディテールを用いて元の原系列を再構成することができる。ウェーブレットスムース s_i とは、スケーリング係数 w_i 以外の全てのウェーブレット係数とスケーリング係数を 0 としてウェーブレット逆変換を行い、得られたものである。ウェーブレットディテール d_i とは、ウェーブレット係数 w_i 以外の全てのウェーブレット係数とスケーリング係数を 0 としてウェーブレット逆変換を行い、得られたものである。

s_i と d_i 間には、以下の関係式が成り立つ。

$$s_{i-1} = d_i + s_i \dots \dots \dots (6)$$

$s_0 \equiv x$, $r_i = \sum_{k=1}^i d_k$ とすると、次式が求まる。

$$x = r_i + s_i \dots \dots \dots (7)$$

また、ウェーブレット分散におけるエネルギー保存則から、次式が成り立つ⁽⁶⁾。

$$\text{Var}(x) = \text{Var}(s_i) + \sum_{k=1}^i \text{Var}(d_k) \dots \dots \dots (8)$$

これは、各々のウェーブレットディテールとウェーブレットスムース間には相関がないことを意味する。

〈2・1・4〉 解析結果 米ドル・円為替市場の収益率時系列にウェーブレット解析を適用した。観測期間は、2000 年の 1 月 5 日から 2003 年の 12 月 8 日までの日足データで、 $N = 1024$ である。解析するレベルは、4 までとした。原系列のヒストグラムを図 1 に、各レベルのウェーブレットディテールを図 2、図 3、図 4、図 5 に、レベル 4 のウェーブレットスムースを図 6 に示す。

1 の原系列を見ると、左側裾野の方が少し厚く、非対称であることがわかる。ボラティリティ推定の際に、非対象性、つまり skew が存在すると推定が困難になることが知られている。非対象性を考慮した SV モデルが存在するが、SV モデルは推定が難しく、計算量を非常に必要とするアルゴリズムを用いるため、効率的とはいえない⁽⁷⁾。

各レベルのウェーブレットディテールを見ると、原系列に比べ、対称性があることがわかる。ウェーブレット解析後の時系列であれば、単純な GARCH モデルでも正確にボラティリティを推定できることが期待される。また、図 6 のウェーブレットスムースは、一様分布で近似できることがわかる。

〈2・2〉 GARCH を用いたボラティリティ推定 本研究では、以下に示す GARCH(1,1) モデルを用いて、各レベルのウェーブレットディテールのボラティリティを推定した。

$$R_t = \sigma_t \epsilon_t \dots \dots \dots (9)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 R_t は収益率、 σ_t はボラティリティである、また、 ϵ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う白色雑音である。パラメータ ω ,

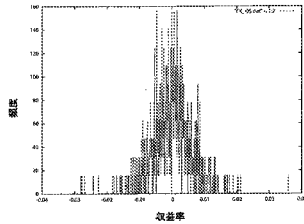


図 1 米ドル-円為替市場の収益率時系列のヒストグラム

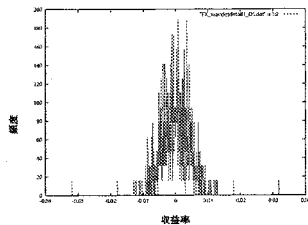


図 2 米ドル-円為替市場のレベル 1 ウェーブレットディテールのヒストグラム

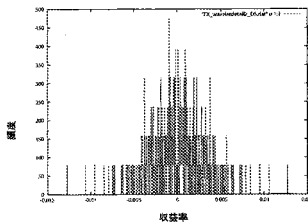


図 3 米ドル-円為替市場のレベル 2 ウェーブレットディテールのヒストグラム

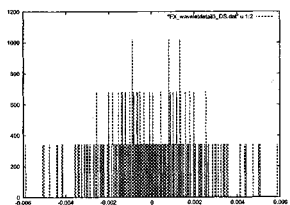


図 4 米ドル-円為替市場のレベル 3 ウェーブレットディテールのヒストグラム

α, β を最尤法により求め、ボラティリティを推定することができる。本研究では、各レベルのウェーブレットディテールに GARCH を適用し、ボラティリティの推定を行った。

3. EVT による VaR 推定

この節では、ウェーブレット解析と GARCH を用いた EVT による VaR 推定法の説明をし、結果について考察

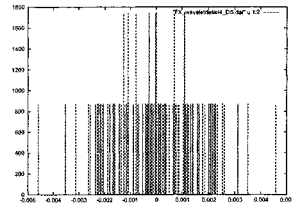


図 5 米ドル-円為替市場のレベル 4 ウェーブレットディテールのヒストグラム

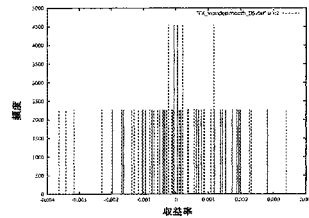


図 6 米ドル-円為替市場のレベル 4 ウェーブレットスミースのヒストグラム

する。

〈3・1〉 一般パレート分布の推定 EVT によれば、裾野は一般パレート分布で表わすことができる^{(3) (8)}。一般パレート分布の密度関数を次式に示す。

$$g(x) = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{\xi|x|}{\rho}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \dots \dots \dots (11)$$

一般パレート分布のパラメータは、最尤法を用いて推定することができる。一般パレート分布の対数尤度関数は以下の式となる。

$$l(\xi, \rho; \{d|d > u, d \in D_n\}) = -N \ln \phi - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{x \in A_n} \ln \left(1 + \frac{\xi}{\rho} x\right) \dots \dots \dots (12)$$

ただし、 $A_n = \{d - u | d > u, d \in D_n\}$ であり、 D_n はある期間における時系列の集合である。また、 u は裾野を規定する閾値で、 N は裾野分布に属するデータ数である。ここで、 $\tau = -\frac{\xi}{\rho}$ と置き換える。 ρ, ξ, τ の最尤推定量は、以下の式で求まる⁽⁸⁾。

$$\xi^{MLE} = \frac{1}{N} \sum_{x \in A_n} \ln(1 - \tau^{MLE} x) \dots \dots \dots (13)$$

$$\rho^{MLE} = -\frac{\xi^{MLE}}{\tau^{MLE}} \dots \dots \dots (14)$$

ただし、 τ^{MLE} は

$$\frac{1}{\tau^{MLE}} + \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\xi^{MLE}} + 1 \right) \times \sum_{x \in A_n} \left(\frac{x}{1 - \tau^{MLE} * x} \right) = 0 \dots \dots \dots (15)$$

を満たす。

従来法では、直接収益率時系列を用い、また、閾値を観測期間における標準標準偏差としていた⁽³⁾。本研究では、各レベルのウェーブレットディテールに対して、一般パレート分布の推定を行う。また、GARCHで推定したボラティリティを閾値とし、ボラティリティを超えるデータを裾野に属するデータとする。

〈3・2〉 VaRの推定 推定した一般パレート分布を用いて、VaRの推定を行う。lower-tailのVaRは、推定した一般パレート分布のパラメータを用いて以下の式で求めることができる。

$$T = \frac{\rho^{MLE}}{\xi^{MLE}} \left(\left(\frac{qn}{N} \right)^{\xi^{MLE}} - 1 \right) \dots \dots \dots (16)$$

ここで、 q はVaRを規定するパーセント、 n は観測データ数である。

レベル4のウェーブレットスムースから求まるVaRは、前節で示したようにウェーブレットスムースの分布が一般分布で近似できるため、ヒストリカル法⁽¹⁾を用いて推定を行った。

各レベルのウェーブレットディテールのVaR値を算出した後に、原系列のVaRを推定する方法について述べる。式(8)より、各ウェーブレットディテールとウェーブレットスムース間には相関がないことがわかる。そこで、分散共分散法を用いると、原系列のVaRは次式で求まる。

$$VaR(R_t) = \sqrt{VaR(d_1(t))^2 + \dots + VaR(d_4(t))^2 + VaR(s_4(t))^2} \quad (17)$$

〈3・3〉 シミュレーション結果と考察 提案するEVTモデルを用いて、VaR推定のバックテストシミュレーションを行った。観測する市場は、米ドル・円為替市場とTOPIXとJASDAQとした。バックテストによる観測期間は250日とし、VaR推定のための観測期間は直前の1024日とした。例として、米ドル・円為替市場の信頼区間99%のVaRのシミュレーション結果を、図7に示す。提案モデルとの比較のため、従来のEVTによるVaR推定結果も合わせて示す。シミュレーション結果を見ると、提案モデルの方がVaRの変動が小さく、また、全体的に低い値となっている。全てのシミュレーションにおいて、提案モデルの方がVaRが小さい結果を得た。

バックテストによって観測されたバイオレーションの数を、表1、表2に示す。括弧内の確率は、二項検定を行った際の確率である。表1、表2を見ると、提案モデルと従来モデル共に、有意水準1%では棄却されないことがわかる。よって、提案モデルと従来モデル共に、VaR推定モデルとして正しいことがわかる。

バイオレーションの数を比較すると、提案モデルの方が多いが、提案モデルによるVaRは従来モデルより小さく、リスクを過剰評価する可能性が低い。VaRはトレーダーのポジションの限度を与える指標であり、過剰に評価すると、収益最大化を目的とするトレーダーにとって、チャンスロ

スに繋がる可能性が高くなる。よって、二項検定をクリアし、比較的低いVaRを推定できる提案モデルの方が、VaR推定モデルとして有効だと考えられる。

4. 今後の予定

本研究では、ボラティリティの推定の際に、ボラティリティが正規分布に従うGARCHに適用した。ウェーブレット解析後の時系列にもfat-tailが存在するため、ボラティリティにもfat-tailが存在すると考えられる。今後は、 t 分布に従うGARCHを適用したEVTモデルに拡張する予定である。また、一般パレート分布の推定の際に、モーメント法による推定を行う。

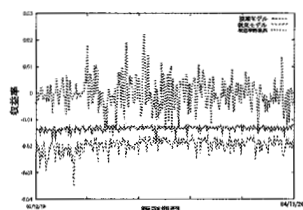


図7 米ドル・円為替市場のVaR推定

表1
提案モデルによる観測期間におけるバイオレーション

信頼区間	USDJPY 為替 03/12/10-04/11/24	TOPIX 03/09/12-04/09/09	JASDAQ 03/09/18-04/09/24
99%	4回 (24.1%)	3回 (45.7%)	5回 (10.8%)
95%	20回 (2.71%)	19回 (4.74%)	16回 (18.9%)

表2
従来モデルによる観測期間におけるバイオレーション

信頼区間	USDJPY 為替 03/12/10-04/11/24	TOPIX 03/09/12-04/09/09	JASDAQ 03/09/18-04/09/24
99%	0回 (100%)	2回 (71.42%)	1回 (91.9%)
95%	18回 (7.88%)	12回 (59.8%)	6回 (98.7%)

文 献

- (1) 山下 智志: 市場リスクの計量化とVaR, 朝倉書店, (2000)
- (2) ジョン・ダニエルソン, 森本 祐司: “市場リスクの予測について—EVTとGARCHモデルを用いたバリュエーション・アット・リスク算定の比較分析—”, 日本銀行金融研究所, 金融研究, 2000
- (3) C.Brooks, A.D.Clare, J.W.Dalle Molle and G.Persaud: “A Comparison of Extreme Value Theory Approaches for Determining Value at Risk”, Journal of Empirical Finance, 12, pp.339-352, March (2005)
- (4) 田中 勝人: 現代時系列分析: 岩波書店, (2006)
- (5) 稲田 将一, 鎌田康一郎: ウェーブレットによる経済分析: 日本銀行金融研究所, 金融研究, (2004)
- (6) Kin Keung Lai, Kaijian He, Chi Xie, Shou Chen: “Market Risk for Nonferrous Metals: A Wavelet Based VaR Approach”, IEEE, Computer Society, Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications, (2006)
- (7) 渡辺 敏明: ボラティリティ変動モデル: 朝倉書店, (2000)
- (8) 内田 真人: “極値理論に基づくトラヒックデータ分析における推定手法の比較 最尤法とモーメント法の比較”, 電子情報通信学会, Vol.103, No.445(2003)